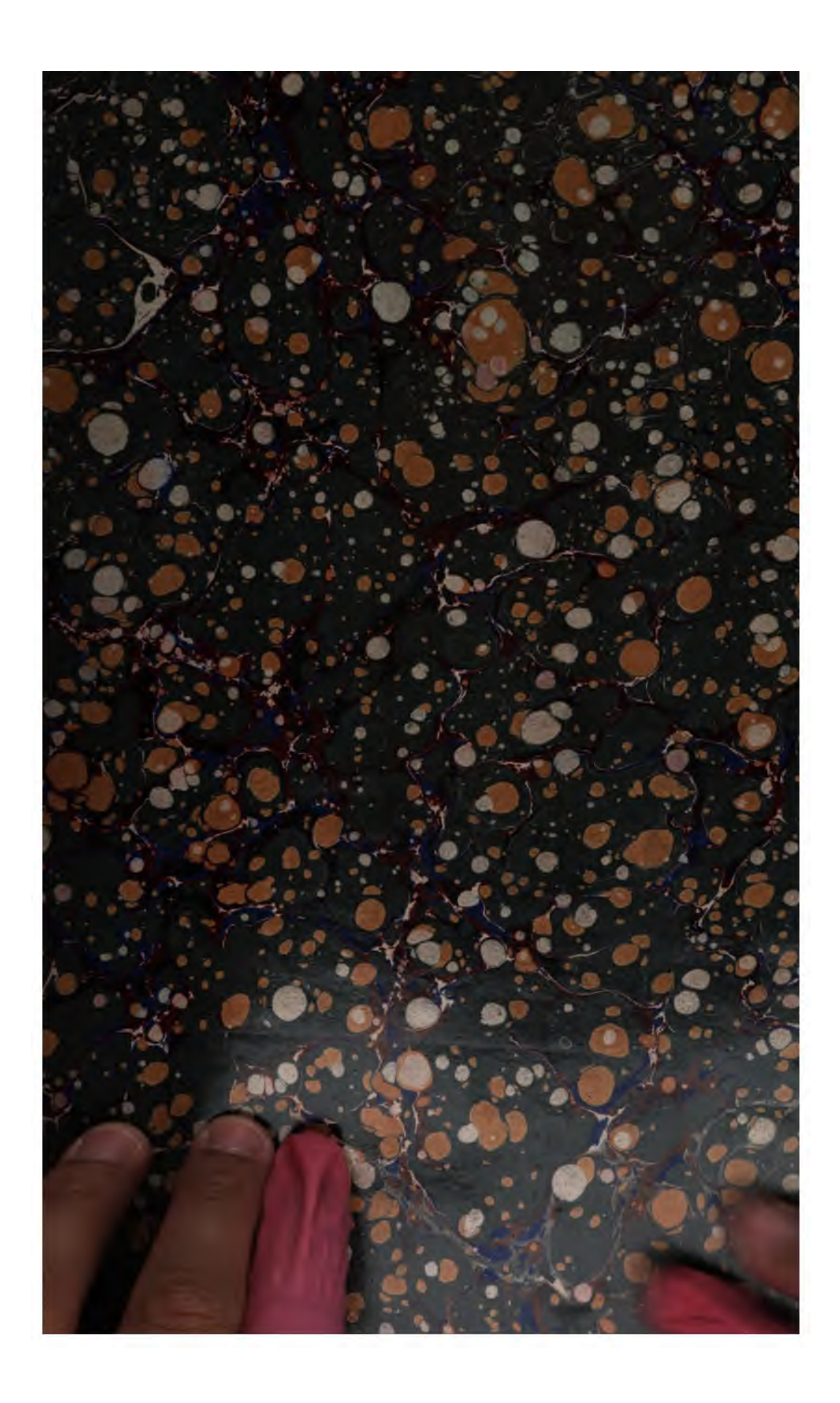






# ZEITSCHRIFT
# FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

51. BAND. 1. HEFT.

MIT 57 FIGUREN IM TEXT UND 3 TAFELN.

Ausgegeben am 2. August 1904.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

---

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



---

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**M. Bareni, A. Börsch, G. Bohlmann, K. Doehlemann, V. Fischer, E. Häntzschel, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, F. Ludwig, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, C. W. Wirtz, E. Wölffing.**



# Inhalt.



## Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik.



## Bücherschau.

# Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet.

Von FRIEDRICH SCHILLING in Göttingen.

(Mit zwei Tafeln Nr. I u. II.)

Die soeben erschienene zweite Sammlung kinematischer Modelle[1]) bildet die Fortsetzung der bereits 1898 veröffentlichten ersten Sammlung, die hauptsächlich die Theorie der Polbahnen, der genauen Geradführungen und der Erzeugung der allgemeinen und speziellen zyklischen Kurven zur Anschauung bringt.[2]) Besonders an letztere Gruppe anschließend sollen die neuen Modelle, deren Originale der Versammlung in Hamburg (1901)[3]) vorgelegen haben, die wichtigsten *Methoden der Zahnräderkonstruktion* darstellen, indem sie hierbei wieder vor allem die zugrunde liegenden mathematischen Gedanken hervortreten lassen, dem Wunsche entsprechend, der bezüglich einer solchen Sammlung kinematischer Modelle von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf ihrer Versammlung in Frankfurt a. M. (1896) zum Ausdruck gebracht war.

Die vorliegende Arbeit bringt neben der Beschreibung der Modelle eine kurze, besonders im § 4 neue interessante Resultate darbietende Einführung in das Gebiet der Verzahnungstheorie.[4]) Man wird er-

1) Über den Bezug der Modelle erteilt der Verlag Martin Schilling in Halle a. S. gern nähere Auskunft.

2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. V, S. 5 (1897) und Bd. VII, S. 7 (1899), sowie diese Zeitschrift, Jahrgang 44, S. 214—227 (1899), (Sonderabdruck, Halle a. S., 1899, S. 1—15), sowie Abdruck in L'enseignement mathématique von Laisant et Fehr, Paris 1900, Bd. II, p. 31—48.

3) Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung Bd. XI, S. 267—269 (1902).

4) Wir wollen gleich hier auf die wichtigsten Lehrbücher hinweisen, welche die Verzahnungstheorie behandeln. Dort finden sich zahlreiche weitere, insbesondere auch historische Literaturangaben: Bach, Die Maschinenelemente, ihre Berechnung und Konstruktion, Stuttgart, 1901, S. 220—308. — Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig, 1888, S. 173—229. — Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik II, Braunschweig 1900, S. 457—473 und Der Konstrukteur, Braunschweig 1882—1889, S. 514—599. — Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik III, 1, Braunschweig 1876, S. 326—442. — Die technischen Einzelheiten gibt auch in kurzer, übersichtlicher Zusammenstellung: Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“ Abt. I, Berlin 1902, S. 589—604.

kennen, daß diese Betrachtungen sich immerfort mit Begriffen beschäftigen, wie Tangente, Normale, Bogenlänge, Krümmungskreis, Evolute und Evolvente, Äquidistante, Enveloppe, Spitze, Wendepunkt, Doppelpunkt usw. Daher dürften die Modelle zweifellos nicht nur in einer Vorlesung über angewandte Kinematik selbst, sondern auch in solchen über analytische Geometrie oder Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven ihre ausgezeichnete Verwendung finden. Soll es doch geradezu eine wesentliche Aufgabe dieser Modelle sein, den kinematischen Betrachtungen besonders auch im Universitätsunterricht, der Einführung der angewandten Mathematik entsprechend, neue Freunde zu gewinnen. Ohne Modelle aber dürfte eine Behandlung solcher Fragen im Unterricht überaus erschwert und wenig erfreulich sein.

Die innige Beziehung der durch die Modelle veranschaulichten Verhältnisse zur *Theorie der Lieschen Berührungstransformationen*, über die ich in Hamburg bereits nähere Mitteilung gemacht habe[1]), möchte ich mir indes für eine Fortsetzung dieser Arbeit aufsparen, die bald folgen soll. Wir haben eben hier ein besonders interessantes Beispiel vor uns, wie moderne, rein mathematische Disziplinen oft aufs engste in Fühlung stehen mit wirklich praktischen Anwendungen.

## § 1. Zwei Modelle zur Erzeugung der Pascalschen Kurven.

Zunächst schien es wünschenswert, den 7 Modellen der früheren Sammlung, welche die Erzeugung der verschiedenen allgemeinen und speziellen zyklischen Kurven darstellen[2]) und von denen wir das Modell 5 nochmals auf Tafel I (Fig. 1) abbilden, noch zwei weitere hinzuzufügen, welche in entsprechender Weise die Erzeugung der sogenannten Pascalschen Kurven, bekanntlich spezielle algebraische Kurven 4. Ordnung (limaçon de Pascal, Pascalsche Schnecke)[3]) veranschaulichen.

Die Umkehrung des Modelles 5 der ersten Serie, des „Ellipsographen" (Tafel I, Fig. 1), führt uns zum *ersten* der beiden neuen Modelle (Tafel I, Fig. 2), dem Satze entsprechend:

(1) *Rollt auf einem festen Kreise $k_a$ ein von ihm innerlich berührter Kreis $k_b$ mit doppeltem Radius ab, so beschreiben drei mit $k_b$ fest ver-*

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. XI, S. 267—269 (1902).

2) Vgl. diese Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, S. 214 ff., Tafel I u. II.

3) Eine ausführliche Behandlung dieser Kurven mit historischen Literaturangaben findet sich bei Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig 1902, S. 136 ff. und Tafel IV, Fig. 28, a, b, c, S. 142 ff. und S. 498.

*bundene Punkte, die bezw. innerhalb, auf und außerhalb des Kreises $k_b$ liegen, entsprechend eine verschlungene, gespitzte und gestreckte Pascalsche Kurve.* Von ihnen pflegt man die mittlere auch als *Cardioide* (Herzkurve) zu bezeichnen.

Das Modell illustriert überdies noch folgende Modifikation der Erzeugung dieser Kurven, die auch unmittelbar aus der Umkehrung des Ellipsographen folgt:

(2) *Bewegt sich ein System so, daß die Schenkel eines Winkels $QOR$ in ihm* (der im Modell speziell als ein rechter gewählt ist) *stets je*

Fig. 1.

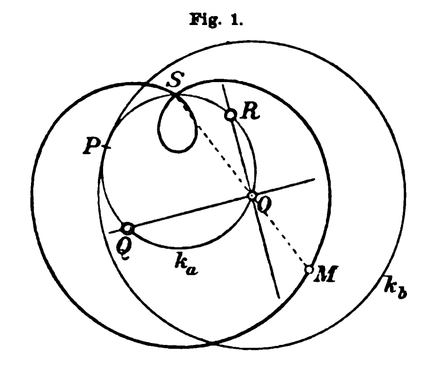
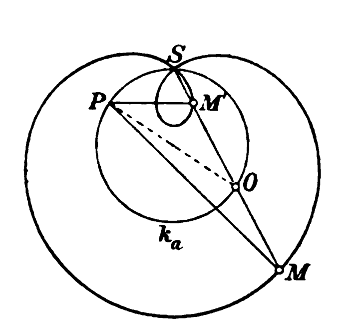



Fig. 2.




*durch einen festen Punkt $Q$ und $R$ hindurchgehen, so beschreibt ein beliebiger Punkt $M$ des Systems eine Pascalsche Kurve.* (Fig. 1.)

Aus dieser letzten Erzeugungsweise der Pascalschen Kurven, wonach nämlich $MO$ stets wegen der Konstanz des Peripheriewinkels $QOS$ durch einen festen Punkt $S$ auf $k_a$ geht, folgt dann leicht die dritte Erzeugung der Kurven und damit eine einfache Methode zur Konstruktion von beliebig vielen Punkten und Tangenten derselben:

(3) *Man lege einen beliebigen Strahl durch den festen Punkt $S$ des Kreises $k_a$ und trage von seinem zweiten Schnittpunkt $O$ aus die konstante Strecke $s = OM = OM'$ beiderseits ab, dann sind die Endpunkte $M$ und $M'$ zwei Punkte der Pascalschen Kurve und $MP$, $M'P$ ihre Normalen, wo $P$ der andere Endpunkt des zu $O$ gehörenden Durchmessers von $k_a$ ist.* (Fig. 2.) *Je nachdem $s \lesseqgtr$ als der Durchmesser $2a$ von $k_a$ ist, ergibt sich hierbei eine verschlungene, gespitzte oder gestreckte Pascalsche Kurve.*

Aus dieser letzten Erzeugungsweise läßt sich auch leicht die *Polargleichung* ableiten:

$$r = 2a \cos \varphi + s,$$

wobei $S$ als Pol und die von $S$ ausgehende Durchmesserrichtung des Kreises $k_a$ als Polarachse gewählt ist.

Das *zweite* Modell (Tafel I, Fig. 3) entspricht der Tatsache, daß jede zyklische Kurve in zweifacher Weise durch Abrollen eines beweglichen auf einem festen Kreise erzeugt werden kann.[1]) Demgemäß stellt sich dem obigen Satze (1) der folgende zur Seite, der dann durch das Modell veranschaulicht wird:

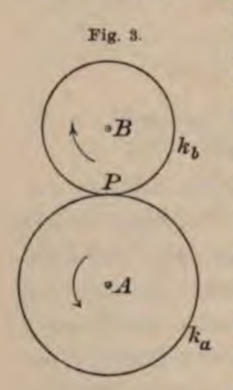
(4) *Rollt auf einem festen Kreise ein ihn äußerlich berührender mit demselben Radius ab, so beschreiben drei mit letzterem festverbundene Punkte, die bezw. außerhalb, auf und innerhalb des beweglichen Kreises liegen, eine verschlungene, gespitzte und gestreckte Pascalsche Kurve.*

Indem ferner die Radien der einander gleichen Kreise dieses zweiten Modelles gleich dem Radius des festen Kreises im ersten Modell gewählt sind, ergibt sich im speziellen in beiden *dieselbe* gespitzte Pascalsche Kurve.[2])

## § 2. Die allgemeine Aufgabe der Verzahnungstheorie.

Wir wenden uns nun zu der *Verzahnungstheorie.* Die hier zu lösende Aufgabe gipfelt in der Untersuchung, *wie sich die Umdrehung um eine festgelagerte Achse 𝔄 auf eine zweite ebenfalls festgelagerte Achse 𝔅 durch Druckkräfte mit Hilfe von Zahnrädern übertragen läßt.* Gilt es nun im folgenden insbesondere zur Erläuterung der Modelle, die mathematischen Grundgedanken dieser Theorie zusammenzustellen, so wollen wir uns von vornherein einmal auf parallele Achsen 𝔄, 𝔅 und zylindrische Zahnräder beschränken. Da dann nur deren Querschnitte wesentlich sind, so haben wir es also geometrisch mit Problemen in einer Ebene zu tun. Ferner wollen wir der Einfachheit der Darstellung halber voraussetzen, daß das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\omega_a : \omega_b$ für die Umdrehung um die beiden Achsen 𝔄, 𝔅 konstant bleibt. Dementsprechend kann die relative Bewegung der ebenen Systeme $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ der beiden Zahnräderquerschnitte gegen einander durch das ohne Gleiten stattfindende Abrollen zweier solcher Kreise $k_a$ und $k_b$ (Polbahnen, Polkreise, Teilkreise) auf einander veranschaulicht werden (Fig. 3), deren Mittelpunkte die Querschnittsmittelpunkte $A$, $B$ der Achsen sind

Fig. 3.




1) Vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, Satz 4 S. 219 und Satz 10 S. 221 (Sep.-Abdr. S. 7 und 9). In der Gl. (6) daselbst ist in unserem Falle $\frac{B}{A} = 2$, also $\frac{b}{a} = 1$.

2) Vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, Anmerkung auf Seite 222 (Sonder-Abdr. S. 10).

und deren Radien $a$, $b$ sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten. Die diesen Annahmen entsprechenden Zahnräder pflegt man in der Technik als „Stirnräder“ zu bezeichnen.[1])

Außer den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ kommt noch das ruhende System $\Sigma$ in Betracht, das also in den festen Punkten $A$, $B$ bezw. mit $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ verbunden ist. Da es wesentlich nur auf die relative Bewegung der Systeme $\Sigma_a$, $\Sigma_b$ und $\Sigma$ gegen einander ankommt, so werden wir, wenn es vorteilhaft ist, gelegentlich auch wohl allen drei Systemen gleichzeitig noch eine Drehung um den Punkt $A$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega_a$ erteilt denken. Dadurch wird das System $\Sigma_a$ zum ruhenden, während die Bewegung des Systems $\Sigma_b$ durch Abrollung seines Polkreises $k_b$ auf dem jetzt festen Polkreis $k_a$ bestimmt ist und die des Systems $\Sigma$ dadurch, daß es mit seinen Punkten $A$ und $B$ an die Systeme $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ festgekettet ist.

Je nachdem die ursprüngliche Anschauung der Bewegung der drei Systeme oder die soeben geschilderte unserer Untersuchung oder dem einzelnen Modell zugrunde gelegt ist, wollen wir kurz *von der ersten oder der zweiten Bewegungsart der Systeme* $\Sigma_a$, $\Sigma_b$, $\Sigma$ sprechen.

Wir behandeln nun nach einander die folgenden drei Methoden der Verzahnungstheorie und die als ihre Ausführungen sich ergebenden entsprechenden Verzahnungen:

a) *die Methode der Hilfspolbahnen (Zykloidenverzahnung)*,

b) *die Methode der Äquidistanten (Triebstockverzahnung)*,

c) *die Methode der sekundären Polbahnen (Evolventenverzahnung)*.

## § 3. Die Methode der Hilfspolbahnen (Modelle 3 bis 5).

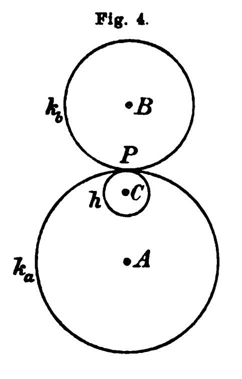
Wir knüpfen unsere Betrachtung sogleich an das *Modell 3* an (vierte Figur der Tafel I). In ihm erkennt man zunächst die beiden Polkreise $k_a$ und $k_b$ mit den festen Mittelpunkten $A$, $B$ und überdies die sogenannte Hilfspolbahn, die hier ebenfalls als ein Kreis $h$ gewählt ist, im allgemeinen natürlich eine beliebige (analytische) Kurve sein kann, wobei den Radien der drei Kreise $k_a$, $k_b$, $h$ die Verhältnisse $4:3:1$ gegeben

---

1) Doch sei ausdrücklich bemerkt, daß alle folgenden Betrachtungen und zwar sowohl die theoretischer wie praktischer Natur sich ohne wesentliche Änderung auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen lassen, wo das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis nicht konstant ist oder überdies die Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich im Endlichen schneiden (unrunde, z. B. elliptische Räder, vgl. das Modell 8 der ersten Sammlung, Kegelräder).

sind. Während die beiden Polkreise $k_a$ und $k_b$ auf einander abrollen, rollt gleichzeitig auch der Hilfspolkreis $h$, ebenfalls ohne Gleitung, auf ersteren ab, sie beständig in ihrem Berührungspunkt berührend (Fig. 4). Es ist daher auch der Mittelpunkt $C$ des Kreises $h$ ein fester Punkt, was indes in Rücksicht auf Verallgemeinerungen unwesentlich ist. Es gilt dann der Satz:

Fig. 4.



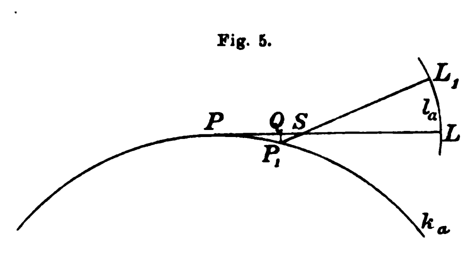

(5) *Denkt man mit der Hilfspolbahn $h$ einen beliebigen Punkt $L$ — wie im Modell den Punkt $D$ oder $E$ — fest verbunden, so beschreibt er in den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ der Polkreise bei der Abrollung der drei Kreise auf einander zwei Bahnkurven oder „Profilkurven" $l_a$ und $l_b$, welche sich in jedem Momente in jenem Punkte $L$ berühren, bei der beschriebenen Bewegung also auf einander gleiten. Die gemeinsame Normale der Profilkurven wird jederzeit durch $LP$ gegeben, wo $P$ der gemeinsame Berührungspunkt der Kreise, der „momentane Pol", ist.*[1])

Des weiteren nennen wir der späteren Benutzung wegen (S. 21) noch folgenden Satz:

(6) *Ist die Verbindungslinie $LP$ des beschreibenden Punktes $L$ mit dem momentanen Pole $P$ die gemeinsame Tangente der Polkreise, so ist $LP$ Krümmungsradius sowohl der Profilkurve $l_a$ wie $l_b$.*

Wir führen den Beweis für die Profilkurve $l_a$. (Fig. 5.) Ist an Stelle des Berührungspunktes $P$ der unendlich benachbarte Punkt $P_1$ des Kreises $k_a$ getreten und gleichzeitig $L$ im System $\Sigma_a$ nach $L_1$ gelangt und zwar durch Drehung um den momentanen Pol $P$ durch einen Winkel, der hier, wo $h$ den Kreis $k_a$ innerlich berührt gleich der Differenz (im anderen Falle gleich der Summe) der Kontingenzwinkel für das Bogenelement $\widehat{PP_1}$ von $k_a$ und das ihm gleiche von $h$ ist, so ist $L_1P_1$ die benachbarte Normale. Sie möge die ursprüngliche $LP$ im Punkte $S$ schneiden. Dann ist

Fig. 5.




1) Auf die Verallgemeinerung dieses Satzes, wenn bei gleichzeitiger Abrollung von $k_a$, $k_b$, $h$ auf einander nicht ein Punkt $L$, der mit $h$ fest verbunden ist, entsprechende Profilkurven $l_a$, $l_b$ beschreibt, sondern eine mit $h$ fest verbundene Kurve $l$ solche als Enveloppen liefert, wollen wir der Kürze halber hier nicht näher eingehen.

lim $QS = 0$ und damit lim $PS = 0$, da $P_1$ von $LP$ einen unendlich kleinen Abstand höherer Ordnung hat als $L_1$ von $LP$.[1])

In unserem Modell ist $D$ speziell *auf* der Peripherie der Hilfspolbahn $h$ gewählt, beschreibt also in den durch Glasscheiben dargestellten Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ eine vierspitzige Hypozykloide $d_a$ und eine dreispitzige Epizykloide $d_b$. Der Punkt $E$ dagegen ist *außerhalb* $h$ gewählt und beschreibt demnach bezw. eine verschlungene Hypo- und Epitrochoide $e_a$ und $e_b$. (Die Kurven $d_a$, $d_b$ sind im Modell rot, die Kurven $e_a$, $e_b$ grün gezeichnet.) Um die Schönheit dieser Verhältnisse wirklich voll erkennen zu können, ist es natürlich notwendig, das Modell selbst während seiner Bewegung, die mit Hilfe einer auf der Rückseite befindlichen Kurbel auszuführen ist, zu studieren.

Das *Modell 4* (Tafel I) tritt dem vorigen ergänzend zur Seite; es zeigt im wesentlichen dieselben Verhältnisse, nur berührt der Hilfspolkreis $h$ jetzt umgekehrt den Polkreis $k_a$ äußerlich und $k_b$ innerlich.

Das *Modell 5* (Tafel I) veranschaulicht die technische Verwendung der geschilderten geometrischen Beziehungen, nämlich die sogenannte *Zykloidenverzahnung*. Es besteht aus einem Zahnräderpaare mit 8 und 6 je unter sich kongruenten, gleichmäßig angeordneten Zähnen dem Radienverhältnis 4:3 der Polkreise entsprechend; jenes bewirkt jetzt die Umdrehungen der Systeme $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ um die festen Punkte $A$, $B$. Und zwar sind in diesen (wie analog auch in den später zu besprechenden Modellen 8 und 10) die Zähne verhältnismäßig weit größer und dafür in geringerer Zahl konstruiert, als bei wirklich praktischen Ausführungen, um die Einzelheiten anschaulicher hervortreten zu lassen. Das Modell zeigt im einzelnen in den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ außer den schwarz gezeichneten Polkreisen $k_a$ und $k_b$ dieselben beiden Paare vier- oder dreispitziger Epi- und Hypozykloiden, wieder in roter Farbe, welche die vorigen beiden Modelle enthalten, und man erkennt leicht, wie Bogen dieser Kurven an den verschiedenen Stellen jedesmal die wesentlich in Betracht kommende Begrenzung der Zähne, ihre „*Flanken*", bilden. Des genaueren begrenzt eine Epi- bezw. Hypozykloide des einzelnen Systems bezw. den als „*Kopf*" und „*Fuß*" bezeichneten Teil an der Flanke jedes Zahnes. Als unwesentliche Begrenzung von Kopf und Fuß sind

---

1) Der Satz (6) gilt entsprechend auch für die Profilkurve bei einer solchen allgemeineren analytischen Polbahn $k_a$ und Hilfspolbahn $h$, die in dem für beide nicht singulären momentanen Pole $P$ verschiedene Krümmungskreise besitzen, aber nicht mehr für solche, die dort zusammenfallende Krümmungskreise haben; wegen des letzteren Falles sehe man z. B. Schönflies, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, S. 45, sowie vor allem Mehmke, Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, diese Zeitschrift Bd. 35, 1890, S. 1—24 und 65—81.

Bogen je zweier zu $k_a$ oder $k_b$ konzentrischer Kreise benutzt, die sogenannten *„Kopf- und Fußkreise“*, die im Modell nicht vollständig eingezeichnet sind. Endlich sind noch auf der das ganze Modell bedeckenden Glasscheibe zwei kleine Kreise in blauer Farbe eingezeichnet; sie stellen die sogenannte *„Eingriffskurve“* vor, d. h. den geometrischen Ort der Berührungspunkte entsprechender Zähne in dem festen System $\Sigma$. In diesem Falle deckt sie sich mit den beiden Hilfspolkreisen.

Einige wenige technische Einzelheiten, insbesondere übliche Annahmen aus der Praxis dieser Zahnräderkonstruktionen möchte ich im Anschluß an das Modell wenigstens noch kurz berühren. Die Zähne pflegt man stets symmetrisch auszubilden, um die Drehung der Räder im einen oder anderen Sinne zu ermöglichen; die auf einem Radius gemessenen Längen von Zahnkopf und -fuß wählt man im allgemeinen im Verhältnis 3:4, während man die Bogen des Teilkreises (Polkreises), die zur *„Zahnlücke“* und *„Zahnbreite“* gehören, um einigen Spielraum für die Zähne des Gegenrades zu gewinnen, nicht einander gleich macht, sondern gewöhnlich etwa wie 41:39 sich zu einander verhalten läßt. Dementsprechend ist unser Modell im Sinne des im System $\Sigma_a$ eingezeichneten Pfeiles zu drehen, falls die vorhandenen Profilkurven sich berühren sollen.[1]) Auf die praktischen Methoden, um entsprechende Bogen zweier Profilkurven der Zykloidenverzahnung auf dem Reißbrett zu zeichnen, will ich indes nicht eingehen, nur erwähnen, daß solche insbesondere von Poncelet (1827) und Reuleaux (1861) ausgebildet sind, wobei auch die Eingriffskurven Anwendung finden.[2])

## § 4. Zusammenstellung allgemeiner Sätze der Verzahnungstheorie mit Beispielen.

Im Anschluß an die Entwicklungen des vorigen Paragraphen, die uns vor allem bereits eine wichtige Erzeugungsart entsprechender Profilkurven gaben, wollen wir nun einige allgemeine geometrische Sätze der Verzahnungstheorie zusammenstellen, welche dann bei den anderen Konstruktionsmethoden zur Anwendung gelangen. Ein für allemal sei vorweg die Voraussetzung ausgesprochen, daß alle im folgenden gegebenen Kurven regulären[3]) Charakter besitzen sollen.

---

1) Analoge Bemerkungen technischer Natur gelten auch für die beiden später besprochenen Verzahnungsarten (Modelle 8 und 10).

2) Man sehe z. B. Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik, Bd. II, Braunschweig 1900, S. 74 und Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 223 ff.

3) Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901, S. 11 und 71.

(7) *Sind außer den Polkreisen $k_a$ und $k_b$ zwei — nach dem Satze (5) gewonnene — Profilkurven $l_a$ und $l_b$ gegeben, so gehört jede von ihnen zur Enveloppe aller Lagen, welche die andere während der Abrollung der Polkreise auf einander annimmt.*

Dieser Satz führt uns sogleich zu der von der speziellen Erzeugungsart des vorigen Paragraphen unabhängigen allgemeinen Definition:

(8) *Zwei Kurvenbogen $l_a$ und $l_b$, die entsprechend den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ der gegebenen Polkreise $k_a$ und $k_b$ angehören, nennt man dann einander entsprechende Profilkurven, wenn der eine zur Enveloppe aller Lagen des anderen bei der Abrollung der Polkreise gehört.*

Über die *technische* Brauchbarkeit zweier solcher Profilkurven ist hierdurch natürlich noch nichts ausgesagt.

Aus der Definition folgt sofort:

(9) *Jeder beliebige Kurvenbogen kann stets dann und nur dann als Profilkurve des einen Systems, etwa von $\Sigma_a$, aufgefaßt werden, sodaß ihm eine oder mehrere Profilkurven im anderen System $\Sigma_b$ zugeordnet sind, wenn die Normalen des ersteren den zugehörigen Polkreis $k_a$ reell schneiden.*

Mit anderen Worten besagt dies:

(10) *Man kann die eine Profilkurve unter der angegebenen Einschränkung willkürlich wählen.*

Eine ausführlichere Betrachtung wollen wir dem folgenden Satze (11) widmen. Da dieser Satz nur die Beziehung zwischen der Hilfspolbahn und je *einem* der beiden Systeme — wir bevorzugen etwa $\Sigma_b$ — betrifft, so wollen wir den Index $b$ an den Bezeichnungen $k_b$ und $l_b$ der Einfachheit halber im folgenden fortlassen:

(11) *Ist außer einem Polkreise $k$ und einem Profilkurvenbogen $l$ auf letzterem ein Punkt $L$ in einer solchen Anfangslage $L_0$ gegeben, daß die Normale in $L_0$ den Kreis $k$ reell in den Punkten $P$ und $P'$ schneidet, so lassen sich stets zwei solche $k$ anfangs bezw. in $P$ und $P'$ berührende Hilfspolbahnen $h$ und $h'$ bestimmen, daß der mit $h$ oder $h'$ festverbundene Punkt $L$ bei der Abrollung von $h$ oder $h'$ auf $k$ den Bogen $l$, wenigstens in der Umgebung des Punktes $L_0$, beschreibt.*[1])

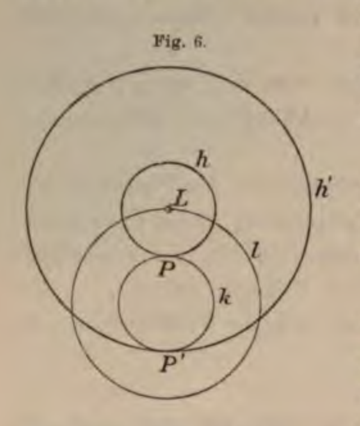
Ehe wir den Beweis dieses wichtigen Satzes durch analytische Bestimmung der Hilfspolbahnen erbringen, wollen wir einige einfache Beispiele vorausschicken, um dadurch die Verhältnisse, die gar nicht so einfach sind, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte, anschaulicher zu machen.

---

1) Nach dem Satze (5) ist hiermit natürlich, wenn auch der zweite Polkreis in seiner Lage gegeben ist, auch die andere Profilkurve bestimmt und wie dort angegeben zu konstruieren

*Beispiel I:* Es sei die Profilkurve $l$ *ein zum Polkreise $k$ konzentrischer Kreis.* Dann sind die beiden Hilfspolbahnen $h$ und $h'$ ersichtlich ebenfalls Kreise und zwar mit dem auf $l$ gewählten Punkte $L$ als Mittelpunkt und der Summe bezw. Differenz der Radien von $k$, $l$ als ihren Radien (Fig. 6).[1])

Fig. 6.

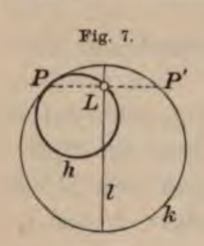



*Beispiel II:* Es sei $l$ *ein Kreis, dessen Mittelpunkt $M$ auf $k$ gelegen ist.* Die eine Hilfspolbahn ist dann in den Punkt $M$ selbst zusammengezogen.[2])

*Beispiel III:* Es sei $l$ *ein Durchmesser des Kreises $k$.* Dann sind die beiden Hilfspolbahnen $h$ und $h'$ (abgesehen von der momentanen Lage) in dem einen Kreise vereinigt, dessen Radius gleich der Hälfte desjenigen von $k$ ist (Fig. 7).

*Beispiel IV:* Es sei $l$ *eine gewöhnliche Evolvente des Polkreises $k$.* Da die Normalen in allen Punkten der Evolvente (von der Spitze $L_0$ abgesehen) beständig $h$ berühren, so fallen die Punkte $P$ und $P'$ und damit auch die Hilfspolbahnen $h$ und $h'$ zusammen. Die Hilfspolbahn besteht in der „Anfangslage" aus der Tangente $t$ des Kreises in der Spitze $L_0$ und — dem singulären Punkte $L_0$ entsprechend — aus einem mit $t$ fest verbunden zu denkenden, mit $k$ in dieser Anfangslage sich deckenden Kreise $i$. (Fig. 8b.) Ersichtlich stellt dies Beispiel auch den einzigen Fall vor, wo einem Profilbogen $l$ nur *eine* Hilfspolbahn auch in Rücksicht auf deren Lage entspricht.

Fig. 7.



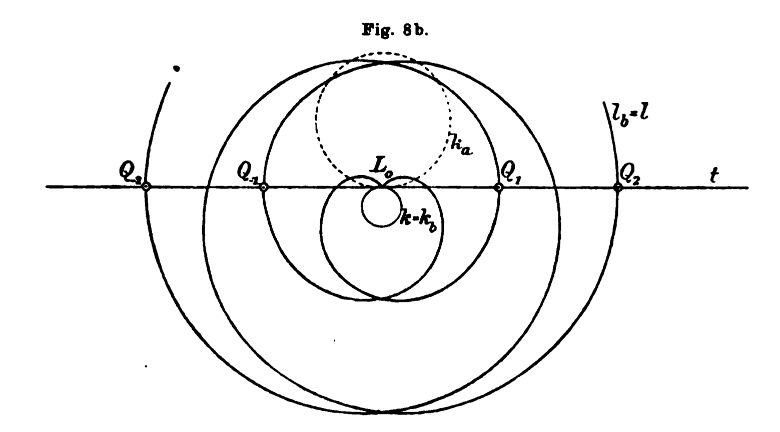

*Zusatz:* Ist außer $k = k_b$ noch der zweite Polkreis $k_a$ in der Anfangslage gegeben, wo er $k_b$ in $L_0$ berührt, so besteht die $l = l_b$ entsprechende vollständige Profilkurve $l_a$ im System $\Sigma_a$ als Enveloppe aller Lagen von $l_b$ bei der relativen Abrollung von $k_a$ und $k_b$ aufeinander (vgl. Satz (8)) zunächst aus der gespitzten Trochoide $e$, die als

1) Ist außer $k = k_b$ noch der zweite Polkreis $k_a$ in der richtigen Anfangslage gegeben, wo letzterer momentan $k_b$ in $P$ oder $P'$ berührt, so wird die $l = l_b$ entsprechende Profilkurve $l_a$ bez. $l_a'$ ebenfalls durch je einen zu $k_a$ konzentrischen Kreis gegeben. Man sieht leicht, daß indes diese Profilkurvenpaare zu praktischen Zahnräderkonstruktionen nicht anwendbar sind.

2) Nach der Anschauung der Lieschen Theorie der Berührungstransformationen ist $M$ eben der Träger der unendlich vielen durch ihn gehenden Linienelemente.

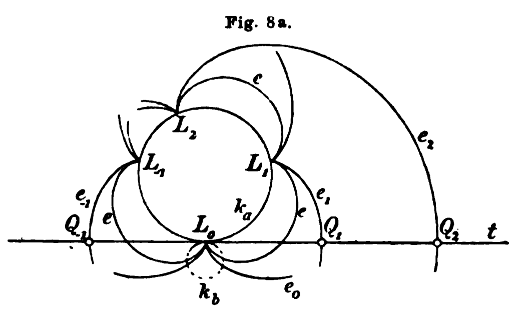
Bahnkurve der Spitze von $l_b$ im System $\Sigma_a$ erzeugt wird (Fig. 8a), dem Teil $i = k$ der Hilfspolbahn entsprechend, sodann aus im allgemeinen[1]) unendlich vielen gewöhnlichen Evolventen $e_n$ des Kreises $k_a$

Fig. 8b.




($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Die erste Evolvente $e_0$ wird von dem Punkte $L_0$ in $\Sigma_a$ beschrieben, wenn die zur Hilfspolbahn gehörende Gerade $t$ auf dem in der Anfangslage befindlichen Kreise $k_a$ in der einen oder anderen Richtung abrollt. Die übrigen Evolventen können wir folgendermaßen erzeugt denken: Es möge erst von der Anfangslage aus der zur Hilfspolbahn gehörende Kreis $i$, wobei er die Gerade $t$ mitnimmt, $n$-mal ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) in der einen oder anderen Richtung, die durch das Vorzeichen von $n$ bestimmt sei, vollständig auf $k_a$ abrollen, sodaß der Punkt $L_0$ nach $L_n$ auf $k_a$ gelangt (Fig. 8a). Sodann erst möge $t$ in der einen und anderen Richtung auf $k_a$ abrollen; der anfangs mit $L_n$ zusammenfallende Punkt von $t$ beschreibt dann die Evolvente $e_n$, deren Spitze also mit einer Spitze der oben genannten Trochoide $e$ zusammenfällt.

Fig. 8a.




In den zusammengehörenden Figuren 8a, b sind die Systeme $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ für sich dargestellt, und in jeder von ihnen ist der andere Polkreis in seiner Anfangslage gestrichelt angedeutet. In der Figur 8b

1) Falls nämlich nicht die Radien von $k_a$ und $k_b$ ein rationales Verhältnis haben.

sind allemal die zweiten Schnittpunkte der Geraden $t$ und der Evolvente $l_b$ mit $L_0 = Q_0$, $Q_n$ ($n = \pm 1, \pm 2 \ldots$) bezeichnet, wobei $Q_{n-1}Q_n = 2b\pi$ ist, wenn $b$ den Radius von $k_b$ bezeichnet. Diese Punkte $Q_n$ sind die momentanen Berührungspunkte der Evolvente $l_b$ in $\Sigma_b$ und der Evolventen $e_n$ in $\Sigma_a$, wenn die Systeme sich in der Anfangslage befinden. Wir fassen unsere Betrachtung in den Satz zusammen:

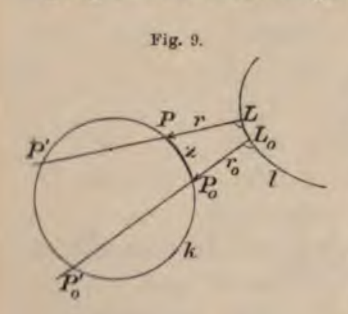
(12) *Ist die Profilkurve $l_b$ des Systems $\Sigma_b$ eine gewöhnliche Evolvente des Polkreises $k_b$, so besteht die vollständige Enveloppe aller Lagen von $l_b$ im System $\Sigma_a$ aus einer gespitzten Trochoide $e$ und aus einer unendlichen oder endlichen Anzahl gewöhnlicher Evolventen des Polkreises $k_a$, je nachdem das Radienverhältnis von $k_a$ und $k_b$ irrational oder rational ist.*[1])

## § 5. Beweis des Satzes (11) und Folgerungen.

Wir gehen nun zu der in Aussicht genommenen *analytischen Berechnung der Hilfspolbahn* und damit zugleich zum allgemeinen *Beweise des Satzes* (11) über.

Es seien der Polkreis $k$ und die Profilkurve $l$ bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch ihre analytischen Gleichungen in Parameterdarstellung bezw. mit dem Parameter $\varkappa$ und $\lambda$ gegeben. Ferner sei der Punkt $L$ auf $l$ in seiner Anfangslage $L_0$ durch $\lambda = \lambda_0$ bestimmt und übrigens auf einen hinreichend kleinen von $L_0$ auslaufenden Bogen von $l$ beschränkt. (Fig. 9.) Man kann dann die Gleichung der Normalen von $l$ im Punkte $L$ aufstellen und die Schnittpunkte $P$, $P'$ der Normalen mit $k$ durch Funktionen des Parameters $\varkappa$ von $\lambda$ bestimmen. Einer der Schnittpunkte, etwa $P$, sei im folgenden bevorzugt und die Strecke $LP$ mit $r$, $L_0P_0$ mit $r_0$ bezeichnet, wo $P_0$ der zu $L_0$ gehörende Schnittpunkt ist. Fernerhin sei der Einfachheit halber sogleich eine solche Wahl des Parameters $\varkappa$ angenommen, daß dieser den Bogen $\widehat{P_0P}$ des Kreises $k$ darstellt. Die Strecke $r$ ist nach dem Vorstehenden ebenfalls eine wohlbestimmte Funktion des Parameters $\varkappa$, $r = F(\varkappa)$. Es sei nun von dem Falle abgesehen, daß $r = \text{const.}$ ist; derselbe führt zu einem der Beispiele I

Fig. 9.




1) Auf die durch dieses Beispiel veranschaulichte allgemeine Aufgabe, wie bei gegebenen Kurven $k_a$, $k_b$ und $l_b$ die vollständige Enveloppe aller Lagen von $l_b$ im System $\Sigma_a$ zu bestimmen sei, wollen wir nicht näher eingehen.

und II, die im vorigen Paragraphen bereits erledigt sind. Man kann dann stets die inverse Funktion $\varkappa = f(r)$ bilden.

Für die gesuchte Hilfspolbahn $h$, deren Existenz wir einstweilen voraussetzen wollen, führen wir Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ in ihrem System $\Sigma_h$ ein, wobei in der Anfangslage der Nullpunkt mit $L_0$ und die positive Richtung der Polarachse mit $L_0 P_0$ zusammenfallen möge, sodaß in der zu bestimmenden Gleichung $\varphi = \varphi(r)$ der Hilfspolbahn die Größe $r$ die frühere Bedeutung daneben behält. Da nun die Bogenlänge $s$ der Hilfspolbahn zwischen den Radienvektoren $r_0$, $r$ gleich dem Bogen $\varkappa = P_0 P$ sein soll, so gilt für die Hilfspolbahn die Gleichung $s = f(r)$. Aus ihr und $\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$ folgt:

$$f'(r) = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\sqrt{(f'(r))^2 - 1},$$

d. h.

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}\sqrt{(f'(r))^2 - 1}\, dr. \tag{1}$$

Da $f'(r)$ bekannt oder doch im einzelnen Falle berechnet werden kann, so ist durch dieses bestimmte Integral die gesuchte Gleichung der Hilfspolbahn in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ gegeben.[1]

Wir haben jetzt jedoch noch den *Beweis* nachzuholen, daß die durch diese Gl. bestimmte Kurve $h$ in der Tat die gewünschte Bedingung erfüllt, d. h. daß bei ihrer Abrollung auf $k$ von der Anfangslage aus der Nullpunkt ihres Systems $\Sigma_h$ von $L_0$ aus den Profilkurvenbogen $l$ beschreibt. Dies folgt aber sofort aus folgender geometrischen Überlegung: Die vom Nullpunkt des Systems $\Sigma_h$ hierbei beschriebene Bahnkurve stellt ersichtlich die Enveloppe der um die einzelnen Punkte

---

1) Die Gleichung (1) scheint mir bisher nicht aufgestellt zu sein. Ich möchte jedoch auf eine Arbeit des 18jährigen J. Cl. Maxwell hinweisen: The Theory of Rolling Curves (1849), Transactions of the Royal Society of Edinburgh Vol. XVI, Part V, oder Scientific Papers Vol. I, S. 4—29. Dort stellt Maxwell in Anlehnung an Euler andere Gleichungen auf, welche die drei Kurven, die Polkurve, die Hilfspolkurve und die Profilkurve (the Fixed curve, the Rolled curve, the Traced curve) mit einander verknüpfen. Eigenartig ist der Maxwellschen Arbeit, was auch besonderes Interesse erweckt, die Behandlung einer großen Zahl einzelner Fälle und spezieller Beispiele. In der Einleitung wird auch auf die ältere Literatur hingewiesen, deren Autoren Varignon (1704), de la Hire (1706), Nicole (1707) (in „the History of the Royal Academy of Sciences"), Willis (Principles of Mechanism, 1841) sind.

$P$ mit der zugehörigen Strecke $r$ beschriebenen Kreise dar, muß daher mit der Profilkurve $l$ identisch sein, da für diese das Gleiche gilt. —

Bei der Untersuchung, wie weit der Punkt $L$ auf dem gegebenen Bogen $l$ wandern kann, ohne daß das Integral seine Bedeutung verliert, müssen wir zunächst an die Beschränkung erinnern, daß die Normale in $L$ natürlich stets den Polkreis $k$ reell schneiden muß. Wir wollen jedoch noch die Frage diskutieren, die uns zu interessanten, später zur Anwendung kommenden Resultaten führt, *wann bei Fortsetzung des Integrals längs eines nicht ins Unendliche sich erstreckenden Bogens $l$, ohne daß wir hierbei einen singulären Punkt des Bogens überschreiten oder erreichen, dasselbe* **unendlich** *wird.*[1]) Dies ist nur möglich, wenn der Integrand $\frac{1}{r}\cdot\sqrt{(f'(r))^2-1}$ von erster oder höherer Ordnung in bezug auf $dr$ unendlich wird. Der Punkt $L$ von $l$, für den solches, wie wir annehmen wollen, eintritt, sei jetzt der Einfachheit halber geradezu als der Punkt $L_0$ mit den Koordinaten $x_0$, $y_0$ gewählt. Da, wenn $L$ bis nach $L_0$ sich bewegt, mit $dl$ auch $ds = dx$ und $dr$ gegen 0 *konvergieren,* d. h. unendlich klein von positiver Ordnung in bezug auf $dl$ werden — der Fall $r = \text{const.}$ ist ja ausgeschlossen — so ist $\frac{ds}{dr} = f'(r)$ für $r = r_0$ endlich oder unendlich von einer Ordnung, die kleiner als 1 in bezug auf $dr$ ist. Es bleibt daher nur der Fall zu behandeln, daß $r_0 = 0$ ist, also $L_0$ mit $P_0$ zusammenfällt, was in der Folge angenommen sei.

Der Polkreis $k$ sei nun durch die Gleichungen gegeben:

$$(2)\qquad \left|\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi_0'\cdot x + \frac{\xi_0''}{2}\cdot x^2 + \cdots, \\ \eta &= \eta_0 + \eta_0'\cdot x + \frac{\eta_0''}{2}\cdot x^2 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

---

1) Jede Singularität auf dem in Betracht kommenden Bogen $l$ soll also ausgeschlossen sein; auch $r$ ist nach der Festsetzung stets als endlich anzusehen. Hiermit sind also auch solche an sich interessante Fälle ausgeschlossen, wie sie durch die folgenden 3 Beispiele illustriert seien, bei deren Beschreibung wir der Einfachheit halber gleich von der Hilfspolbahn ausgehen wollen: Die Hilfspolbahn sei in Polarkoordinaten durch die Gleichung 1) $\varphi = \frac{C}{r}$ (hyperbolische Spirale) oder 2) $\varphi = \frac{C}{r - r_1}$ oder 3) $\varphi = \frac{C}{r_1 - r}$ gegeben, wo $C$ und $r_1$ positive Konstanten seien. Der beschreibende Punkt sei im ersten Falle der asymptotische Punkt, in den beiden andern der Mittelpunkt des asymptotischen Kreises $r = r_1$. Im ersten Falle ist die Profilkurve $l$ eine sich asymptotisch um den Polkreis $k$ $\infty$ oft windende Kurve, mag die Hilfspolbahn den Kreis $k$ „innerlich" oder „äußerlich" berühren; ähnlich in den beiden andern Fällen, wobei im letzteren bei innerlicher Berührung des Kreises $k$ zu unterscheiden ist, ob $r_1 \gtreqless$ als der Radius von $k$ ist. In allen diesen Fällen wird bei entsprechender Fortsetzung des Integrals $f'(r) = \infty$, ev. noch $r = 0$.

wo $(\xi_0, \eta_0)$ die Koordinaten des dem Punkte $L_0$ entsprechenden Punktes $P_0$ von $k$ und der Parameter $\varkappa$ gleich dem Bogen $\widehat{P_0 P}$ ist. Ebenso sei die Kurve $l$, auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bezogen, gegeben durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad \left| \begin{array}{l} x = x_0 + x_0' \cdot \lambda + \frac{x_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots, \\ y = y_0 + y_0' \cdot \lambda + \frac{y_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots, \end{array} \right.$$

wo der Parameter $\lambda$ ebenfalls den Bogen $\widehat{L_0 L}$ bezeichnen möge. Da $L_0$ kein singulärer Punkt der Kurve ist, so können $x_0'$ und $y_0'$ nicht gleichzeitig verschwinden, was ebenso auch für $\xi_0'$ und $\eta_0'$ gilt.[1])

Es sei die, positiven Werten von $\lambda$ entsprechende Richtung der Tangente in $L_0$ als die positive bezeichnet und diejenige Richtung der Normalen in $L_0$ als die positive, welche zu der positiven Richtung der Tangente liegt wie die positive $y$-Achse zur positiven $x$-Achse. Ist dann mit $\alpha$ der Winkel der positiven Richtung der Normalen in $L$ gegen die positive $x$-Achse bezeichnet, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{dx}{d\lambda},$$

$$\cos\alpha = -\frac{dy}{d\lambda}.$$

Es folgt dann nach (3):

$$(4)\qquad \left| \begin{array}{l} \sin\alpha = x_0' + x_0'' \cdot \lambda + \cdots, \\ \cos\alpha = -y_0' - y_0'' \cdot \lambda - \cdots \end{array} \right.$$

Die Normale im Punkte $L(xy)$, deren Punkte durch die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ bezeichnet seien, ist dann durch die Gleichungen mit dem Parameter $r$ gegeben:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{x} = x + \cos\alpha \cdot r, \\ \bar{y} = y + \sin\alpha \cdot r. \end{array} \right.$$

Soll die Normale den Kreis $k$ im Punkte $P$ mit dem Parameter $\varkappa$ schneiden, so gewinnen wir folgende beiden Gleichungen zur Festlegung zusammengehörender Parameterwerte $\varkappa$, $\lambda$, $r$:

$$(5)\qquad \left| \begin{array}{l} (\xi_0 + \xi_0' \cdot \varkappa + \frac{\xi_0''}{2} \cdot \varkappa^2 + \cdots) = (x_0 + x_0' \cdot \lambda + \frac{x_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots) - (y_0' + y_0'' \cdot \lambda + \cdots) \cdot r, \\ (\eta_0 + \eta_0' \cdot \varkappa + \frac{\eta_0''}{2} \cdot \varkappa^2 + \cdots) = (y_0 + y_0' \cdot \lambda + \frac{y_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots) + (x_0' + x_0'' \cdot \lambda + \cdots) \cdot r, \end{array} \right.$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(6)\qquad \left| \begin{array}{l} \xi_0 = x_0, \\ \eta_0 = y_0. \end{array} \right.$$

---

1) Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901, S. 20 ff. und 71.

Der Einfachheit halber sei jetzt das Koordinatensystem so gewählt, daß die positive Richtung der $y$-Achse mit der positiven Richtung der Normalen in $L_0$ identisch ist. Dann ist $x_0' = 1$, $y_0' = 0$, (ferner noch $x_0'' = 0$, da $\alpha = 90^0$ für $\lambda = 0$, also in der Entwicklung für $\sin \alpha$ das Glied erster Ordnung in bezug auf $\lambda$ fehlt).[1])

Da wir uns ferner auf beliebige Nähe von $L_0$ beschränken, so können wir an Stelle von $\varkappa$, $\lambda$, $r$ einführen $d\varkappa$, $d\lambda$, $dr$. Die Gleichungen (5) gehen dann über in:

$$(5') \quad \left| \begin{array}{l} (\xi_0' \, d\varkappa + \frac{\xi_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = (d\lambda + \frac{x_0'''}{6} d\lambda^3 + \cdots) - (y_0'' d\lambda + \cdots) dr, \\ (\eta_0' \, d\varkappa + \frac{\eta_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = \left(\frac{y_0''}{2} d\lambda^2 + \cdots\right) + (1 + \frac{x_0'''}{2} d\lambda^2 + \cdots) dr, \end{array} \right.$$

oder bei Vernachlässigung höherer Glieder:

$$(5'') \quad \left| \begin{array}{l} (\xi_0' d\varkappa + \frac{\xi_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = d\lambda, \\ (\eta_0' \, d\varkappa + \frac{\eta_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = dr + \left(\frac{y_0''}{2} d\lambda^2 + \cdots\right). \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$f'(0) = \lim_{r - r_0 = 0} \left(\frac{d\varkappa}{dr}\right) = \frac{1}{\eta_0'} = \frac{1}{\pm \sin \vartheta},$$

wo $\vartheta$ der spitze Winkel der Tangenten von $k$ und $l$ im Punkte $L_0$ sei, d. h.

(13) *$f'(0)$ bedeutet (abgesehen vom Vorzeichen) das Reziproke vom Sinus des spitzen Winkels $\vartheta$, unter dem sich die Kurven $k$, $l$ im Punkte $L_0$ schneiden.*

Wir unterscheiden nun die drei Fälle:

1) $f'(0)$ ist von 1 und $\infty$ verschieden, 2) $f'(0) = 1$, 3) $f'(0) = \infty$.

Der *erste Fall* führt sogleich zu folgendem Ergebnis:

*Falls die Kurven $k$, $l$ weder sich unter einem rechten Winkel im Punkte $L_0$ schneiden noch sich dort berühren, wird der Integrand der Formel* (1), *S.* 13, *für* $\lim r - r_0 = 0$ *von der ersten Ordnung unendlich groß in bezug auf $dr$, das Integral selbst wird daher bei Annäherung an die Stelle $L_0$ logarithmisch unendlich,* oder mit anderen Worten:

(14) *Schneidet die Profilkurve $l$ den Polkreis $k$ unter einem von $0^0$ und $90^0$ verschiedenen Winkel, so hat die Hilfspolbahn entsprechend einen logarithmischen Asymptotenpunkt.*

Wir werden später den Satz (14) noch an einem bestimmten Beispiel näher studieren (vgl. S. 26); jetzt wollen wir nur noch be-

1) Vgl. Scheffers, l. c. S. 5, Satz 1.

merken, daß die Bogenlänge der Hilfspolbahn von einem endlichen Punkte $L$ bis zum Asymptotenpunkte gleichwohl *endlich* bleibt, wie es von der logarithmischen Spirale $\varphi = C \cdot \lg r$ selbst wohlbekannt ist.

Im *zweiten Falle* $f'(0) = 1$, d. h. wenn $\eta_0' = 1$ ist, wird der Integrand der Formel (1) für $\lim r = 0$ von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich klein oder endlich, sodaß auch das Integral bei Annäherung an die Stelle $L_0$ endlich bleibt, d. h.

(15) *Schneidet die Profilkurve $l$ (in einem nicht singulären Punkte) den Polkreis unter rechtem Winkel, so besitzt die Hilfspolbahn entsprechend keine asymptotische Singularität.*

Veranschaulicht wird dieser Fall durch das Beispiel III, S. 10 (Fig. 7) in dem Momente, wo der Punkt $L$ den Polkreis $k$ erreicht.

Im *dritten Falle* $f'(0) = \infty$, d. h. wenn $\eta_0' = 0$, also $\xi_0' = 1$ ist, ist nach der ersten der Gleichungen (5″) in erster Annäherung $d\lambda = d\varkappa$, nach der zweiten dieser Gleichungen demnach $dr = C \cdot d\varkappa^m$, wo $C$ eine von 0 verschiedene Konstante und $m$ eine positive ganze Zahl ist, die $\geqq 2$ ist. Folglich wird $\frac{d\varkappa}{dr} = f'(r)$ für $\lim r = 0$ unendlich groß von der Ordnung $1 - \frac{1}{m}$ in bezug auf $dr$.

Der Integrand wird demgemäß für $r = 0$ unendlich groß von der Ordnung $2 - \frac{1}{m}$ in bezug auf $dr$ und das Integral selbst unendlich groß wie $\frac{1}{r^{1-\frac{1}{m}}}$, sodaß die Hilfspolbahn in der Nähe des $L_0$ entsprechenden Punktes in erster Annäherung durch $\varphi = \frac{c}{r^{1-\frac{1}{m}}}$ dargestellt wird, wo $c$ eine nicht verschwindende Konstante bezeichnet.

(16) *Berührt also die Profilkurve $l$ (in einem nicht singulären Punkte) den Polkreis $k$, so hat zwar die entsprechende Hilfspolbahn einen algebraischen asymptotischen Punkt, doch bis zu ihm eine endliche Bogenlänge, von einem endlichen Punkte an gerechnet.*

Um ein *Beispiel für diesen dritten Fall* zu erhalten, sei zu dem Kreise $k$ mit dem Radius $b$ seine Tangente im Punkte $L_0$ als Profilkurve $l$ gegeben. Zur Anwendung der Formel (1) S. 13 sei jetzt indes die äußerste Normale von $l$, welche den Kreis $k$ noch reell trifft, als die bei der Ableitung der genannten Formel benutzte Anfangslage der Polarachse gewählt und hier mit $\overrightarrow{L_* P_*}$ (anstatt $\overrightarrow{L_0 P_0}$, wie S. 12) bezeichnet. Dementsprechend seien von $P_*$ und $L_*$ die Bogen $\varkappa$ und $\lambda$ gemessen. (Fig. 10.) Dann ist:

$$s = \varkappa = b \cdot \arcsin \frac{b - r}{b},$$

wo $r = LP$ die Länge der Normalen in einem beliebigen Punkte $L$ bis zum Kreise bezeichnet.

Es folgt:

$$f'(r) = \frac{ds}{dr} = -\frac{b}{\sqrt{b^2-(b-r)^2}}$$

und nach Formel (1):

$$\varphi = \int_b^{r<b} \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2}{b^2-(b-r)^2}-1}\,dr \quad \text{oder} \quad \varphi = \int_b^r \frac{b-r}{r}\frac{1}{\sqrt{2br-r^2}}\,dr.$$

Dies Integral läßt sich leicht auswerten und ergibt:

$$\varphi = \frac{r-\sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r} + \arcsin\frac{b-r}{b}, \tag{7}$$

wo für das betrachtete Intervall $0 \leqq r \leqq b$ die Wurzel positives Vorzeichen bekommt und die Ungleichungen $\frac{\pi}{2} \geqq \arcsin\frac{b-r}{b} \geqq 0$ gelten. In der Tat wird dem Satze (16) entsprechend für $\lim r = 0$ die Amplitude $\varphi$ unendlich groß von derselben Ordnung wie $\lim\limits_{r=0} \frac{-1}{r^{\frac{1}{2}}}$, während die Bogenlänge der Kurve vom Punkte $r = b$, $\varphi = 0$, bis zum Asymptotenpunkt $b\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Um die *vollständige* Gestalt der durch die Gleichung (7) definierten Kurve besser zu überblicken, führen wir das neue Polarkoordinatensystem $(r, \psi)$ ein, das durch die Transformation $\psi = \frac{\pi}{2} - 1 + \varphi$ aus dem früheren unter Beibehaltung des Poles hervorgeht. Die Gleichung (7) geht dabei über in:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r} + \arcsin\frac{b-r}{b} \tag{7'}$$

oder

$$\psi = \arccos\frac{r-b}{b} - \frac{\sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r}, \tag{7''}$$

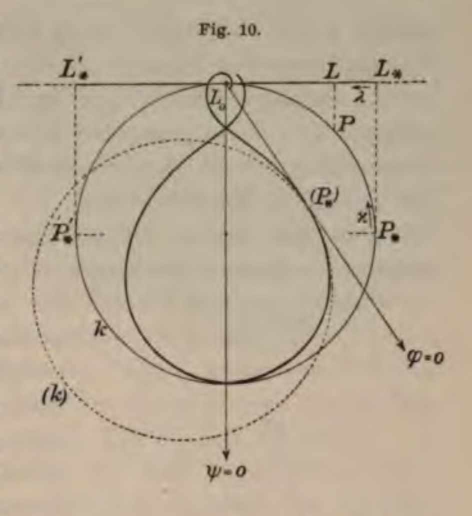
wo den Ungleichungen $0 \leqq r \leqq 2b$ entsprechend $\pi \geqq \arccos\frac{r-b}{b} \geqq 0$ gelten möge und die Vorzeichen der Wurzel und des ersten Gliedes stets die gleichen sind.[1])

Die vollständige Kurve ist symmetrisch zur neuen Polarachse und besitzt dementsprechend zwei asymptotische Punkte, ihre Gesamtlänge beträgt $2b\pi$. Wir haben es hier mit einem interessanten Beispiele einer „genauen Geradführung" zu tun, wie der folgende Satz näher erläutert:

1) Vgl. Maxwell, The Theory of Rolling Curves (1849), Scientific Papers I, S. 24, Exemple 3.

(17) *Rollt die durch die Gleichung (7″) dargestellte Kurve bei richtiger Berührung auf dem Kreise mit dem Radius $b$ ab (Fig. 10), so beschreiben ihre beiden zusammenfallenden Asymptotenpunkte ein Stück einer Tangente des Kreises, und zwar wird eine dem Durchmesser des Kreises gleiche Strecke doppelt beschrieben, wenn die Kurve vollständig von einem bis zum andern Asymptotenpunkte abrollt. In dem Momente, wo $P_*$ oder der gegenüberliegende Punkt $P'_*$ des Kreises (Fig. 10) der Berührungspunkt ist, ist der Kreis selbst Krümmungskreis der Kurve.*[1])

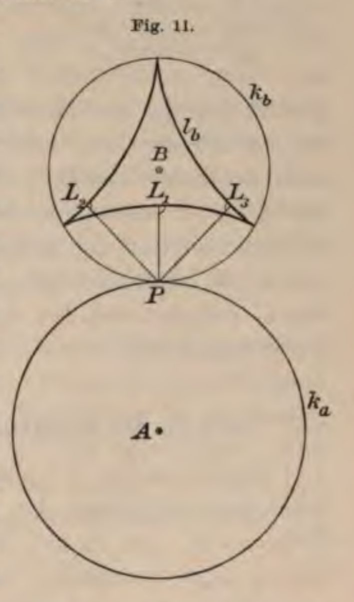
Fig. 10.




## § 6. Beispiel einer Profilkurve und der vollständigen Enveloppe ihrer Lagen im anderen System, Modell 6.

Die geschilderten allgemeinen Verhältnisse zu veranschaulichen soll nun zunächst das Modell 6 (siehe Tafel II) berufen sein, für das die *zweite Bewegungsart* (vgl. S. 5) gewählt ist. In dem einen System, $\Sigma_b$, sehen wir dieselbe *Steinersche Hypozykloide* gezeichnet, der wir bereits im Modell 4 begegnet sind. Im System $\Sigma_a$ ist dann die *vollständige Enveloppe* aller ihrer Lagen bei Abrollung der Polkreise $k_a$ und $k_b$ auf einander dargestellt. Diese Enveloppe besteht einmal aus der vierspitzigen Epizykloide $d$, die auch im Modell 4 vorkommt, sodann noch aus 2 zweispitzigen Epizykloiden $e_1$, $e_2$ und aus einer vierspitzigen Epizykloide $i$ als gemeinsamer Bahnkurve der 3 Spitzen der Hypozykloide. Von einem beliebigen

Fig. 11.

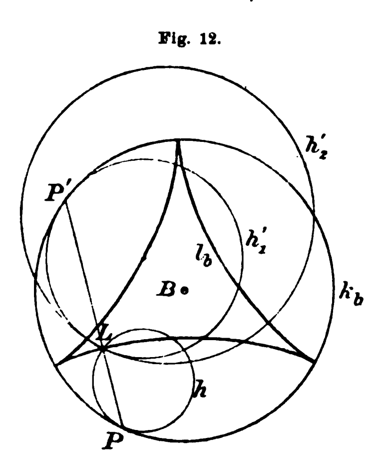



1) Auf die allgemeinere, ebenso einfach sich erledigende Aufgabe, alle Hilfspolbahnen zu bestimmen, deren jede mit einem fest mit ihr verbundenen Punkte bei Abrollung auf einem gegebenen Kreise eine geradlinige Strecke beschreibt, sei hier nur eben hingewiesen.

Punkte $P$ der Polbahn $k_b$ lassen sich nämlich, abgesehen von den Verbindungslinien des Punktes mit den Spitzen, stets drei reelle Normalen auf die Hypozykloide fällen (Fig. 11), den drei Berührungsstellen derselben mit den drei genannten Epizykloiden $d$, $e_1$, $e_2$ für den Moment entsprechend, wenn der ausgewählte Punkt $P$ der Berührungspunkt von $k_a$ und $k_b$ geworden ist.

Von den beiden Hilfspolbahnen, die sich zu der Hypozykloide konstruieren lassen, ist die eine, $h$, der Kreis, der auch im Modell 4 als solche benutzt ist (Fig. 12). Die andere vollständige Hilfspolbahn $h'$, ist zerfallen und besteht aus einem Kreis $h_1'$, dessen Radius gleich $\frac{2}{3}$ von dem des Polkreises $k_b$ ist, und einem $h_1'$ in dem beschreibenden Punkte $L$ berührenden Kreise $h_2'$ mit gleichem Radius wie der Polkreis $k_b$ (Fig. 12).[1] (In dieser Hinsicht ist es interessant, die Fälle zu vergleichen, von denen der vorliegende den Übergang darstellt, wo nämlich an Stelle der Hypozykloide eine entsprechende verschlungene oder gestreckte Hypotrochoide tritt, wie deren erste ebenfalls das Modell 4 zeigt, und den Grenzübergang zu unserm Falle zu studieren, der insbesondere das erwähnte Zerfallen der zweiten Hilfspolbahn $h'$ noch deutlicher macht.) Den drei reellen Normalen vom augenblicklichen Pol $P$ aus entsprechend (Fig. 11) sind in jedem Moment relativ zu den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ eine Lage der Hilfspolbahn $h$ und zwei von $h'$ zu berücksichtigen, also wieder abgesehen von den drei Lagen von $h'$ entsprechend den drei Verbindungslinien von $P$ mit den *Spitzen* der Hypozykloide.

Fig. 12.




## § 7. Methode der Äquidistanten, Triebstockverzahnung, Modelle 7 u. 8.

Gegeben seien wie im entsprechenden *Modell 7* (siehe Tafel II) unter Zugrundelegung der *zweiten* Bewegungsart (vgl. S. 5) die beiden Polkreise $k_a$ und $k_b$ mit dem Radienverhältnis $2:1$, ein Punkt $D$ im System $\Sigma_b$, der speziell auf der Peripherie von $k_b$ gewählt ist, und seine Bahnkurve $d_a$ im System $\Sigma_a$ bei Abrollung der Polkreise, eine

---

1) Die Hilfspolbahnen $h$ und $h_1'$ entsprechen der doppelten Erzeugung der Hypozykloide als solche mit freiem oder mit bedecktem Zentrum, vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 44, 1899, S. 221. (Sonder-Abdr. S. 9.)

Epizykloide mit den zwei Spitzen $D'$ und $D''$. Zum Punkte $D$, der eben als Grenze eines Kreises mit unendlich kleinem Radius aufgefaßt werden kann, ist die *äquidistante Kurve*, der Kreis $l$, gezeichnet. Diese wird dann in allen ihren Lagen umhüllt von einer in die Kurvenzüge $i_1$ und $i_2$ sich zerlegenden Kurve, die, wie leicht zu übersehen ist, ihrerseits die Äquidistante der Epizykloide $d_\alpha$ bildet. Die Kurvenzüge $i_1$ und $i_2$ sind unter sich kongruent, nur gegen einander um 180° gedreht, und haben je 2 Spitzen, die sie in einen kleineren und einen größeren Bogen zerlegen. Zu der *vollständigen Äquidistante* der Epizykloide $d_a$ oder der *vollständigen Enveloppe* aller Lagen von $l$ gehören überdies noch die beiden mit $l$ kongruenten Kreise $l'$, $l''$ um die Punkte $D'$ und $D''$. Jeder dieser Kreise berührt die Kurvenzüge $i_1$ und $i_2$ in den Endpunkten $E_1'$, $E_2'$ und $E_1''$, $E_2''$ der $k_a$ tangierenden Durchmesser von $l'$ und $l''$ und stellt zugleich die Krümmungskreise der Kurvenzüge in diesen Punkten dar (vgl. Satz 6, S. 6). Diese letzte Eigenschaft ersieht man am einfachsten daraus, daß ja die Epizykloide $d_a$ und ihre Aquidistanten $i_1$, $i_2$ Evolventen derselben Evolute sind. Diese Evolute ist eine zu $d_a$ ähnliche Epizykloide $d^*$, deren Scheitel in den Spitzen von $d_a$ liegen.[1]) Sie ist auch im Modell 7 eingezeichnet. Auf dieser innerhalb $k_a$ liegenden Evolute $d^*$ liegen daher auch die Spitzen der Kurvenzüge $i_1$ und $i_2$[2]), sodaß z. B. der Bogen der Evolute $d^*$ von $D'$ bis zu der benachbarten Spitze von $i_1$ oder $i_2$ gleich dem Radius von $l$ ist. Diese Tatsache gestattet analog auch leicht die Fälle zu übersehen, daß etwa der Radius des Kreises $l$ im Gegensatz zu der Annahme des Modelles, gleich oder größer als der Bogen der Evolute $d^*$ von $D'$ bis zu einer ihrer Spitzen (d. h. als der vierte Teil der gesamten Bogenlänge von $d^*$) gewählt ist, wobei dann die Äquidistanten $i_1$, $i_2$ *keine* Spitzen mehr besitzen.

Schließlich ist noch in dem durch eine Glasscheibe dargestellten Systeme $\Sigma$ die Eingriffskurve $e$ gezeichnet; sie stellt eine verschlungene Pascalsche Schnecke dar (vgl. S. 2). Ihre Entstehung ist am besten bei Annahme der *ersten* Bewegungsart (vgl. S. 5) zu überblicken. Man erhält ja die momentanen Berührungspunkte $K_1$, $K_2$ des Kreises $l$ und der Äquidistanten $i_1$, $i_2$ (siehe die Abbildung des Modells 7, Tafel II),

1) Die Evolute einer gespitzten Trochoide ist eine ähnliche gespitzte Trochoide, deren Scheitel in den Spitzen der ersteren liegen, vgl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 159.

2) Die Spitzen von $i_1$, $i_2$ gehen daher mit anderen Worten aus solchen Punkten der Äquidistanten $d_a$ hervor, deren Krümmungsradien gleich dem Radius des Kreises $l$ sind.

wenn man auf der Verbindungslinie des Poles $P$ mit $D$ von letzterem Punkte aus den Radius von $l$ beiderseits abträgt (vgl. Satz 3, S. 3).

(17) *Je nachdem der Radius von $l$ größer, gleich oder kleiner als der Durchmesser von $k_b$ ist, wird die Eingriffskurve $e$ demnach eine gestreckte, gespitzte oder verschlungene Pascalsche Kurve.*

Die *allgemeinen* Verhältnisse der „*Methode der Äquidistanten*“ indes, von dem unser Modell einen speziellen Fall zur Anschauung bringt, seien durch folgenden Satz angedeutet:

(18) *Sind $d_a$ und $d_b$ zwei zu einander gehörende Profilkurven, so gilt gleiches auch von ihren entsprechenden Äquidistanten.*

Das Spezielle unseres Beispieles beruht eben darin, daß die eine Profilkurve, $d_b$, in den Punkt $D$ zusammengezogen ist.

Das *Modell 8* zeigt nun die Verwendung der geschilderten Methode bei der *Triebstockverzahnung.*[1] Die Polkreise des Modelles sind dieselben wie vorhin. Die Zähne des einen Rades bestehen aus Zapfen (Triebstöcken) mit kreisförmigem Querschnitt, dem Kreise $l$ des vorigen Modelles entsprechend. Die Begrenzung jedes Zahnes des anderen Rades (Zahnflanke) wird, soweit sie wesentlich ist, von Bogen der dem Kreise $l$ entsprechenden Profilkurve $i_1$, $i_2$ gebildet, die eben nach dem Vorstehenden die Äquidistanten der Bahnkurve $d_a$ des Zapfenmittelpunktes sind.[2]

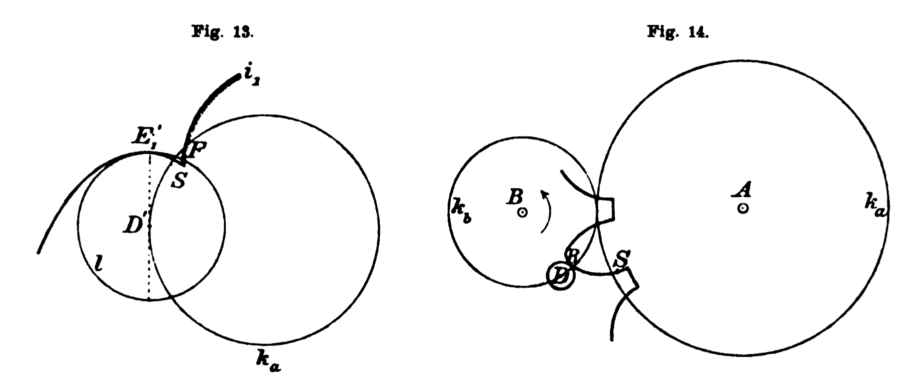
Wir sehen in dem Modell ferner wieder die Eingriffskurve $e$ (blau) des Systems $\Sigma$ eingezeichnet, eine aus zwei fast gleich großen Schleifen bestehende Pascalsche Kurve.

Doch eine wichtige Bemerkung ist hier noch zu machen, derentwegen wir der Deutlichkeit halber auf das vorige Modell zurückgreifen. Der als Zahnbegrenzung zu benutzende, an eine Spitze $S$ angrenzende Bogen des Äquidistantenzweiges $i_1$ muß, wie leicht zu erkennen ist, dem kleineren der von seinen Spitzen begrenzten Teile entnommen werden. Nun dringt dieser Bogen jedoch, wie ein solcher in der Figur 13 durch Schraffierung hervorgehoben ist, wo der Deutlichkeit wegen überdies der Querschnittskreis $l$ des Zapfens wieder größer als im Modell 8 gewählt ist, während der Bewegung in das Innere des Kreises $l$ hinein, am meisten, wenn letzterer sich mit seinem Mittel-

[1] Vgl. z. B. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 233.

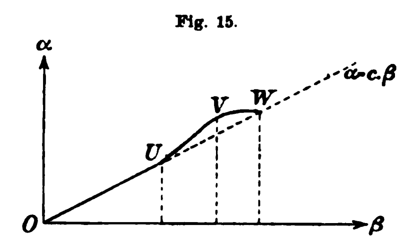
[2] Die Triebstockverzahnung wird zur *Punktverzahnung* (vgl. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 232), wenn der kreisförmige Querschnitt jedes Zahnes des einen Rades sich auf seinen Mittelpunkt $D$ zusammenzieht, der dann technisch durch eine Ecke oder Spitze an dem Rade ausgebildet wird. Diese Punkte [illegible] allein die wesentliche Zahnbegrenzung, während jeder Zahn des andern [illegible] vom Bogen der Bahnkurve $d_a$ begrenzt wird.

punkt im Punkte $D'$ befindet (d. h. wenn $l$ Krümmungskreis im Punkte $E_1'$ ist) und würde folglich, streng theoretisch genommen, nicht




bis zur Spitze $S$ als Zahnbegrenzung benutzt werden können, sondern nur soweit er außerhalb des um $D'$ beschriebenen Kreises $l$ verläuft, d. h. in der Figur 13 bis zum Punkte $F$.[1])

Doch um diese Verhältnisse genau zu übersehen, wollen wir untersuchen, was geschieht, wenn trotzdem der Bogen $i_1$ bis zur Spitze $S$ zur wesentlichen Zahnbegrenzung[2]) benutzt wird. Es ist bequem, zu diesem Zwecke für einen Augenblick das Rad im System $\Sigma_b$ oder das Rad $\Sigma_b$, wie wir kurz sagen wollen, als das treibende[3]) anzusehen, und zwar möge es sich entgegengesetzt dem Drehungssinne des Uhrzeigers drehen. Wir verfolgen nun successive den Eingriff eines Triebstockes mit dem Mittelpunkt $D$ in einen Zahn des Rades $\Sigma_a$. Dieser Eingriff beginnt mit der Berührung beider im äußersten Berührungspunkte $R$ der Zahnflanke von $\Sigma_a$. Von dieser Anfangslage der ersten Berührung aus wollen wir die Drehungswinkel $\alpha$ und $\beta$ der Systeme $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ rechnen, wobei $\alpha$ allemal als Funktion von $\beta$ bestimmt ist. Bei der weiteren Drehung des Rades $\Sigma_b$ wandert dann der Berührungspunkt auf der Zahnflanke von $\Sigma_a$ bis zum Punkte $S$, der Spitze des Bogens $i_1$, wobei das Verhältnis $\alpha : \beta$ gleich der Konstanten $c$ (in unserem Beispiel




1) Vgl. z. B. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 186.

2) Die unwesentliche Zahnbegrenzung denken wir natürlich so gewählt, daß sie wirklich unwesentlich ist, d. h. die Bewegung nicht beeinflußt. Vgl. Anm. 1, S. 25.

3) Im Modell 8 ist dagegen das Rad $\Sigma_a$ als das treibende konstruiert.

gleich $1/2$) ist, wie es sein soll.[1]) Es seien die Größen $\alpha$, $\beta$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet, und die Funktion $\alpha = c \cdot \beta$ sei der bisher betrachteten Drehung entsprechend durch die Strecke $OU$ veranschaulicht (Fig. 15).

Um die weitere Bewegung zu verfolgen, könnte man annehmen, daß diese zunächst nach dem Gesetz $\alpha = c \cdot \beta$ sich fortsetzte. Doch dann würde der Zahn des Rades $\Sigma_a$ mit der Stelle $S$ in den Triebstock des Rades $\Sigma_b$ eindringen. In jedem Moment wird daher das Rad $\Sigma_a$ sich noch um einen solchen kleinen Winkel $\varepsilon$ über den Winkel $c \cdot \beta$ hinaus gedreht haben, daß der Punkt $S$ wieder auf der Peripherie des Triebstockes liegt. Der Winkel $\varepsilon$ ist natürlich ebenfalls eine Funktion von $\beta$, die von 0 zunächst bis zu einem größten dann erreichten Werte wächst, wenn der Mittelpunkt des Triebstockes auf dem Kreise $k_a$ (oder der momentane Pol im Punkte $D'$) liegt (Fig. 13), um darauf wieder bis zum Werte 0 abzunehmen. Von diesem Zeitpunkte an tritt der Eingriff des nächsten Triebstockes mit dem nächsten Zahne in sein Recht. Die Funktion $\alpha = c \cdot \beta + \varepsilon$ sei schematisch durch den Bogen $UVW$ der Fig. 15 veranschaulicht, wo $V$ dem Maximum von $\varepsilon$ entspricht und $W$ auf der Verlängerung von $OU$ liegt. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_a : \omega_b$, das durch die Richtungskoeffizienten der Tangenten der Kurve $UVW$ gegeben wird, bleibt also nicht konstant gleich $c$, wie vorhin, sondern ist zunächst größer als $c$, dem Punkte $V$ entsprechend gleich $c$, und dann kleiner als $c$. Da also in der Tat die Bewegung streng genommen nicht mehr nach dem vorangestellten Gesetze $\omega_a : \omega_b = c$ erfolgt, dürfte, wie wir bereits sagten, der Bogen $i_1$ nicht bis zur Spitze zur Zahnbegrenzung des Rades $\Sigma_a$ benutzt werden. Nun erweist sich indeß in den praktischen Fällen, wo der Durchmesser der Triebstöcke doch verhältnismäßig klein gewählt wird, das Eindringen des Bogens $i_1$ mit der Spitze $S$ in den um $D'$ beschriebenen Kreis $l$ so gering, daß es in der Zeichnung überhaupt nicht scharf dargestellt werden kann.[2]) (Im Modell 7, wo doch der Kreis $l$ weit größer gewählt ist als in praktischen Fällen, ist der besseren Deutlichkeit wegen dieses Eindringen etwas stärker gezeichnet, als es wirklich statthat; im Modell 8, wo der Durchmesser der 6 Triebstöcke des Rades $\Sigma_b$ gleich 6,5 mm gewählt wurde, ist, um dieses Eindringen zu

1) Der dem Berührungspunkte $S$ entsprechende momentane Pol ist von $D'$ (Fig. 13) noch angenähert um die Hälfte des Radius von $l$ entfernt.

2) Die streng rechnerische Behandlung dieser Frage dürfte ihre Schwierigkeit haben. Schon die Abnutzung der Räder würde übrigens zweifellos größere Veränderungen in der Konstanz von $\omega_a : \omega_b$ bewirken, als dieses Eindringen von $i_1$ in den Kreis $l$ um $D'$.

veranschaulichen, ebenfalls die Epizykloide $d^*$ hinzugezeichnet, auf der die Spitzen von $i_1$, $i_2$ liegen.)

*Es kann daher unbedenklich der Bogen $i_1$ bis zur Spitze S als Zahnflanke des Rades $\Sigma_a$ benutzt und dementsprechend, was für die praktische Konstruktion der Zahnräder wichtig ist, das durch den einzelnen Triebstock und seinen gegnerischen Zahn bewirkte Abrollen der Polkreise $k_a$ und $k_b$ wenigstens bis dahin gerechnet werden, daß der Mittelpunkt des Triebstockes momentaner Pol wird.* Nebenhin sei noch bemerkt, daß die unwesentliche Begrenzung der 12 Zähne des Systems $\Sigma_a$ teils von Bogen zum Polkreis $k_a$ konzentrischer Kreise, teils von Radien des Polkreises gebildet ist.[1])

## § 8. Methode der sekundären Polbahnen; Evolventenverzahnung; Modelle 9—11.

Im *Modell 9* erkennen wir unter Zugrundelegung der *ersten* Bewegungsart (vgl. S. 5) in den mit Glasscheiben versehenen Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ außer den Polkreisen $k_a$ und $k_b$ zwei zu ihnen konzentrische Kreise $k_a'$ und $k_b'$, die *„sekundären Polbahnen"*, mit demselben Radienverhältnis wie $k_a$ und $k_b$. Die durch Abrollung der Polbahnen $k_a$ und $k_b$ aufeinander bestimmte Bewegung der beiden Systeme wird jetzt dadurch hervorgerufen, daß eine technisch als Zahnstange ausgebildete Gerade $g$, die dann durch den Pol $P$ geht, auf den mit Zahnrädern versehenen sekundären Polbahnen ohne Gleitung abrollt. Ein auf $g$ beliebig gewählter Punkt $L$ beschreibt hierbei gleichzeitig in den Systemen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ zwei Kurven, $l_a$ und $l_b$, *gewöhnliche Evolventen der Kreise $k_a'$ und $k_b'$*, die in jedem Moment einander in $L$ berühren und daher entsprechende Profilkurven darstellen. Eine mit der Geraden $g$ sich deckende Gerade im System $\Sigma$ stellt zugleich die *Eingriffskurve* dar.

Die praktische Anwendung dieser Profilkurven bei der als *Evolventenverzahnung* bezeichneten Zahnräderkonstruktion ergibt sich nach Analogie der früheren Fälle von selbst.[2]) Wir sehen sie im *Modell 10* veranschaulicht. Bogen solcher Evolventenpaare in der Nähe ihrer Spitzen bilden wieder die wesentlichen Teile der Zahnflanken, während die Zähne sonst noch durch konzentrische Kreise und Radien begrenzt werden. Im System $\Sigma_a$ sind vier, im System $\Sigma_b$ drei solche Evolventenbogen gezeichnet; überdies ist auch hier im System $\Sigma$ die Eingriffskurve

---

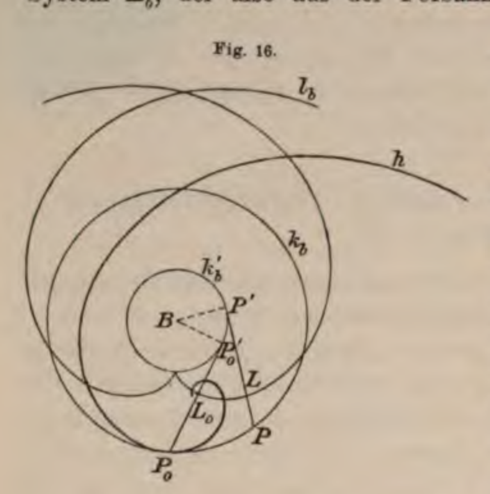
1) Diese von der Spitze $S$ ausgehende radiale Begrenzung würde streng genommen auch das konstante Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten stören, was praktisch jedoch wieder nicht in Betracht kommt.

2) Vgl. z. B. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 233 ff.

als Gerade $g_0$ hinzugefügt. Man pflegt, um technisch brauchbare Verhältnisse zu bekommen, den Winkel, unter dem die Zentrale $AB$ die Gerade $g_0$ schneidet, als $75^0$ zu wählen. In unserem Modell ist dieser Winkel indes kleiner als $75^0$ gewählt, da sonst die Verhältnisse bei dem kleinen Maßstabe nicht deutlich genug werden würden.

Wir beschränken uns im folgenden auf den Teil der Figur im System $\Sigma_b$, der also aus der Polbahn $k_b$, der sekundären Polbahn $k_b'$ und der Evolvente $l_b$ besteht. Nach Satz (11), S. 9 muß es nun auch eine Hilfspolbahn $h$ geben, sodaß durch deren Abrollung auf $k_b$ von einem mit ihr fest verbundenen Punkte $L$ ein vorgegebener Bogen der Profilkurve $l_b$ erzeugt wird. Da die Normalen von $l_b$ den Polkreis $k_b$ unter konstantem Winkel schneiden, so müssen die Hilfspolbahnen solche Kurven sein, welche ihre Radienvektoren nach dem Punkte $L$ ebenfalls unter konstantem Winkel schneiden (Fig. 16), d. h.

Fig. 16.




(19) *Jede Hilfspolbahn, welche durch ihre Abrollung auf dem Kreise $k_b$ einen Bogen der zum konzentrischen Kreise $k_b'$ gehörenden gewöhnlichen Evolvente erzeugt, ist eine logarithmische Spirale mit ihrem Asymptotenpunkt als dem die Evolvente beschreibenden Punkte.*[1])

Wir wollen dies Resultat auch analytisch ableiten anknüpfend an die Betrachtungen der Seite 13ff. Die Radien der Kreise $k_b$ und $k_b'$ seien mit $b$ und $b'$ bezeichnet. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen $r$, $r_0$, $s$ (S. 13) ist dann (Fig. 16):

$$P_0L_0 - PL = r_0 - r = LP' - L_0P_0' = \frac{b'}{b} \cdot s$$

oder

$$s = (r_0 - r) \cdot \frac{b}{b'} = f(r), \quad \text{d. h. } f'(r) = -\frac{b}{b'}.$$

Folglich ergibt sich nach Formel (1) S. 13

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1}\,\lg\frac{r}{r_0}$$

1) Vgl. Maxwell, The Theory of Rolling Curves, Scientific Papers I, S. 16, sowie Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 185.

oder

$$\varphi = \varepsilon \cdot \lg \frac{r}{r_0}, \quad \text{wo } \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1}$$

ist.

Da $\frac{b'}{b} = \cos \psi$ ist, unter $\psi$ den konstanten Winkel zwischen $PL$ und der Tangente in $P$ an den Kreis $k_b$ verstanden, so ist:

$$\varepsilon = -\operatorname{tg} \psi,$$

und es folgt als Resultat:

(20) *Die Gleichung der als Hilfspolbahn auftretenden logarithmischen Spirale ist:*

$\varphi = -\operatorname{tg} \psi \cdot \lg \frac{r}{r_0}$, *wo $\psi$ zugleich der Steigungswinkel der logarithmischen Spirale ist.*

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse bietet sich das *Modell 11* dar. Als Erweiterung des Modells 9 konstruiert zeigt es eine solche logarithmische Spirale $h$, welche gleichzeitig auf $k_a$ und $k_b$ abrollend mit ihrem Asymptotenpunkt zusammengehörende Bogen der Evolventen $l_a$ und $l_b$ beschreibt.

Da *die Bogenlänge $S$ der logarithmischen Spirale* von einem ihrer Punkte $(r, \varphi)$ bis zum Asymptotenpunkte *endlich* ist, nämlich $S = \frac{r}{\cos \psi}$, so kann die Hilfspolbahn *bis zum Asymptotenpunkt* ohne weiteres auf $k_a$ und $k_b$ abrollen. Der Punkt $L$ wird dann gerade nach den Schnittpunkten $T_a$ und $T_b$ von $l_a$, $l_b$ bezw. mit $k_a$, $k_b$ gelangt sein (Abbildung des Modelles 11 auf Tafel II). Da hierbei die logarithmische Spirale sich unendlich oft überschlagen muß, so kommt das Modell dem Augenblick der vollständigen Abrollung natürlich nur nahe, jedoch hinreichend nahe, um den weiteren Verlauf leicht überblicken zu lassen.

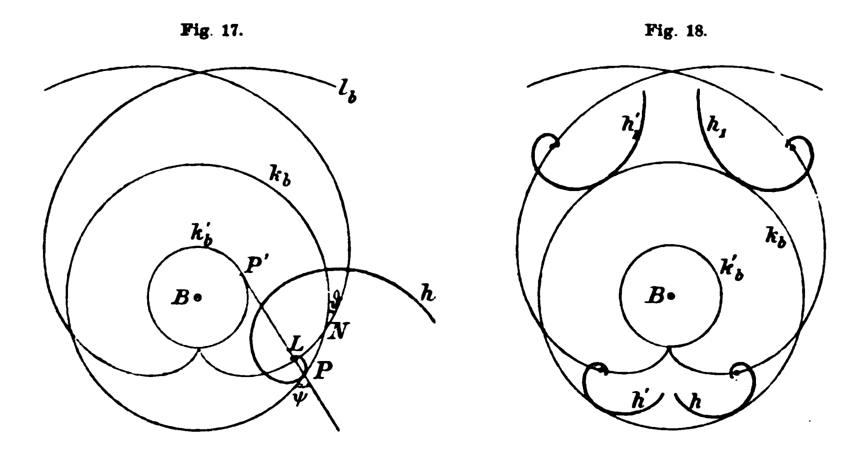
Ferner ist es interessant, am Modell zu beobachten, *wie die Spitze der Evolvente $l_b$ zustande kommt.* In der auf der Tafel II dargestellten Lage des Modelles 11 schneidet die logarithmische Spirale $h$ den Polkreis $k_b$ noch in dem Punkte Q. Dieser Punkt rückt bei einer solchen Abrollung von $h$ auf $k_b$, bei der $k_b$ sich entgegen dem Sinne des Uhrzeigers dreht, näher und näher an den momentanen Pol $P$ heran, bis er in dem Augenblick mit $P$ selbst zusammenfällt, wo der Asymptotenpunkt $L$ die Spitze von $l_b$ beschreibt. Der Beweis beruht auf dem Hilfssatze:

*Der Krümmungsmittelpunkt für einen beliebigen Punkt $P$ einer logarithmischen Spirale ist der Schnittpunkt der Normalen mit dem Lote im Asymptotenpunkt $L$ auf dem Radiusvektor $PL$.*

Wir können daher das Resultat wie folgt aussprechen:

(21) *Bei der Abrollung der logarithmischen Spirale $h$ auf dem Polkreise $k_b$ wird in dem Augenblicke vom Asymptotenpunkte $L$ die Spitze der Evolvente $l_b$ beschrieben, wenn der Polkreis der Krümmungskreis der logarithmischen Spirale in ihrem Berührungspunkte ist.*

Was nun den spitzen Winkel $\vartheta$ betrifft, unter dem die Evolvente $l_b$ den Polkreis $k_b$ im Punkte $N$ schneidet, so sei in Figur 17 die logarith-




mische Spirale $h$ in einem solchen Momente gezeichnet, wo ihr noch übriger Bogen $\widehat{PL}$ bis zum Asymptotenpunkt $L$ sehr klein ist, sodaß man sowohl den Bogen $LN$ wie $PN$ von $l_b$ und $k_b$ als geradlinig betrachten kann. Da nun nach obiger Formel $S = \frac{r}{\cos\psi}$ der Bogen $\widehat{PL} = PN = \frac{PL}{\cos\psi}$ ist, so folgt:

$$\sphericalangle PLN = 90^0, \quad \text{d. h.}$$

(22) *Der Winkel $\vartheta$, unter dem die Profilkurve $l_b$ den Polkreis $k_b$ schneidet, ist das Komplement zu dem Steigungswinkel $\psi$ der Spirale.*

Das gleiche Resultat folgt auch unmittelbar sowohl aus der geometrischen Eigenschaft, daß die Normale von $l_b$ in $N$ ebenfalls den Winkel $\psi$ mit $k_b$ bildet als aus dem allgemeinen Satze (13) S. 16, da $f'(0) = \pm\frac{1}{\sin\vartheta} = -\frac{b}{b'} = -\frac{1}{\cos\psi}$ ist. (Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch auf die beiden Grenzfälle hinweisen, daß $\psi = 0^0$ oder $90^0$ ist, d. h. nach der Formel $\cos\psi = \frac{b'}{b}$ der Hilfspolkreis $k_b'$ mit dem Polkreis $k_b$ zusammenfällt oder sich auf den Mittelpunkt von $k_b$ zusammenzieht und die logarithmische Spirale in eine Gerade bezw. einen Kreis

übergeht. In letzterem Falle wird aus der Evolvente $l_b$ ein zu $k_b$ konzentrischer Kreis.)

Was schließlich im allgemeinen Falle die Gesamtheit *aller* möglichen Hilfspolbahnen $h_i$ zur Erzeugung der einzelnen Bogen der Profilkurve $l_b$ betrifft, so erkennt man jetzt leicht:

(23) *Es lassen sich insgesamt vier verschiedene logarithmische Spiralen konstruieren (Fig. 18), von denen mit ihren Asymptotenpunkten zwei,* $h_1$ *und* $h_1'$, *je einen der beiden außerhalb* $k_b$ *gelegenen Bogen der Evolvente* $l_b$, *die anderen zwei,* $h$, $h'$ *je den allemal übrig bleibenden, die Spitze enthaltenden Bogen der Evolvente beschreiben.*

---

## Beitrag zur Kinetik ebener Getriebe.

Von OTTO MOHR in Dresden.

**19.** *Das Gesetz der Bewegung eines Getriebes.* Die folgende Mitteilung bildet eine Fortsetzung der Abhandlung über die Geometrie der Bewegung ebener Getriebe im 49sten Bande dieser Zeitschrift. Im Abschnitt **10** dieser Abhandlung wurde angegeben, wie die Beschleunigungen aller Teile eines Getriebes auf geometrischem Wege bestimmt werden, wenn für den betreffenden Zeitpunkt bekannt sind: der Lageplan, der Geschwindigkeitsplan und außerdem die Drehbeschleunigung *eines* Gliedes, das als das *geführte* Glied des Getriebes bezeichnet wurde. Die zuletzt genannte Größe ist in der Regel nicht gegeben, sondern sie ist aus den auf das Getriebe einwirkenden Kräften $K$ zu bestimmen. Das Prinzip d'Alemberts, das in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu diesem Zwecke benutzt werden kann, spricht aus, daß die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $K$ eben so groß ist wie die gleichzeitige Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte

$$V = mv',$$

die den Massenpunkten $m$ des Getriebes ihre Beschleunigungen $v'$ erteilen. Unter Arbeitsgeschwindigkeit einer Kraft $K$ versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und ihrer Schubgeschwindigkeit, d. h. der Projektion $v \cos(v, K)$ der Geschwindigkeit $v$ irgend eines Punktes der Kraftgeraden auf die Kraftrichtung. Das Vorzeichen der Arbeitsgeschwindigkeit wird durch den Kosinus des Winkels $(v, K)$ bestimmt. Jenem Prinzip zufolge ist also für jeden Zeitpunkt:

$$\sum K v \cos(v, K) = \sum V v \cos(v, V), \tag{63}$$

wenn diese Summen auf alle Kräfte $K$, $V$ ausgedehnt werden, die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten. Die Gleichung (63) enthält das Bewegungsgesetz eines jeden Getriebes.

**20.** *Die Zerlegung der Bewegung des Getriebes.* Um vermittels der Gleichung (63) die unbekannte Drehbeschleunigung des geführten Gliedes 1 berechnen zu können, wird es nötig, die hier betrachtete und mit I zu bezeichnende Bewegung des Getriebes nach den Regeln des Abschnittes 10 zu zerlegen in eine bekannte Bewegung II und eine unbekannte Bewegung III. Die Bewegung I wird bestimmt durch die gegebene Drehgeschwindigkeit $\omega_{11}$ des geführten Gliedes 1 und durch seine unbekannte Drehbeschleunigung $\omega'_{11}$. Diese Größen haben in den Bewegungen II und III die Werte:

$$\omega_{12} = \omega_{11}, \qquad \omega'_{12} = 0$$

und

$$\omega_{13} = 0, \qquad \omega'_{13} = \omega'_{11}.$$

Die beiden Bewegungen I und II haben sonach denselben Geschwindigkeitsplan, der ebenso wie der Beschleunigungsplan der Bewegung II nach Abschnitt 10 und 11 gebildet werden kann.

Für jeden Punkt des Getriebes ist die Beschleunigung $v'_1$ der Bewegung I die Resultante aus den Beschleunigungen $v'_2$ und $v'_3$ der beiden Bewegungen II und III. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $V$ ist also gleich der algebraischen Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der Kräfte $mv'_2$ und $mv'_3$. Bezeichnet man mit $v_1$ die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte in der Bewegung I, so nimmt Gleichung (63) hiernach die Form an:

$$\text{(64)} \qquad \sum m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2).$$

**21.** *Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $mv'_3$.* Die Bewegung III ist eine *Anfangsbewegung,* d. h. ihre Geschwindigkeiten sind gleich Null. Ihr Beschleunigungsplan ist daher geometrisch ähnlich dem Geschwindigkeitsplan der Bewegungen I, II. Für jeden Punkt des Getriebes hat die Beschleunigung $v'_3$ die Größe

$$v'_3 = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} v_1;$$

sie ist der Richtung und dem Sinne nach der Geschwindigkeit $v_1$ gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Größen $\omega_{11}$ und $\omega'_{11}$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen tragen. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $mv'_3$ hat folglich den algebraischen Wert:

$$\text{(65)} \qquad \sum m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} \sum m v_1^2.$$

Die Summe $\sum m v_1^2$ bezeichnet den doppelten Betrag der im ganzen Getriebe enthaltenen kinetischen Energie. Um ihn zu berechnen, bezeichnen wir für irgend ein Glied des Getriebes mit $\overline{m}$ die Gesamtmasse, $\omega_1$ die Drehgeschwindigkeit, $S$ den Schwerpunkt, $P$ den Geschwindigkeitspol des Lageplans, $i$ den Trägheitshalbmesser des Gliedes bezogen auf die normal zur Bildfläche gerichtete Schwerpunktsachse, $M$ einen Punkt des Gliedes von der Masse $m$, $z$ den Vektor $PM$ und $\overline{z}$ den Schwerpunktsvektor $PS$. Da

$$v_1 = z\,\omega_1$$

ist, so hat die Summe für das Glied den Wert

$$\sum m v_1^2 = \omega_1^2 \sum m z^2 = \overline{m}\,\omega_1^2 (i^2 + \overline{z}^2) = \overline{m}\,\omega^2 k^2,$$

wenn $k$ die Hypotenuse des durch die Katheten $i$ und $\overline{z}$ bestimmten rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet (Fig. 67). Dieser positive Wert ist für jedes Glied des Getriebes zu bestimmen, und darauf ist die Summe für alle Glieder zu bilden:

L. Fig. 67.



$$\sum m v_3' v_1 \cos(v_1, v_3') = \frac{\omega_{11}'}{\omega_{11}} \sum \overline{m}\,\omega_1^2 k^2. \tag{66}$$

**22.** *Die Zusammensetzung der Kräfte $m v_2'$.* Um die Kräfte $m v_2'$ für ein Glied des Getriebes zusammenzusetzen, bezeichnen wir mit $\omega_2'$ seine Drehbeschleunigung. Die Koordinaten $x$, $y$ eines Punktes $M$ (Fig. 68) werden auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt $S$ des Gliedes und dessen $x$-Achse auch dem Sinne nach mit der Strecke

$$SQ = q$$

zusammenfällt, die den Schwerpunkt $S$ mit dem Beschleunigungspol $Q$ des Gliedes verbindet. Wir erinnern daran, daß der Punkt $Q$ vermittels des Beschleunigungsplanes durch die Bedingung

L. Fig. 68.



$$QSM \approx Q''S''M''$$

bestimmt wird. Die $y$-Achse hat den durch die Gleichung

$$(y, x) = 90^0$$

bestimmten Sinn, und der Vektor $QM$ wird mit $z$ bezeichnet. Die Kraft $m v_2'$ des Punktes $M$ setzt sich nach Abschnitt 7 aus zwei Kom-

ponenten von den Größen $z m \omega_1^2$ und $z m \omega_2'$ zusammen. Die erstgenannte Kraft hat Richtung und Sinn der Strecke $MQ$, während die zweite in der Richtung und dem Sinne der Geraden $MN$ wirkt, die mit $MQ$ den Winkel $(MN, MQ)$ gleich $90^0$ oder gleich $270^0$ Grad einschließt, je nachdem $\omega_2'$ positiv oder negativ ist. Die Komponenten $m v_x'$ und $m v_y'$ der Kraft $m v_2'$ in den Richtungen der Koordinatenachsen haben daher die algebraischen Werte;

$$(67)\qquad \begin{cases} m v_x' = m\omega_1^2(q-x) + m\omega_2' y, \\ m v_y' = -m\omega_1^2 y \quad + m\omega_2'(q-x). \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Betrachtung machen wir hier die in der Regel erfüllte Voraussetzung, daß die Bildebene eine Symmetrieebene des Gliedes ist. Die für je zwei symmetrisch belegene Massenpunkte zusammengesetzten Kräfte $m v_2'$ liegen also alle in der Bildebene. Nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes sind die Summen $\sum mx$ und $\sum my$ gleich Null; folglich haben die Komponenten $V_x$, $V_y$ der Resultanten $V_2$ die Werte:

$$(68)\qquad \begin{cases} V_x = \sum m v_x' = \overline{m}\omega_1^2 q, \\ V_y = \sum m v_y' = \overline{m}\omega_2' q. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sprechen aus, daß die Resultante $V_2$ Richtung und Sinn der Schwerpunktsbeschleunigung $v_2'$ und die Größe

$$V_2 = \overline{m} v_2'$$

hat. Die *Lage* dieser Kraft bestimmt man durch die Abszisse

$$SA = x_2$$

ihres Schnittpunktes $A$ mit der $x$-Achse, und zwar vermittels der Momentengleichung in bezug auf den Schwerpunkt:

$$-x_2 V_y = -x_2\overline{m}\omega_2' q = \sum y m v_x' - \sum x m v_y' = \omega_2' \sum m(x^2+y^2) = \overline{m}\omega_2' i^2$$

oder

$$(69)\qquad x_2 = -\frac{i^2}{q}.$$

Man hat also, um den Punkt $A$ auf geometrischem Wege zu bestimmen, normal zu $QS$ die Strecke

$$SJ = i$$

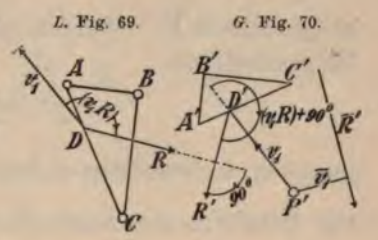
aufzutragen und $JA$ normal zu $QJ$ zu ziehen.

**23.** *Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $K$ und $m v_2'$.* In die Summe $\sum K v_1 \cos(v_1, K)$ sind alle äußeren und inneren Kräfte $K$ einzuführen,

die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten, für die also weder $v_1$ noch $\cos(v_1, K)$ gleich Null ist. Zu den arbeitenden Kräften gehören auch die Bewegungswiderstände, insbesondere die in den Zapfenlagern, Führungen und Gelenken entstehende Reibung. Eine *genaue* Bestimmung der Reibungsarbeit ist schon aus dem Grunde unmöglich, weil das Gesetz der Reibung, d. h. ihre Abhängigkeit von den Gelenkkräften, den Geschwindigkeiten und von dem Zustande der reibenden Flächen nur sehr unvollkommen bekannt ist. Eine weitere Rechnungsschwierigkeit ergibt sich aus dem Umstande, daß die Gelenkkräfte von den Beschleunigungen abhängig sind, und daß es selbst in den einfachsten Fällen untunlich ist, die Reibungsarbeit als Funktion der unbekannten Drehbeschleunigung $\omega'_{11}$ des geführten Gliedes darzustellen. Man ist aus diesem Grunde genötigt, jene Unbekannte zunächst unter Voraussetzung der *reibunglosen* Bewegung oder unter roher Schätzung der Reibungsarbeit zu bestimmen. Alsdann können erforderlichenfalls die Gelenkkräfte ermittelt und die Reibungswiderstände genauer berücksichtigt werden. Wir nehmen an, daß die übrigen arbeitenden Kräfte $K$ gegeben sind; hierzu gehören die Gewichte der Glieder und die Kräfte, die von der Kraftmaschine und von der Arbeitsmaschine auf das Getriebe übertragen werden. Es empfiehlt sich, die auf der rechten Seite der Gleichung (64) stehenden Arbeitsgeschwindigkeiten der Kräfte $K$ und $mv'_2$ zusammenzufassen. Da die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte $mv'_2$ das *negative* Vorzeichen trägt, so ist für jedes Glied die Resultante $R$ der auf das Glied wirkenden Kräfte $K$ und der *gewendeten* Kraft $V_2$ zu bilden und ihre Schubgeschwindigkeit $v_1 \cos(v_1, R)$ zu bestimmen. Die auf alle Glieder ausgedehnte Summierung ergibt dann:

$$(70) \quad \sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2) = \sum R v_1 \cos(v_1, R).$$

Man kann diese Summe auf graphischem Wege bilden, indem man die Kräfte $R$ in folgender Weise in den Geschwindigkeitsplan versetzt. Es sei $P'A'B'C'D'$ der Geschwindigkeitsplan des Getriebegliedes $ABCD$ (Fig. 69 und 70), ferner $D$ irgend ein Punkt der auf das Glied wirkenden Resultanten $R$. Durch den Punkt $D'$ lege man eine Kraft $R'$ von der Größe




$$R' = R,$$

deren Richtung und Sinn durch die Bedingung

$$(R, R') = 90^0$$

bestimmt sind. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft $R$ wird dann dargestellt durch die Größe

$$R v_1 \cos(v_1, R) = R' \; P'D' \; \sin(P'D', R'),$$

d. h. durch das statische Moment der in den Geschwindigkeitsplan versetzten Kraft $R'$ in bezug auf den Pol $P'$, wenn der Hebelarm der Kraft mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe gemessen wird. Verfährt man mit allen Kräften $R$ in der angegebenen Weise und bestimmt darauf die Resultante $\overline{R}'$ der in den Geschwindigkeitsplan versetzten Kräfte $R'$ sowie deren Hebelarm $\overline{v}_1$ in bezug auf den Pol $P'$, so ergibt das Moment $\overline{R}'\overline{v}_1$ die Arbeitsgeschwindigkeit aller Kräfte $K$ und $m v_2'$:

$$(71) \qquad \sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v_2' v_1 \cos(v_1, v_2') = \overline{R}'\overline{v}_1.$$

Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeit $\overline{v}_1$ eine *algebraische* Größe ist; sie trägt das *positive* Vorzeichen, wenn das Moment $\overline{R}'\overline{v}_1$ den positiven Sinn der Uhrzeigerdrehung hat.

**24.** *Die Drehbeschleunigung* $\omega_{11}'$ *des geführten Gliedes.* Die Gleichung (64) ergibt in Verbindung mit den beiden Gleichungen (65) und (71):

$$(72) \qquad \omega_{11}' = \omega_{11} \frac{\overline{R}'\overline{v}_1}{\sum m v_1^2} = \frac{\overline{R}' \frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}}{\sum m \left(\frac{v_1}{\omega_{11}}\right)^2}.$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu veranschaulichen, versetzen wir jeden Massenpunkt $M$ des Getriebes nach dem im Geschwindigkeitsplan ihm entsprechenden Punkt $M'$ und bilden hierdurch den Körper $G$, den wir um eine normal zur Bildebene durch den Pol $P'$ gelegte feste Drehachse schwingen lassen. Wir erinnern daran, daß der Maßstab des Geschwindigkeitsplanes

$$1 \text{ cm} = \mu \text{ cm sek}^{-1}$$

ist (Abschnitt **1**). Werden die Abmessungen des Körpers $G$ mit dem Längenmaßstabe

$$1 \text{ cm} = \left(\mu \frac{\text{sek}^{-1}}{\omega_{11}}\right) \text{cm}$$

gemessen, so bezeichnet in bezug auf die Drehachse $P'$: die Größe $\left(\frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}\right)$ den Hebelarm der Kraft $\overline{R}'$, also $\overline{R}' \frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}$ das statische Moment der Kraft $\overline{R}'$, und $\sum m \left(\frac{v_1}{\omega_{11}}\right)^2$ das Trägheitsmoment des Körpers $G$. Die Gleichung (72) spricht demnach aus, daß die Drehbeschleunigung $\omega_{11}'$

des geführten Gliedes ebenso groß ist wie die Drehbeschleunigung des Körpers $G$ unter Einwirkung der Kraft $\overline{R}'$.

**25.** *Die Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung des Getriebes.* Nachdem die Drehbeschleunigung $\omega_{11}'$ des geführten Gliedes durch Gleichung (72) bestimmt worden ist, kann der Beschleunigungsplan der Bewegung I gebildet werden. Man kann darauf für jedes Glied die gegebenen Kräfte $K$ mit den *gewendeten* Kräften $mv_1'$ zu ihren Resultanten $S$ zusammensetzen. Die graphische Bestimmung der Gelenkkräfte soll an einem Beispiel erläutert werden. Das in Fig. 71 dargestellte Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede $O$ und den fünf bewegten Gliedern 1 bis 5. Das Getriebe ist in dem Gelenke $B$ fest, in dem Gelenke $A$ horizontal verschiebbar gelagert. $S_1$ bis $S_5$ sind die oben bezeichneten, auf die bewegten Glieder einwirkenden Kräfte $S$. Diese Kräfte sind nicht voneinander unabhängig: sie erfüllen die durch Gleichung (63) ausgedrückte Bedingung, nach der das *ruhende* Getriebe unter Einwirkung der Kräfte $S_1$ bis $S_5$ und der beiden Auflagerkräfte $S_a$, $S_b$ sich *nicht* in Bewegung setzen würde. Das Getriebe bildet in diesem Zustande ein statisch bestimmtes Fachwerk, in dem *ein*S tab fehlt; der fehlende Stab könnte erforderlichenfalls mit der Spannung Null zwischen zwei beliebige Knoten, z. B. $E$ und $G$, eingefügt werden. Die aus den fünf Lasten $S_1$ bis $S_5$ hervorgerufenen Auf-

L. Fig. 71.

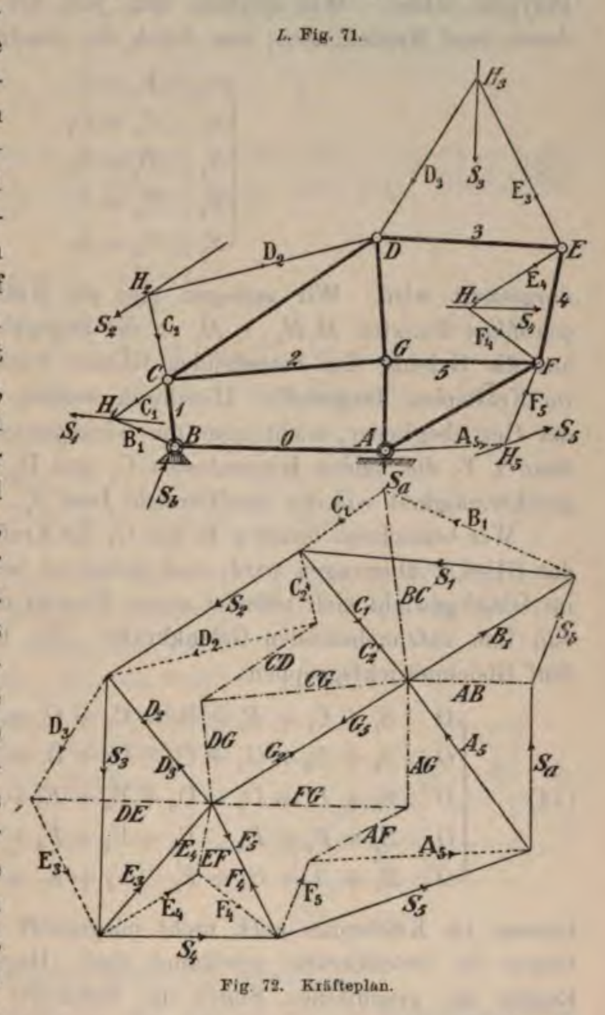



Fig. 72. Kräfteplan.

lagerkräfte $S_a$, $S_b$ werden bestimmt wie bei der Berechnung eines einfachen Fachwerkes. Daß die sieben Kräfte $S$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden, soll durch den Ausdruck

$$O \equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_a + S_b$$

dargestellt werden. In dem Kräfteplan (Fig. 72) kommt diese Tatsache dadurch zum Ausdruck, daß die sieben Kräfte $S$ ein geschlossenes Polygon bilden. Wir ersetzen nun jede der Belastungen $S_1$ bis $S_5$ durch zwei Knotenlasten, was durch die Ausdrücke

$$(73) \quad \begin{cases} S_1 \equiv \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1, \\ S_2 \equiv \mathrm{C}_2 + \mathrm{D}_2, \\ S_3 \equiv \mathrm{D}_3 + \mathrm{E}_3, \\ S_4 \equiv \mathrm{E}_4 + \mathrm{F}_4, \\ S_5 \equiv \mathrm{F}_5 + \mathrm{A}_5 \end{cases}$$

dargestellt wird. Wir zerlegen also die Kräfte $S$ an den *willkürlich gewählten* Punkten $H_1 H_2 \ldots H_5$ in die angegebenen Komponenten, die auf die Gelenke der betreffenden Glieder wirken. Die Zerlegung ist im Kräfteplan dargestellt. Hierdurch werden wohl die *inneren* Kräfte der Getriebeglieder, nicht aber die *Gleichgewichtsbedingungen* geändert: denn z. B. die beiden Knotenlasten $\mathrm{C}_2$ und $\mathrm{D}_2$ haben dieselbe Arbeitsgeschwindigkeit wie die resultierende Last $S_2$.

Wir bezeichnen ferner z. B. mit $G_2$ die Kraft, die vom Gelenk $G$ auf das Glied 2 übertragen wird, und haben zu beachten, daß jedes Glied im Gleichgewicht sich befindet unter Einwirkung der Kraft $S$ und der von ihm aufzunehmenden Gelenkkräfte. Die hieraus sich ergebenden fünf Gleichgewichtsgruppen:

$$(74) \quad \begin{cases} O \equiv S_1 + C_1 + B_1 \equiv \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1 + C_1 + B_1, \\ O \equiv S_2 + D_2 + G_2 + C_2 \equiv \mathrm{C}_2 + \mathrm{D}_2 + D_2 + G_2 + C_2, \\ O \equiv S_3 + E_3 + D_3 \equiv \mathrm{D}_3 + \mathrm{E}_3 + E_3 + D_3, \\ O \equiv S_4 + F_4 + E_4 \equiv \mathrm{E}_4 + \mathrm{F}_4 + F_4 + E_4, \\ O \equiv S_5 + A_5 + G_5 + F_5 \equiv \mathrm{F}_5 + \mathrm{A}_5 + A_5 + G_5 + F_5 \end{cases}$$

können im Kräfteplan noch nicht dargestellt werden, weil die *Richtungen* der Gelenkkräfte unbekannt sind. Dagegen können nach den Regeln der graphischen Statik die *Stabkräfte* bestimmt werden, die unter Einwirkung der gegebenen Knotenlasten sich bilden. Wir bezeichnen z. B. mit $C_4$ und $D_4$ die Kräfte, die vom gewichtlosen Stabe $CD$ auf die Gelenke $C$ und $D$ übertragen werden. Beide Kräfte unterscheiden sich von einander nur durch ihren Sinn und tragen im Kräfte-

plan die gemeinschaftliche Bezeichnung $CD$. Die Kräftepolygone der sieben Knoten können in der hierunter angegebenen Reihenfolge gebildet werden:

$$
(75)\qquad
\begin{cases}
0 \equiv S_b + \mathrm{B}_1 + B_c + B_a, \\
0 \equiv \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + C_d + C_g + C_b, \\
0 \equiv \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_3 + D_e + D_g + D_c, \\
0 \equiv \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4 + E_f + E_d, \\
0 \equiv \mathrm{F}_4 + \mathrm{F}_5 + F_a + F_g + F_e, \\
0 \equiv G_c + G_d + G_f + G_a, \\
0 \equiv \mathrm{A}_5 + S_a + A_b \pm A_g + A_f.
\end{cases}
$$

Nachdem die Stabkräfte bestimmt worden sind, ergeben sich die Gelenkkräfte, indem man für jeden Knoten eines jeden Gliedes das Kräftepolygon bildet:

$$
(76)\qquad
\begin{cases}
0 \equiv A_g + A_f + \mathrm{A}_5 + A_5, \\
0 \equiv \mathrm{B}_1 + B_c + B_1, \\
0 \equiv C_b + \mathrm{C}_1 + C_1 \equiv \mathrm{C}_2 + C_d + C_g + C_2, \\
0 \equiv D_g + D_c + \mathrm{D}_2 + D_2 \equiv \mathrm{D}_3 + D_e + D_3, \\
0 \equiv E_d + \mathrm{E}_3 + E_3 \equiv \mathrm{E}_4 + E_f + E_4, \\
0 \equiv F_e + \mathrm{F}_4 + F_4 \equiv \mathrm{F}_5 + F_a + F_g + F_5, \\
0 \equiv G_c + G_d + G_2 \equiv G_f + G_a + G_5.
\end{cases}
$$

Beispielsweise befindet sich das Glied 2 (Fig. 73) im Gleichgewicht unter Einwirkung der beiden Knotenlasten $\mathrm{C}_2$, $\mathrm{D}_2$ und der drei Gelenkkräfte $C_2$, $D_2$, $G_2$. Indem aus jedem der drei Stäbe $CD$, $DG$, $GC$ ein Stück herausgeschnitten und durch die Stabkräfte ersetzt wird, entstehen drei Gleichgewichtsgruppen, bestehend aus den Kräften

L. Fig. 73.

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{C}_2, & C_d, & C_g, & C_2, \\
D_g, & D_c, & \mathrm{D}_2, & D_2, \\
G_c, & G_d, & G_2, &
\end{array}
$$

deren Polygone im Kräfteplan dargestellt werden.

**26.** *Die Reibungsarbeit und ihr Einfluß auf die Beschleunigungen des Getriebes.* In der Gleichung (72)

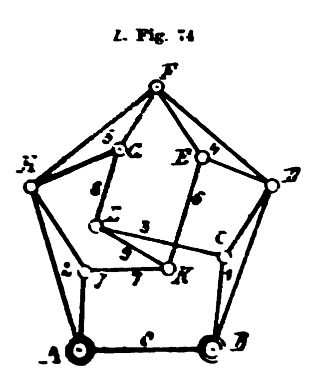
$$\omega_{11}' = \omega_{11}\,\frac{\overline{R}'\,\overline{v}_1}{\sum m r_1^2}$$

wurden in der Arbeitsgeschwindigkeit $\bar{R}'\bar{v}_1$ die Reibungswiderstände vernachlässigt. Jeder Bewegungswiderstand vermindert die kinetische Energie des Getriebes, er vermindert also den *numerischen* Wert der Drehgeschwindigkeit $\omega_{11}$. Bezeichnet $\sum A$ die Summe der *positiven* Werte aller Arbeitsgeschwindigkeiten der Widerstände, so ist der *berichtigte* Wert $(\omega'_{11})$ der Drehbeschleunigung des geführten Gliedes

$$(77)\qquad (\omega'_{11}) = \omega_{11}\,\frac{\bar{R}'\bar{v}'_1 \pm \sum A}{\sum m r_1^2},$$

wenn das Vorzeichen von $\sum A$ dem Vorzeichen von $\omega_{11}$ *entgegengesetzt* gewählt wird.

Die positiven Einzelbeträge, aus denen sich die Summe $\sum A$ zu sammensetzt, können berechnet werden, wenn, was freilich in der Regel nicht der Fall ist, die Reibungskoeffizienten $f$ bekannt sind.


L. Fig. 74

Ein *einfaches* Gelenk, z. B. das Gelenk $F$ in Fig. 74, verbindet *zwei* Glieder 4 und 5 miteinander. Die beiden Gelenkkräfte sind von derselben positiven Größe

$$F_4 = F_5.$$

Sie erzeugen an der Oberfläche des Gelenkzapfens vom Durchmesser $d$ einen Reibungswiderstand von der Größe $fF_4$. Ist die Drehgeschwindigkeit $\omega_4$ des Gliedes 4 algebraisch größer als $\omega_5$, so ist $\frac{1}{2}d(\omega_4 - \omega_5)$ der *positive* Wert der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen gegen einander. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung hat demnach für das einfache Gelenk $F$ den positiven Wert

$$(78)\qquad A = \tfrac{1}{2} f F_4 d(\omega_4 - \omega_5).$$

Ein *Doppelgelenk*, z. B. das Gelenk $K$ (Fig. 74), verbindet *drei* Glieder 6, 7, 9 miteinander. Der Gelenkzapfen ist mit *einem* Gliede starr verbunden, und für die Größe der Reibungsarbeit ist es *nicht* gleichgültig, welches Glied den Zapfen trägt; wir nehmen beispielsweise an, daß das Glied 7 den Zapfen trägt, und daß algebraisch

$$\omega_6 > \omega_9 > \omega_7$$

ist. Das Doppelgelenk $K$ besteht also aus den zwei einfachen Gelenken zwischen den Gliedern 6, 7 und 7, 9, und die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung hat zufolge Gleichung (78) den positiven Wert

$$(79)\qquad A = \tfrac{1}{2} f d\{K_6(\omega_6 - \omega_7) + K_9(\omega_9 - \omega_7)\}.$$

Gelenke mit mehr als drei Gliedern kommen in den gebräuchlichen Getrieben nicht vor und brauchen daher hier nicht berücksichtigt zu werden.

**27.** *Beziehungen zwischen der Anzahl der Glieder eines Getriebes, der Anzahl der Gelenke und der Stäbe.* Wir bezeichnen mit $e$ die Anzahl der einfachen Gelenke des Getriebes, mit $d$ die Anzahl der Doppelgelenke, mit $s$ die Anzahl der Stäbe, mit $g$ die Anzahl der Glieder und nehmen an, daß etwaige Schieberverbindungen nach Abschnitt 5 durch Gelenkverbindungen ersetzt worden sind.

Um $(e + d)$ Gelenke *starr* miteinander zu verbinden, sind $2(e + d) - 3$ Stäbe erforderlich. Wenn *ein* Stab einer solchen starren Verbindung beseitigt und ein zweiter festgehalten wird, so entsteht ein Getriebe. Daher ist

$$s = 2(e + d) - 4 = 2(e + d - 2). \tag{80}$$

Die Anzahl der Stäbe ist also stets *gerade*. In der Anzahl $s$ sind, wie aus den vorstehenden Angaben hervorgeht, auch die Stäbe enthalten, die zur starren Verbindung der *ruhenden* Gelenke erforderlich sind.

Jedes der $e$ einfachen Gelenke nimmt *zwei* und jedes der $d$ Doppelgelenke *drei* Gelenkkräfte auf, und da jede Gelenkkraft *zwei* Unbekannte enthält, z. B. ihre Projektionen auf zwei feste Achsen, so enthalten die Gelenkkräfte $2(2e + 3d)$ unbekannte Größen. Außerdem sind *drei* unbekannte Auflagerkräfte zu bestimmen; in dem Getriebe Fig. 71 z. B. die vertikale Lagerkraft $S_a$ und die beiden Komponenten von $S_b$. Die Gesamtzahl der Unbekannten ist sonach $4e + 6d + 3$. Die Berechnung dieser Größen ist, wie aus Abschnitt **25** hervorgeht, eine *bestimmte* Aufgabe. Die unbekannten Kräfte haben nun folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) Ein jedes Glied befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft $S$ und der vom Gliede aufzunehmenden Gelenkkräfte. Diese Bedingung ergibt für jedes Glied drei, für $g$ Glieder also $3g$ Gleichungen.

2) Jedes Gelenk befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der von ihm aufzunehmenden Gelenk- und Lagerkräfte. Da diese Bedingung durch *zwei* Gleichungen ausgedrückt wird, so ergeben sich $2(e + d)$ Gleichungen. Endlich ist zu beachten, daß die Kräfte $S$ durch Gleichung (63) von einander abhängig sind. Diese Gleichung muß sich ergeben, wenn die $(4e + 6d + 3)$ unbekannten Kräfte aus den $(3g + 2e + 2d)$ gegebenen Gleichungen eliminiert werden. Folglich ist:

$$(3g + 2e + 2d) - (4e + 6d + 3) = 1$$

oder

$$g = 2\,\frac{e + 2d + 2}{3}. \tag{81}$$

Die Anzahl der Glieder mit Einschluß des ruhenden Gliedes ist demnach ebenfalls stets gerade, und die Zahl $e + 2d + 2$ ist teilbar durch drei. Aus den Gleichungen (80) und (81) folgt noch

$$4e + 6d = s + 3g. \tag{82}$$

Demnach ist $(4e - s)$ teilbar durch 6 und $(s + 3g - 6d)$ teilbar durch 4.

*Beispiele.* Für das in Fig. 71 dargestellte Getriebe ist:

$$e = 7, \quad d = 0, \quad s = 10, \quad g = 6$$

und den Bedingungen (80)—(82) gemäß

$$s = 2(e + d - 2) = 10 = 2(7 - 2),$$
$$g = 2\,\frac{e + 2d + 2}{3} = 6 = 2\,\frac{7 + 2}{3},$$
$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 7 = 10 + 3 \cdot 6.$$

Ferner ist für das Getriebe Fig. 74:

$$e = 9, \quad d = 2, \quad s = 18, \quad g = 10$$

und übereinstimmend mit den Gleichungen (80)—(82):

$$s = 2(e + d - 2) = 18 = 2(9 + 2 - 2),$$
$$g = 2\,\frac{e + 2d + 2}{3} = 10 = 2\,\frac{9 + 4 + 2}{3}.$$
$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 9 + 6 \cdot 2 = 18 + 3 \cdot 10.$$

28. *Die inneren Kräfte eines Getriebegliedes.* Um die Kräfte zu bestimmen, welche die Festigkeit eines Getriebegliedes in Anspruch nehmen, zerlegt man das Glied durch Schnitte, bei einem stabförmigen Körper z. B. durch Querschnitte, in eine Anzahl von Teilen 1, 2, 3, ... Für jeden dieser Teile bestimmt man den Schwerpunkt, die Masse $m_1$, $m_2$, $m_3$, ..., die Schwerpunktsbeschleunigung $v_1'$, $v_2'$, $v_3'$, ... und die Resultante der äußeren Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, ... Die Teile sind so klein zu wählen, daß die Kräfte $mv'$ mit genügender Genauigkeit durch die Kräfte $m_1 v_1'$, $m_2 v_2'$, ... ersetzt werden können. Jeder Teil, z. B. der Teil 2, befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft $K_2$, der *gewendeten* Kraft $m_2 v_2'$ und der inneren Kräfte, die von den benachbarten Teilen 1 und 3 durch die trennenden Schnitte auf den Teil 2 übertragen werden. Die Festigkeit des Gliedes wird demnach

ebenso in Anspruch genommen wie die eines ruhenden Körpers, auf den die *gewendeten* Kräfte $m_1 v_1'$, $m_2 v_2'$, ... und die äußeren Kräfte $K$ mit Einschluß der Gelenkkräfte einwirken.

**29.** Literatur.

Radinger, Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit. Wien 1870, dritte Auflage 1892.

Pröll, Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874.

Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1901. Diese Abhandlung enthält weitere Literaturangaben.

---

# Verwandlung der Polygone in Dreiecke von gleichem Moment beliebigen Grades.

Ein neues Verfahren zur graphischen Bestimmung von Momenten, Schwerlinien, sowie des Rauminhalts von Drehungskörpern.

Von J. Schnöckel in Aachen.

In dieser Zeitschrift Band 49 (1903) Seite 372—381 hat der Verfasser nachgewiesen, daß sich krummlinig begrenzte, ebene Figuren mit Hilfe eines einfachen Apparats in Dreiecke von gleichem Moment verwandeln lassen. Der Gedanke, die Kurve durch eine ausgleichende Gerade zu ersetzen, sowie das praktisch zur Flächenberechnung vielfach angewendete Verfahren der Verwandlung von Polygonen in Dreiecke, ließ vermuten, daß letztere rein konstruktiv auch nach dem statischen Moment, dem Trägheitsmoment und nach Momenten beliebigen Grades ausgeglichen werden könnten.

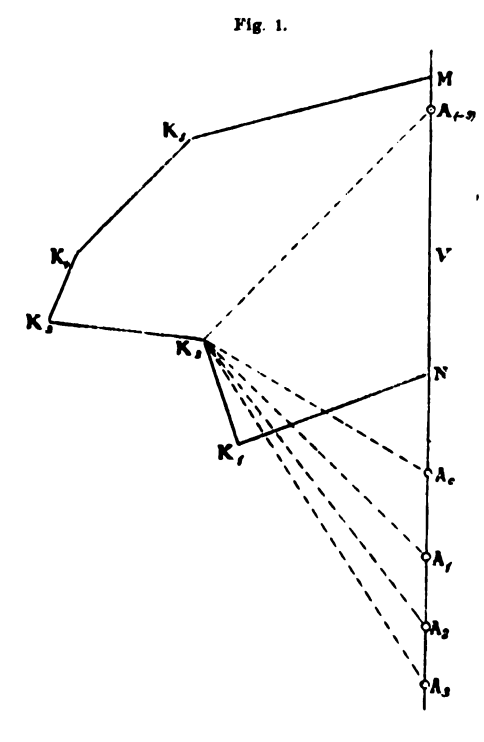
Die Lösung der Aufgabe erfordert eine Erweiterung des über die Verwandlung der Polygone nach Fläche bekannten Lehrsatzes, und für die Praxis bedarf es keines eigenen Apparates, sondern nur zweier Zeichendreiecke und einer Kopiernadel. Die Konstruktion der Schwerlinie und reduzierten Pendellänge eines Polygons gestaltet sich in dieser Weise viel einfacher als es mittelst graphostatischer und anderer Methoden möglich ist, und hat auch den Vorteil großer Sicherheit und Genauigkeit.

Dem Ausgleichungsprinzip liegt die Lösung folgender geometrischen Aufgabe zugrunde.

## Ein Polygon in ein anderes von gleichem Moment beliebigen Grades zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Das Polygon $MNK_1K_2K_3K_4K_5$ (Fig. 1) soll in ein Sechseck von gleichem Moment $n$-ten Grades verwandelt werden. Die Momentengleichung möge lauten $\sum_n = \int xy^n dy$, wo $y$ das Lot von einem beliebigen Punkte des Polygons auf $MN$ als $X$-Achse (Leitlinie) bezeichnet.

Fig. 1.




Will man den Linienzug $NK_1K_2$ durch eine ausgleichende Gerade ersetzen, ohne das „Moment 0 ten Grades" $\sum_0 = \int xdy =$ Fläche des Polygons zu verändern, so zieht man nach einem bekannten Lehrsatz der Planimetrie $K_1A_0 \parallel K_2N$. Dann ist $A_0K_2$ die gesuchte Gerade.

Zur Ausgleichung nach dem statischen Moment $\sum_1 = \int xydy$ macht man $K_1A_1 \parallel K_2A_0$ und erhält $A_1K_2$ als ausgleichende Gerade. Das Siebeneck $MNK_1K_2K_3K_4K_5$ ist in das ihm bezüglich des statischen Moments gleiche Sechseck $MA_1K_2K_3K_4K_5$ verwandelt worden.

Zieht man zur Ausgleichenden ersten Grades $K_2A_1$ die Parallele $K_1A_2$, so gleicht $A_2K_2$ den Linienzug $NK_1K_2$ nach dem Moment $\sum_2 = \int xy^2dy$ (Trägheitsmoment) aus.

Allgemein wird das Polygon nach dem Moment $\sum_n$ in ein anderes verwandelt, das eine Seite weniger hat, indem man zur Ausgleichenden $(n-1)$-ten Grades $K_2A_{(n-1)}$ die Parallele $K_1A_n$ zieht. Das gesuchte Polygon ist $MA_nK_2K_3K_4K_5$.

Für $n = -1$ und $-2$ versagt das Verfahren, wie später in der Theorie bewiesen wird; dagegen ist die Ausgleichung nach dem Moment $\sum_{(-3)} = \int \frac{x}{y^3}dy$ sehr einfach. Man zieht zu $NK_1$ die Parallele $VK_2$ und dann $A_{(-3)}K_2 \parallel VK_1$. Das momentengleiche Sechseck ist $MA_{(-3)}K_2K_3K_4K_5$.

Für $\sum_{(-n)}$ findet man den Punkt $A_{(-n)}$ allgemein, indem man $K_2 A_{(-n)} \parallel K_1 A_{(-n+1)}$ macht.

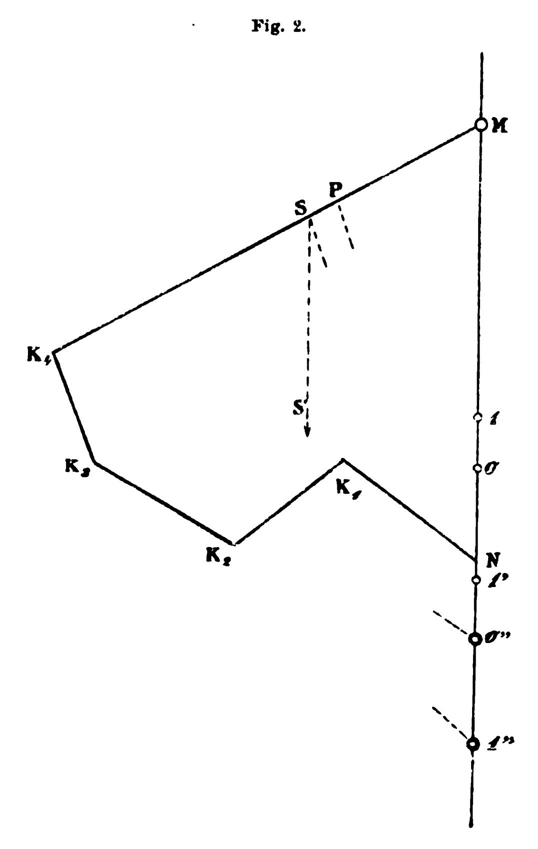
Sobald $n$ ein Bruch ist, wird die Ausgleichung unmöglich und nur annähernd durch Interpolation zwischen $A_n$ und $A_{n+1}$ ausführbar.

### Praktische Anwendung des Ausgleichungsprinzips.

Durch mehrfache Anwendung obiger Konstruktion kann man $m$-Ecke in $(m-1)$-, $(m-2)$-Ecke und schließlich in Dreiecke verwandeln, ohne das Moment $\sum_n = \int xy^n dy$ zu verändern. Praktisch führt man die Verwandlung folgendermaßen aus.

Man gibt dem Polygon eine solche Lage, daß die zur Leitlinie gewählte Seite $MN$ (Fig. 2) nach rechts fällt, legt ein Zeichendreieck am besten aus Celluloid mit der Kante bei $N$ in der Richtung $NK_2$ an und verschiebt es an einem zweiten Dreieck parallell bis $K_1$. Der in der Figur 2 mit 0 bezeichnete Schnittpunkt der Parallelen mit $MN$ wird jetzt durch Aufsetzen einer Kopiernadel vorübergehend festgehalten, aber nicht mit Bleistift usw. bezeichnet. Man dreht die Kante um 0 bis sie in die Richtung $\overline{0K_2}$ fällt, hebt die Nadel vom Papier und verschiebt am zweiten Dreieck wieder bis $K_1$. Der Schnittpunkt 1 der Kante wird mit der Nadel markiert, ohne weiter bezeichnet zu werden. Die Gerade (in der Figur nicht ausgezogen) $\overline{1K_2}$ ersetzt den Linienzug $NK_1K_2$ nach dem statischen Moment. Die Kante wird nun um die

Fig. 2.

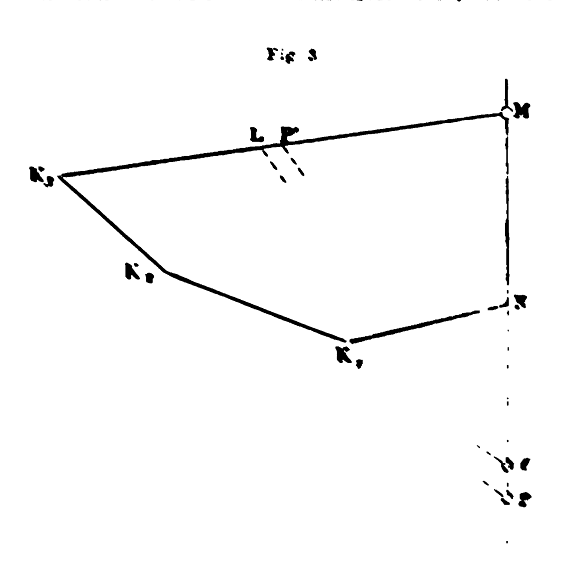



Nadel bei 1 bis $K_3$ gedreht, dann die Nadel entfernt und das Dreieck parallel bis $K_2$ geschoben. Nachdem die Kante wieder um den Schnittpunkt mit $MN$ gedreht und das Dreieck bis $K_2$ verschoben ist, erhält

man die Gerade $\overline{1'K_3}$, welche nun den Linienzug $N K_1 \overline{K_2 K_3}$ nach dem statischen Moment ausgleicht. Danach ergibt sich $\overline{1''K_4}$ als ausgleichende Gerade des ganzen Linienzuges.

In entsprechender Weise ist der Punkt 0″ gefunden worden, dessen Verbindungslinie mit $K_4$ den Linienzug $N K_1 K_2 K_3 K_4$ nach Fläche ausgleicht. Bei Verwendung einer Kopiernadel ist jede dauernde Bezeichnung von Zwischenpunkten, wie 0, 1, 2 usw., *unnötig* und stört nur die Übersichtlichkeit. Beachtet man, daß zur Ausgleichung nach dem statischen Moment für jede Polygonecke zwei parallele Verschiebungen des Dreiecks und zwei Drehungen um die Nadel erforderlich werden, so sind Irrtümer ausgeschlossen. Die Resultate, welche durch Verwandeln der Polygone in Dreiecke gleicher Fläche praktisch gefunden wurden, zeichnen sich durch große Genauigkeit aus, und dasselbe kann man auch von dem hier verallgemeinerten Verfahren behaupten.

Macht man $MP = \frac{1}{3} MK_4$ (Fig. 2), zieht dann $\overline{1''S} \parallel \overline{0''P}$ und endlich zu $MN$ die Parallele $SS'$, so ist dies eine *Schwerlinie* des Polygons $M N K_1 K_2 K_3 K_4$. Diese Konstruktion ist wesentlich einfacher als sie die graphische Statik mit Hilfe des Kräftezuges lehrt und dürfte daher allen bekannten Methoden zur Auffindung des Schwerpunktes einer ebenen Figur vorzuziehen sein.




Bezeichnet man das Lot vom Endpunkte der Ausgleichung $K_4$ auf $MN$ mit $y$, so ist das Volumen des durch Rotation des Linienzuges $N K_1 K_2 K_3 K_4 M$ erzeugten *Drehungskörpers* $V = \frac{1}{3} y^2 \pi \cdot \overline{1'M}$.

Je höher der Grad der Ausgleichung wird, um so größer ist auch die Anzahl der Einzeloperationen, aus denen das Resultat hervorgeht. Für eine Verwandlung $n$-ten Grades bedarf es zum Ausgleichen einer Polygonecke $n - 1$ parallelen Verschiebungen und Drehungen des Zeichendreiecks um die Kopiernadel. Das macht bei der Verwandlung eines $m$-Ecks nach dem Moment $n$-ten Grades $2(n - 1)(m - 3)$ Einzeloperationen.

In Rücksicht auf die im ersten Abschnitt beschriebene Verwandlung eines $m$-Ecks in ein $(m-1)$-Eck gleichen Moments vom $n$-ten Grade erübrigt es sich, auf die praktische Ausgleichung nach dem Trägheitsmoment usw. mit Zeichendreieck und Kopiernadel einzugehen.

Die (in Fig. 3 nicht ausgezogenen) Geraden $\overline{1K_3}$ und $\overline{2K_3}$ gleichen das Fünfeck $MNK_1K_2K_3$ nach dem statischen und Trägheitsmoment aus. Macht man $MP' = \frac{1}{2}MK_3$ und zieht zu $\overline{1P'}$ die Parallele $\overline{2L}$, so ist das Lot von $L$ auf die Leitlinie $MN$ die *reduzierte Pendellänge* des Polygons.

In Fig. 4 gleichen die Geraden $\overline{0K_3}$ und $\overline{1K_3}$ den Linienzug $NK_1K_2K_3$, die Geraden $\overline{0'K_3}$ und $\overline{1'K_3}$ den Zug $MK_5K_4K_3$ nach Fläche und statischem Moment aus. Es empfiehlt sich immer, den von der Leitlinie am weitesten entfernten Punkt zum Endpunkt der Ausgleichungen zu wählen, da andernfalls die Dreiecksbasen auf $MN$ sehr groß werden. Macht man wieder $\overline{1'P} = \frac{1}{3}\cdot\overline{1'K_3}$, setzt die Entfernung $\overline{00'}$ mit dem Zirkel von $1'$ aus bis $A$ ab und zieht $\overline{1S} \parallel AP$, so ist die Parallele $SS'$ zu $MN$ Schwerlinie des Polygons $MNK_1K_2K_3K_4K_5$. Der Inhalt des Drehungskörpers ist $V = \frac{1}{3}y^2\pi\cdot\overline{11'}$.

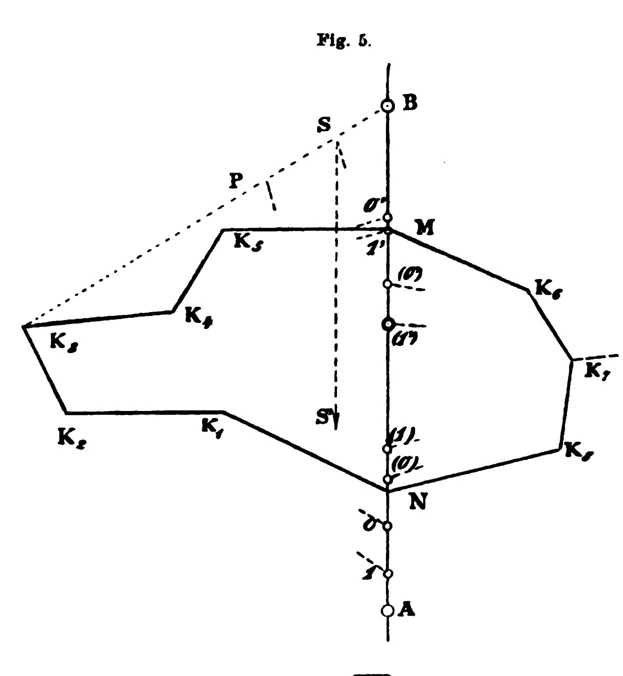
Fig. 4.

Etwas anders gestaltet sich die Konstruktion der Schwerlinie, wenn die Leitlinie das Polygon schneidet wie in Fig. 5. Die (nicht ausgezogenen) Geraden $\overline{0K_8}$, $\overline{0'K_8}$, $\overline{1K_8}$ und $\overline{1'K_8}$ gleichen das Polygon $NK_1K_2K_3K_4K_5M$ nach Fläche und statischem Moment aus. Um auch hier zu einer einfachen Konstruktion der Schwerlinie zu gelangen, bestimmt man einen Punkt $V$ so, daß seine lotrechte Entfernung von $MN$ dem Lot von $K_3$ auf letztere gleich ist. Die Geraden $\overline{(0)V}$ und $\overline{(1)V}$ gleichen den Zug $NK_8K_7V$, die Geraden $\overline{(0')V}$ und $\overline{(1')V}$ den Linienzug $MK_6K_7V$ aus. Setzt man von (1) aus die Länge $\overline{11'}$ bis

$B$ ab, so ist $\overline{(1')BK_8}$ das Dreieck, welches dem Zehneck $NK_1K_2 \ldots MK_6 \ldots K_8$ inbezug auf das statische Moment gleicht. Macht man nun

$$BA = \overline{00'} + \overline{(0)(0')},$$

Fig. 5.




so ist $ABK_8$ dem Polygon flächengleich. Die Parallele $\overline{(1')S}$ zu $AP$ schneidet $BK_8$ im Punkte $S$ der Schwerlinie. Der Einfachheit wegen legt man die Achse tunlichst so, daß sie die Figur nicht schneidet.

Ist $y$ das Lot vom Endpunkte der Ausgleichung auf $MN$, so wird in Fig. 2 die Fläche des Sechsecks

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2} y \cdot \overline{0''M},$$

das statische Moment

$$\sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6} y^2 \cdot \overline{1''M}.$$

In Fig. 3 ist das Trägheitsmoment

$$\sum\nolimits_2 = \int x y^2 dy = \tfrac{1}{12} y^3 \cdot \overline{2M}.$$

In Fig. 4 ist

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2} y \cdot \overline{00'} \text{ und } \sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6} y^2 \cdot \overline{11'}.$$

Für das Zehneck (Fig. 5) ergibt sich als Fläche

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2} y \cdot [\overline{00'} + \overline{(0)(0')}] = \tfrac{1}{2} y \cdot AB,$$

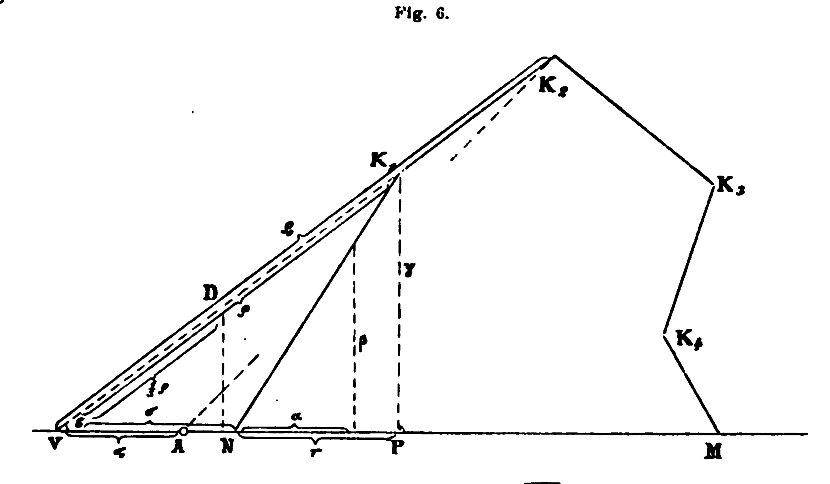
als statisches Moment

$$\sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6} y^2 \cdot [\overline{11'} - \overline{(1)(1')}] = \tfrac{1}{6} y^2 \cdot \overline{(1')B}.$$

## Theoretische Begründung der in den beiden ersten Abschnitten aufgestellten Behauptungen.

Das in Fig. 6 dargestellte Polygon $NK_1K_2K_3K_4M$ werde durch die ausgleichende Gerade $AK_2$ in das Fünfeck $AK_2K_3K_4M$ von gleichem Moment $n$-ten Grades $\sum_n = \int xy^n dy$ verwandelt. Schneidet die verlängerte Polygonseite $K_1K_2$ die Achse in $V$, so ist der Forderung genügt, wenn die Dreiecke $VNK_1$ und $VAK_2$ momentengleich sind.

Fig. 6.




Durch partielle Integration kann man $\sum_n$ zwischen den Grenzen 0 und $y$ unter der Form $\sum_n = \int \frac{y^{n+1}}{n+1} dx$ darstellen.

Bezieht man die Koordinaten $x$, $y$ auf die Gerade $VK_1$ und $\alpha$, $\beta$ auf $NK_1$, so lautet, wenn $f$ als Funktionszeichen dient, die Bedingung etwas allgemeiner als Gleichung (1) in des Verfassers anfangs erwähntem Aufsatz

$$\int_{y=0}^{y=y} f(y)\,dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} f(\beta)\,d\alpha = K. \tag{1}$$

Entsprechend der dortigen Gleichung (1a) ergibt sich aus den Beziehungen

$$\alpha = \frac{r}{y}\beta, \quad d\alpha = \frac{r}{y}d\beta$$

die Formel

$$\int_{y=0}^{y=y} f(y)\,dx - \frac{r}{y}\int_{\beta=0}^{\beta=y} f(\beta)\,d\beta = K. \tag{2}$$

Schreibt man wieder $y$ statt $\beta$ und entnimmt aus Fig. 6 die Beziehungen

$$y = \varrho \sin \varepsilon, \qquad x = \varrho \cos \varepsilon = r + \sigma,$$
$$dy = d\varrho \sin \varepsilon, \quad dx = d\varrho \cos \varepsilon,$$

so geht (2) über in

$$\cos \varepsilon \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho - \frac{r}{\varrho} \int f(\varrho \sin \varepsilon)\, d\varrho = K$$

oder

$$\left(\frac{r+\sigma}{\varrho} - \frac{r}{\varrho}\right) \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho = K.$$

In vereinfachter Gestalt erhält man als Relation zwischen $\varepsilon$, $\sigma$, $\varrho$ und $K$

$$\frac{\sigma}{\varrho} \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho = K. \tag{3}$$

Für den speziellen Fall der Momente $n$-ten Grades

$$f(y) = \frac{y^{n+1}}{n+1} \tag{3a}$$

wird

$$\frac{\sigma \sin \varepsilon^{n+1}}{\varrho^{(n+1)}} \int \varrho^{n+1} d\varrho = K. \tag{4}$$

Integriert man und bedenkt, daß diese Gleichung für alle Werte von $\sigma$ und $\varrho$ gilt, so findet sich[1])

$$\sigma \varrho^{n+1} = \sigma_0 \varrho_0^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{\sin \varepsilon^{n+1}} K. \tag{5}$$

Diese Formel läßt eine einfache, geometrische Deutung zu.

Zur Verwandlung 0-ten Grades (nach Fläche) kann man nach (5) schreiben (vergl. Fig. 7)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = 0V. \tag{6}$$

Denn zieht man $\overline{0K_1} \parallel NK_2$, so geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V0K_1$ und $VNK_2$ die letzte Gleichung hervor.

Soll der Linienzug $NK_1K_2$ nach dem statischen Moment ($n = 1$) ausgeglichen werden, so ist nach Formel (5) und (6)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 = \overline{0V} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = 1V. \tag{7}$$

1) Formel (5) läßt sich auch aus der in des Verf. oben erwähntem Aufsatz Seite 378 entwickelten Schlußformel (6) [$v = n \cdot n$] ableiten.

Wenn $\overline{1K_1} \parallel \overline{0K_2}$, folgt Gleichung (7) aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V1K_1$ und $V0K_2$.

Ganz analog erhält man für das Trägheitsmoment ($n = 2$) durch Parallelziehen zur Ausgleichenden ersten Grades $\overline{1K_2}$ nach (5) und (7)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3 = \overline{1V}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = \overline{2V}.$$

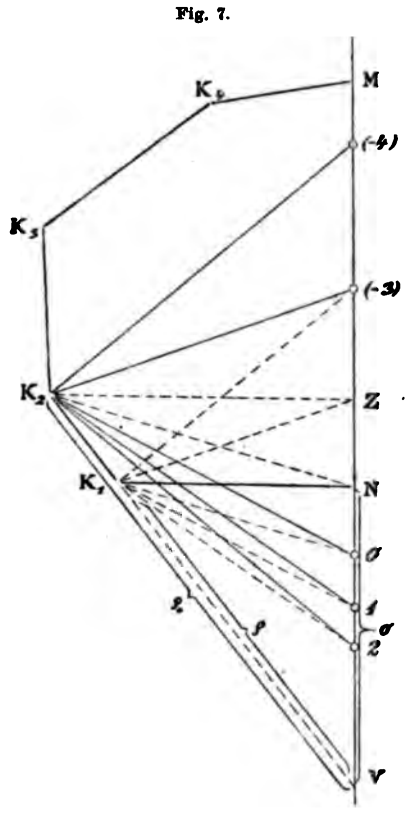


Fig. 7.

Hiernach ist die Konstruktion der Punkte $n$ auf $MN$ für Momente $n$-ten Grades ohne weiteres einzusehen, und es bleibt nur noch übrig, die Verwandlung nach Momenten negativen Grades $\sum_{(-n)} = \int \frac{x}{y^n}\,dy$ aus Formel (5) geometrisch abzuleiten.

Für $n = -1$ und $-2$ lauten die Momentengleichungen

$$\sum_{(-1)} = \int \frac{x}{y}\,dy = \int \log\mathrm{nat}\, y\,dx,$$

$$\sum_{(-2)} = \int \frac{x}{y^2}\,dy = -\int \frac{dx}{y}.$$

In beiden Fällen werden die Formeln (3a) resp. (4) logarithmisch und führen zu keiner geometrischen Konstruktion.

Macht man $ZK_2 \parallel NK_1$ und dann $\overline{(-3)K_2} \parallel ZK_1$, so wird

$$ZV = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)$$

und

$$\overline{(-3)V} = ZV \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} = \sigma\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 = \sigma\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{(-2)}. \tag{8}$$

Ein Vergleich mit Formel (5) ergibt für $n = -3$

$$\overline{(-3)V} = \sigma_0.$$

Die Gerade $\overline{(-3)K_2}$ gleicht also den Linienzug $NK_1K_2$ nach dem Moment $\sum_{(-3)}$ aus.

Die Parallele $\overline{(-4)K_2}$ zu $\overline{(-3)K_1}$ ist Ausgleichende $(-4)$-ten

Grades, denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V(-4)K_2$ und $V(-3)K_1$ und nach (8) folgt

$$(-4)V = (-3)V \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{(-3)}.$$

Stereometrisch wird die Formel (5) für $n = 2$ in einfacher Weise nach der Guldinschen Regel abgeleitet.

Das Ausgleichungsprinzip bedingt, daß das statische Moment des Polygons $\sum_1 = \frac{1}{2}\int y^2 dx$ konstant bleibe, wenn die Seite $NK_1$ (vergl. Fig. 6) in die Lage $AK_2$ übergeht. Es muß auch das Integral $\pi\int y^2 dx$, der Inhalt des Drehungskörpers um $MN$, konstant bleiben, wenn das Polygon durch allmähliche Ausgleichung in ein Dreieck, der Körper also in einen Kegel verwandelt wird.

Der Inhalt des Kegels $VNK_1$ ist das Produkt aus der Dreiecksfläche $VNK_1$ und dem Wege des Schwerpunktes $D$ oder in einer Formel ausgedrückt

$$(\tfrac{1}{2}\varrho\sigma \sin\varepsilon) \cdot 2\pi \cdot (\tfrac{1}{3}\varrho \sin\varepsilon) = K.$$

woraus folgt

$$\sigma\varrho^2 = \sigma_0\varrho_0^2 = \frac{3K}{\pi \sin^2\varepsilon}.$$

Die allgemeine Formel, mit deren Hilfe die Momente nach vollzogener Ausgleichung zu berechnen sind, ergibt sich aus Gleichung (2) für $K = 0$. Man setzt nach (3a) $f(y) = \frac{y^{n+1}}{n+1}$ und integriert die linke Seite zwischen den Grenzen 0 und $y$, sodaß man schließlich erhält

$$(9) \qquad \sum\nolimits_n = \int^{\circ} xy^n dy = \int \frac{y^{n+1}}{n+1} dx = \frac{r_n}{(n+1)(n+2)} y^{n+1}.$$

$r_n$ (siehe Fig. 6) ist die Projektion resp. die Summe der Projektionen der ausgleichenden Geraden. Für Fig. 3 ist $r_1 = \overline{1M}$, $r_2 = \overline{2M}$; für Fig. 4 dagegen $r_0 = \overline{00'} = \overline{1'A}$, $r_1 = \overline{11'}$. In Fig. 5 setzt sich $r_0$ und $r_1$ aus der Summe resp. Differenz zweier Projektionen zusammen.

Es fehlt nun noch der Beweis für die im zweiten Abschnitt angegebene Konstruktion der Schwerlinie und der reduzierten Pendellänge. Der Abstand der Schwerlinie $SS'$ (vgl. Fig. 2 und 4) von der Achse $MN$ ist nach mechanischen Grundsätzen in Rücksicht auf (9) für $n = 0$ und 1

$$(10) \qquad \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{\sum_1}{\sum_0} = \frac{r_1 \cdot y^2 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot r_0 \, y} = \frac{1}{3} y \cdot \frac{r_1}{r_0}.$$

Da in Fig. 2 die Strecke $PM = \frac{1}{3}K_4M$ ist, so wird das Lot von $P$ auf die Achse gleich $\frac{1}{3}y$. Ferner ist $\overline{0''P} \parallel \overline{1''S}$. Nach den Proportionssätzen verhält sich dann

$$\eta : \tfrac{1}{3}y = \overline{1''M} : \overline{0''M} = r_1 : r_0.$$

Es ist also $SS'$ Schwerlinie des ausgeglichenen Polygons.

Unter reduzierter Pendellänge versteht man den Quotienten

$$l = \frac{\int xy^2dy}{\int xydy} = \frac{\frac{1}{3}\int y^3dx}{\frac{1}{2}\int y^2dx}.$$

Dieser Ausdruck geht nach Formel (9) über in

$$(11) \qquad l = \frac{\sum_2}{\sum_1} = \frac{r_2 \cdot y^3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot r_1 \cdot y^2} = \tfrac{1}{2}y \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Vergleicht man die Formeln (10) und (11) mit einander, so zeigt sich, daß in Fig. 3 $P'M = \frac{1}{2}K_3M$ sein muß; an die Stelle von 0 und 1 treten hier 1 und 2. Dann ist das Lot von $L$ auf $MN$ gleich $l$.

Die größte Genauigkeit erreicht man bei diesem Verfahren, wenn die Ecken des zu verwandelnden $m$-Ecks durch feine Nadelstiche bezeichnet sind. Der mittlere Richtungsfehler $\mu$ der ausgleichenden Geraden setzt sich für das Moment $\sum_n$ aus den Abweichungen von (wie oben gesagt) $2(n+1)(m-3)$ Einzeloperationen zusammen. Diese sind ebenso oft positiv wie negativ und rechtfertigen das Fehlergesetz

$$\mu = \pm K\sqrt{2(n+1)(m-3)}.$$

Die Konstante $K$ muß sehr klein angenommen werden, da die Resultate sich durch eine erhebliche Genauigkeit auszeichnen.

Aachen, im Februar 1904.

---

# Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyberboloidräder.

Von Martin Disteli in Straßburg i. E.

(Mit einer Tafel, Fig. 15—15d.)

In den folgenden Ausführungen handelt es sich um die geometrische Zusammensetzung und Zerlegung instantaner Schraubengeschwindigkeiten, einerseits um daraus die Mittel zur zeichnerischen Darstellung der verschiedenen Typen der Schraubenaxoide zu gewinnen, andererseits um

zu einer geometrisch genauen Verzahnung dieser Axoide, insbesondere der Hyperboloidräder zu gelangen.

Das Verzahnungsproblem zweier Räder an windschiefen oder gekreuzten Achsen gehört bereits einer früheren Zeit an und geht auf Th. Olivier[1]) zurück, der schon 1815 den Gedanken erfaßte, Bewegungen um zwei sich nicht schneidende Achsen direkt aufeinander zu übertragen. Olivier gab 1816 eine Verzahnung zweier Räder bekannt, deren zylindrische Grundkörper zu gekreuzten Achsen gehören und Zähne tragen, die sich beständig längs einer geradlinigen Strecke berühren, also zur Übertragung mechanischer Arbeit tauglich sind.

Dieses Beispiel einer Linienverzahnung, welches auch durch Modelle[2]) veranschaulicht wurde, blieb infolge seiner Einfachheit lange Zeit das einzig bekannte einer wirklich ausführbaren Verzahnung: denn wenn auch im Laufe der Zeit noch weitere Versuche hinzugekommen sind, welche bereits von hyperboloidischen Grundkörpern ausgehen, so haben diese doch die Allgemeinheit der Olivierschen Auffassung kaum erreicht.[3])

Diese allgemeine Theorie Oliviers liegt aber auf dem Gebiete der Schraubentheorie. In der Tat läßt sich denn auch durch Heranziehung dieser, namentlich durch die Herren Sir Robert Ball, F. Klein, E. Study u. A. bekannt gewordenen Theorie, das Verzahnungsproblem gerade im wichtigsten Falle der Linienverzahnung in einer Weise lösen, die der bekannten Zykloidenverzahnung der Stirn- und Kegelräder in vollständiger Analogie zur Seite gestellt werden kann.

Von den dynamischen Fragen des Problems ist im folgenden abgesehen; wir beschränken uns vielmehr darauf, die geometrische Form der Zahnflanken durch kinematische Betrachtungen zu bestimmen und reichen zu diesem Zwecke mit dem einfachen Mittel der Zusammensetzung von Schraubengeschwindigkeiten aus. Diese führt naturgemäß

---

1) Théodore Olivier, Théorie Géométrique des Engrenages. Paris 1842, welches Werk eine chronologische Angabe aller Arbeiten enthält, welche Olivier 1816 bis 1832 über Verzahnungsprobleme veröffentlicht hat.

2) Nach Angaben Oliviers, Seite 118 a. a. O. zuerst 1831 an der École Polytechnique; dann durch T. Rittershaus, an der Modellausstellung 1892 in München ausgestellt. Vergl. Katalog mathematischer Modelle usw. von W. Dyck, III. Abt. Seite 344, wo das Modell beschrieben ist. Vergl. auch: Pützer, Spiraloidräder, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, der im wesentlichen den Ausführungen Oliviers folgt.

3) Vergl. A. Schoenfließ u. M. Grübler, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften; Band $IV_1$, Heft 2, Seite 261 und die diesbezüglichen weiteren Literaturangaben Seite 265 ff.

zu den bekannten Eigenschaften des Zylindroids oder Plückerschen Konoids, zu den mit dieser Fläche zusammenhängenden *Axoidscharen* und dadurch von selbst auf eine Verzahnung sowohl der Schraubenaxoide als der Hyperboloide. Es läßt sich voraussehen, daß durch Einführung der mit den Schrauben des Zylindroids zusammenhängenden Systeme linearer Komplexe verschiedenen Resultaten eine elegante Herleitung gegeben werden kann; wenn in den vorliegenden Ausführungen von diesem Hilfsmittel nicht Gebrauch gemacht wurde, so geschah es in dem Bestreben, das Ziel durchweg mit möglichster Einfachheit zu erreichen.

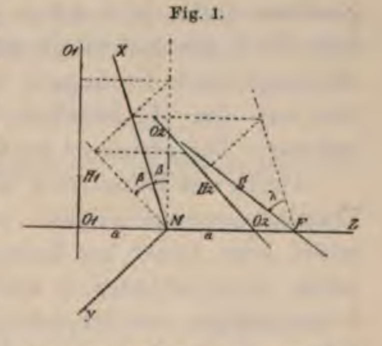
Die Zusammensetzung der Schraubengeschwindigkeiten muß zum Zwecke der Konstruktion geometrisch interpretiert werden und geschieht in einer bereits früher besprochenen[1]) und jetzt vervollständigten Weise, welche in einem speziellen Falle schon von Lewis[2]) zur Konstruktion des Zylindroids benutzt worden ist.

Die Brauchbarkeit der Verzahnung und der Hyperboloidräder kann allerdings vom geometrischen Standpunkt aus nicht entschieden werden. Jedenfalls aber bleibt dem Verzahnungsproblem schon seiner Anschaulichkeit wegen ein theoretisches Interesse gesichert, und dies umsomehr, als die mit dem Problem zusammenhängenden Aufgaben mit zu den anregendsten Anwendungen der darstellenden Geometrie gerechnet werden dürfen.

## § 1. Zusammensetzung instantaner Schraubengeschwindigkeiten.

Wir betrachten zwei feste Achsen $o_1$ und $o_2$ von gekreuzter oder windschiefer Lage. Die gemeinsame Normale derselben wählen wir als Achse $z$, den Mittelpunkt $M$ der kürzesten Distanz $O_1 O_2$, welche die Länge $2a$ haben möge, als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 1). Die positive Richtung der Achse $z$ gehe nach rechts; die positiven Richtungen der Achsen $o_1$ und $o_2$ seien so festgelegt, daß der von ihnen eingeschlossene Achsenwinkel $2\beta$ ein spitzer Winkel ist.

Fig. 1.



Die Achsen $x$ und $y$ des Koordinatensystems seien parallel zur innern und äußern Winkelhalbierenden des Achsenwinkels gezogen. Die positive Richtung der Achse $x$ liege nach der Seite der positiven

1) Vergl. diese Zeitschrift, Band 46, Heft 1 u. 2, Seite 134 ff.

2) Vergl. T. C. Lewis, Messenger of Mathematics. Vol. II. Seite 1—5. 1879.

Richtungen von $o_1$ und $o_2$; die positive Richtung der Achse $y$ sei so festgelegt, daß von der positiven Seite der Achse $z$ aus gesehen $(+x)$ durch Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers nach $(+y)$ gebracht werden kann. Dieses Koordinatensystem $M(x, y, z)$ heiße kurz das *Mittelpunktssystem*.

Jede Gerade $g$, welche die Achse $z$ in einem Punkte $F$ rechtwinklig schneidet, heiße eine *Achse*. Sie ist bestimmt durch den Abstand $\varrho$ ihres Fußpunktes $F$ vom Mittelpunkt $M$ und durch den Winkel $\alpha$ gegen die positive Richtung der Achse $x$.

Der Winkel $\alpha$ liegt vorläufig zwischen Null und vier Rechten, und es sei diejenige Seite der Achse $g$ als positiv bezeichnet, welche durch die Richtung der positiven Achse $x$ angezeigt wird, falls diese in der Richtung von $x$ nach $y$ um den Winkel $\alpha$ gedreht wird.

Vom Fußpunkte $F$ aus denken wir jetzt in der Achse $g$ eine Strecke $h$ von bestimmter Länge aufgetragen; nach der positiven Seite der Achse $g$, falls $h$ positiv ist, nach der entgegengesetzten, falls $h$ negativ sein sollte. Diese Strecke heißt nach Sir Robert Ball[1]) der *Windungsparameter* der Achse. Geometrisch bestimmt er durch jeden Punkt des Raumes eine Schraubenlinie, welche $g$ zur Achse und $h$ zur reduzierten Ganghöhe hat. Die Gesamtheit dieser Schraubenlinien bildet die *Ballsche Schraube*; sie ist nach rechts oder links gewunden, je nachdem der Windungsparameter eine positive oder negative Strecke ist.

Fügen wir der Strecke $h$ noch eine zweite von $F$ ausgehende Strecke $\omega$ der Achse hinzu, der wir ebenfalls bestimmte Länge und bestimmten Sinn geben wollen, so kann $\omega$ die um die Achse stattfindende Winkelgeschwindigkeit darstellen, die von der positiven Seite der Achse aus gesehen im Sinn des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten dreht, je nachdem $\omega$ eine negative oder positive Strecke ist. Soll die in der Zeiteinheit erfolgte Amplitude $\varphi$ bestimmt sein, so ist allerdings auch die Angabe der Einheitsstrecke $e$ erforderlich, weil $\varphi$ den auf dem Einheitskreis gemessenen Bogen von der Länge $\omega$ bedeutet. Die Strecke $e$ denken wir uns in der Folge gegeben.

Durch das Hinzutreten von $\omega$ wird an der Achse $g$ eine bestimmte Translationsgeschwindigkeit von der Größe $h\omega$ hervorgerufen, und es erhält jeder Punkt des Raumes eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe, deren Richtung in die Tangente der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie der Schraube fällt. Der Inbegriff dieser Geschwindigkeiten, die durch $g$, $h$, $\omega$ vollständig erklärt wird, nennt man eine

1) Vergl. Sir Robert S. Ball, A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge 1900, sowie die darauf bezügliche Abhandlung von F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Diese Zeitschrift, Band 47, Seite 237 ff.

*Schraubengeschwindigkeit*; die Gesamtheit der Bewegungen aller Punkte des Raumes eine *Schraubenbewegung*. Wirkt die Geschwindigkeit $\omega$ nur momentan, so heißt die Schraubengeschwindigkeit und die Schraubenbewegung eine *instantane*.

In der Folge haben wir es stets mit instantanen Schraubengeschwindigkeiten zu tun; ist die Schraube $(g, h)$, an der die Schraubengeschwindigkeit wirkt, schon bekannt, so werden wir diese kurz mit $\omega$ selbst bezeichnen, und wo es nicht auf die absoluten Werte der auftretenden Geschwindigkeiten, sondern nur auf ihre Verhältnisse ankommt, die Einheitsstrecke weglassen können.

Sind $p, q, r, u, v, w$ jetzt die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit $\omega$ bezogen auf das Mittelpunktssystem, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos \alpha, \\ q &= \omega \sin \alpha, \\ r &= 0, \\ u &= hp - q\varrho = (h \cos \alpha - \varrho \sin \alpha)\omega, \\ v &= hq + p\varrho = (h \sin \alpha + \varrho \cos \alpha)\omega, \\ w &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Wird jetzt an der festen Achse $o_1$ eine Schraubengeschwindigkeit $\omega_1$ vom Windungsparameter $h_1$, ebenso an der festen Achse $o_2$ eine Schraubengeschwindigkeit $\omega_2$ vom Windungsparameter $h_2$ angebracht, so soll die Differenz $\omega = \omega_2 - \omega_1$ dieser beiden Schraubengeschwindigkeiten dargestellt werden, welche bekanntlich wieder eine Schraubengeschwindigkeit ist, deren Achse wir gerade mit $g$ und deren Windungsparameter wir mit $h$ bezeichnen können. Man erhält aber die Komponenten $p_1, q_1, u_1, v_1$ und $p_2, q_2, u_2, v_2$ der Schraubengeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ inbezug auf das Mittelpunktssystem aus den Gleichungen (1), indem man setzt:

$$\varrho = \mp a, \quad \alpha = \mp \beta.$$

Die Komponenten der gesuchten Schraubengeschwindigkeit $\omega$ sind dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= p_2 - p_1 = (\omega_2 - \omega_1) \cos \beta, \\ q &= q_2 - q_1 = (\omega_2 + \omega_1) \sin \beta, \\ u &= u_2 - u_1 = (h_2 \cos \beta - a \sin \beta)\omega_2 - (h_1 \cos \beta - a \sin \beta)\omega_1, \\ v &= v_2 - v_1 = (h_2 \sin \beta + a \cos \beta)\omega_2 + (h_1 \sin \beta + a \cos \beta)\omega_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Vergleichnng dieser Werte der Komponenten mit den entsprechenden aus den Gleichungen (1) ergibt die Bestimmung von $\alpha$, $\varrho$, $h$ und $\omega$.

Führt man nämlich die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ ein, welche die positive Richtung der Achse $g$ mit den Achsen $o_1$ und $o_2$ einschließt, so ist

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = \alpha - \beta, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta, \tag{3}$$

und es wird alsdann:

$$\frac{\omega}{\sin 2\beta} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\sin \alpha_1}, \tag{4}$$

d. h.

$$\omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2 \tag{5}$$

und

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos 2\beta. \tag{6}$$

Die erste Gleichung sagt aus, daß die resultierende Winkelgeschwindigkeit $\omega$ nach Größe und Sinn durch die Verbindungsstrecke des Endpunktes von $\omega_1$ mit dem Endpunkt von $\omega_2$ dargestellt wird. Sie ist der gesuchten Achse $g$ parallel. Bezeichnen wir jetzt als *positive Seite* von $g$ denjenigen Halbstrahl, dessen Neigungswinkel $\alpha_1$ gegen $o_1$ kleiner oder gleich zwei Rechten ist, so erhält $\omega$ durch die Gleichungen (4) ein bestimmtes Vorzeichen, das positiv oder negativ ist, jenachdem der Pfeil von $\omega$ nach der positiven oder negativen Seite von $g$ gerichtet ist. Die letzte Gleichung zeigt, daß $\omega^2$ eine Invariante inbezug auf jede Änderung des Koordinatensystems ist.

Die Vergleichung der Werte für $u$ und $v$ ergibt ferner:

$$h \sin 2\beta = -h_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + h_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2a \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \tag{7}$$

$$\varrho \sin 2\beta = (h_1 - h_2) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + a \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{8}$$

Durch diese Gleichungen ist die Lage der Achse $g$ und der resultierende Windungsparameter bestimmt. Beachtet man, daß infolge (3) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin 2\beta &= -\sin^2 \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos 2\beta, \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin 2\beta &= +\sin^2 \alpha_1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos 2\beta \end{aligned} \tag{9}$$

identisch bestehen, so wird

$$h \sin^2 2\beta = h_1 \sin^2 \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 ((h_1 + h_2) \cos 2\beta - 2a \sin 2\beta) + h_2 \sin^2 \alpha_1,$$

oder in Rücksicht auf (4)

$$h\omega^2 = h\omega_1^2 + (h_1 + h_2 - 2a \operatorname{tg} 2\beta)\omega_1\omega_2 \cos 2\beta + h_2\omega_2^2. \tag{10}$$

Bezeichnen also $w_1$, $w_2$, $w$ die längs der Achsen $o_1$, $o_2$, $g$ wirkenden Translationsgeschwindigkeiten, sodaß man hat

$$w_1 = h_1 \cdot \omega_1, \quad w_2 = h_2 \cdot \omega_2, \quad w = h \cdot \omega, \tag{11}$$

so folgt:

$$w\omega = w_1\omega_1 + w_2\omega_2 + (w_1\omega_2 + w_2\omega_1) \cos 2\beta - 2a\omega_1\omega_2 \sin 2\beta. \tag{12}$$

Die Größe $w\omega$ ist demnach die Invariante der Translation inbezug auf irgendwelche Änderungen des Koordinatensystems.

Für die Vorstellung der Lage der resultierenden Achse $g$ ist es aber zweckmäßiger, die Entfernungen

$$O_1F = r_1 \quad \text{und} \quad O_2F = r_2$$

ihres Fußpunktes $F$ von $O_1$ und $O_2$ zu berechnen.

Setzt man also

$$r_1 = \varrho + a, \quad r_2 = \varrho - a, \quad r_1 - r_2 = 2a, \tag{13}$$

und führt man noch die Differenz

$$h_2 - h_1 = 2h_0 \tag{14}$$

der Windungsparameter ein, so folgt aus Gleichung (8):

$$\begin{aligned} r_1 \sin 2\beta &= 2(a\cos\alpha_2 - h_0 \sin\alpha_2)\sin\alpha_1, \\ r_2 \sin 2\beta &= 2(a\cos\alpha_1 - h_0 \sin\alpha_1)\sin\alpha_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit (7), so kann man auch $h_1$ und $h_2$ durch den resultierenden Windungsparameter $h$ ausdrücken. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1 &= h + r_1 \operatorname{cotg}\alpha_2 - \frac{2a}{\sin 2\beta}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}. \\ h_2 &= h + r_2 \operatorname{cotg}\alpha_1 - \frac{2a}{\sin 2\beta}\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Durch Elimination von $2a$ aus den Gleichungen (15) erhält man die weitere Beziehung

$$2h_0 = r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 - r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2, \tag{17}$$

also mit (14) die Gleichung

$$r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + h_1 = r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 + h_2 = -q. \tag{18}$$

Addiert man andererseits die Gleichungen (16) und berücksichtigt die letzte der Gleichungen (13), so folgt:

$$h_1 + h_2 = 2h + r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 - 4a \operatorname{cotg} 2\beta \tag{19}$$

oder mit Rücksicht auf (18):

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = h - q. \tag{20}$$

Durch die vorstehenden Formeln ist nun die gesuchte resultierende Schraubengeschwindigkeit vollständig bestimmt.

Mit der Bestimmung der resultierenden Schraubengeschwindigkeit $\omega_2 - \omega_1$ ist aber jetzt ein bestimmtes kinematisches Problem gelöst. Verschraubt man nämlich die resultierende Achse $g$ mittelst der an $o_1$

und $o_2$ bestehenden Schraubengeschwindigkeiten, so beschreibt $g$ zwei Schraubenregelflächen $S_1$ und $S_2$, und es ist aus der Lehre von den Schraubenflächen bekannt, daß die in Gleichung (18) mit $q$ bezeichnete Größe den Verteilungsparameter jeder der beiden Flächen längs ihrer gemeinsamen Kante $g$ darstellt. Bei der Verschraubung von $g$ beschreibt der Fußpunkt $F$ die Striktionslinien der Schraubenflächen; es ist also $F$ der gemeinsame Zentralpunkt und die Normalebene durch $g$ zur Achse $z$ die gemeinsame Zentralebene von $g$. Daraus folgt, daß die beiden Flächen $S_1$ und $S_2$ sich längs der ganzen Erstreckung von $g$ berühren.

Werden beide Flächen selbst mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ resp. $\omega_2$ um ihre Achsen geschraubt, so sagt die Gleichung (5) aus, daß die unendlich fernen Querschnitte ihrer Richtungskegel ohne Gleitung auf einander abrollen. Dies findet also auch für die Flächen $S_1$ und $S_2$ selber statt, und zwar ist $\omega = \overline{\omega_1 \omega_2}$ nach Größe und Vorzeichen die relative Winkelgeschwindigkeit, mit der die Fläche $S_2$ auf der Fläche $S_1$ abrollt. Längs der Erzeugenden $g$ aber findet Gleitung beider Flächen statt, und es ist $w$ die relative Gleitgeschwindigkeit, mit der die Fläche $S_2$ auf der Fläche $S_1$ gleitet. Diese beiden Schraubenflächen bilden also zwei entsprechende Axoide für ein konstantes Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten. Wir können daher sagen, die Axoide gehören zu den Schrauben $(o_1, h_1)$ und $(o_2, h_2)$ und können $h$ als den Gleitparameter derselben bezeichnen. Alsdann ergibt sich das Resultat:

*Sollen die zu den Schrauben $(o_1, h_1)$ und $(o_2, h_2)$ gehörigen Schraubenaxoide für ein gegebenes Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ ermittelt werden, so bestimme man die resultierende Schraubengeschwindigkeit $\omega = \omega_2 - \omega_1$. Alsdann ergeben die Achse $g$, Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und Windungsparameter $h$ derselben die Berührungskante, relative Rollgeschwindigkeit und Gleitparameter der relativen Gleitung der Axoide, während $h \cdot \omega$ die relative Gleitgeschwindigkeit selber ist.*

Bezeichnen wir jetzt im weiteren die Winkel, welche die Tangenten $t_1$ und $t_2$ an die Striktionslinien in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt $F$ mit den Achsen $o_1$ und $o_2$ einschließen, mit $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$, so ist

$$h_1 = - r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1, \quad h_2 = - r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2, \tag{21}$$

und es ergeben sich für den Verteilungsparameter $q$ die Werte:

$$q = r_1(\operatorname{cotg} \vartheta_1 - \operatorname{cotg} \alpha_1) = r_1 \frac{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1 \sin \vartheta_1} \tag{22}$$

und

$$q = r_2(\operatorname{cotg} \vartheta_2 - \operatorname{cotg} \alpha_2) = r_2 \frac{\sin(\vartheta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2 \sin \vartheta_2}. \tag{23}$$

Setzt man andererseits die Werte von $h_1$ und $h_2$ aus (16) in die Gleichung (7) ein, so folgt:

$$h \sin 2\beta = \frac{r_1 \sin \alpha_2}{\sin \vartheta_1} \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) - \frac{r_2 \sin \alpha_1}{\sin \vartheta_2} \cos(\vartheta_2 - \alpha_2),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (22) und (23)

$$h \frac{\sin 2\beta}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} = q \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - 2\beta)}{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1)\sin(\vartheta_2 - \alpha_2)}. \tag{24}$$

Nehmen wir jetzt an, daß der Gleitparameter $h$ verschwindet, so ist nach (20)

$$q = -(h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta).$$

Es verschwindet aber nach (24) $h$ dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta \tag{25}$$

erfüllt ist. Wegen (22) und (23) ist aber in diesm Falle

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = \delta,$$

wo $\delta$ wegen des nicht verschwindenden Verteilungsparameters $q$ von Null verschieden sein muß. Die Gleichung (18) nimmt jetzt die Form an

$$\frac{r_1}{\sin \alpha_1 \sin \vartheta_1} - \frac{r_2}{\sin \alpha_2 \sin \vartheta_2} = 0 \tag{26}$$

oder

$$\frac{r_1 \omega_1}{\sin \vartheta_1} - \frac{r_2 \omega_2}{\sin \vartheta_2} = 0. \tag{27}$$

Die Gleichung (25) sagt aus, daß die Tangenten $t_1$ und $t_2$ in $F$ zusammenfallen, d. h. daß die Striktionslinien sich berühren; die Gleichung (27) zeigt, daß von beiden Striktionslinien entsprechend gleiche Bogen durch die Zentrale gehen. Diese Linien rollen also ohne Gleitung auf einander, und dies ist somit wegen $h = 0$ auch für die Schraubenaxoide der Fall.

*Wenn also die Striktionslinien zweier nicht developpablen Schraubenaxoide sich berühren, so rollen die Flächen ohne Gleitung auf einander ab, und es ist jede eine auf der andern abwickelbare Biegungsfläche.*

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, der Verteilungsparameter $q$ verschwinde, so sind die Axoide zwei developpable Schraubenflächen $D_1$ und $D_2$.

Es ist jetzt

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = 0,$$

d. h. die Striktionslinien oder Rückkehrkurven der Flächen haben in $F$ die gemeinsame Tangente $g$. Trotzdem sich die Striktionslinien be-

rühren, findet Gleitung längs der Berührungskante statt, denn der Gleitparameter

$$h = h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta$$

hat einen von Null verschiedenen Wert. Da jetzt

$$(28) \qquad h_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1, \quad h_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2$$

ist, kann man diesem Ausdruck auch die Form geben:

$$(29) \qquad h = \left(\frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} - \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2}\right) \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin 2\beta},$$

und es verschwindet demnach die Gleitung nur, falls der Klammerausdruck den Wert Null hat, d. h.

*Zwei developpable Schraubenaxoide* $D_1$ *und* $D_2$ *rollen nur dann ohne Gleitung auf einander ab, falls die Bedingung*

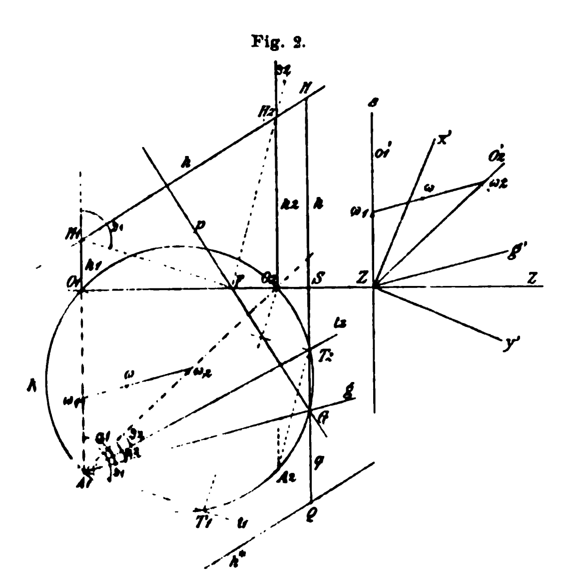
$$(30) \qquad \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2}$$

*erfüllt ist.*

## § 2. Graphische Darstellung instantaner Schraubengeschwindigkeiten.

Sollen die im vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln dazu dienen, diejenigen Bestimmungsstücke zu liefern, welche zur Konstruktion der Schraubenaxoide nach den Methoden der darstellenden Geometrie notwendig sind, so müssen wir darauf ausgehen, die vorigen Formeln graphisch darzustellen und die unbekannten Größen aus den gegebenen durch geometrische Konstruktionen abzuleiten.

Fig. 2.




Wir denken uns im folgenden die Achse $o_1$ am einfachsten vertikal und wählen die durch sie und die Achse $z$ gelegte Vertikalebene als Zeichenebene. Die Achse $o_2$ habe in $z$ den Fußpunkt $O_2$, wobei die Entfernung $O_1 O_2$ wieder mit $2a$ bezeichnet sei. Wir führen jetzt in Fig. 2, rechts von $O_2$ eine Seitenrißebene ein, bestimmt durch ihre vertikale Spur $s$ in

der Zeichenebene. Auf diese Ebene denken wir die Achsen $o_1$ und $o_2$ orthogonal projiziert und diese Projektionen $o_1'$ und $o_2'$ mit der Seitenebene nach rechts in die Tafel der Zeichnung niedergelegt. Die Projektionen $o_1'$ und $o_2'$ schließen dann den Achsenwinkel $2\beta$ ein. Durch diesen Winkel ist somit die Achse $o_2$ im Raume fixiert; ist $2\beta$ negativ, so wird die Seitenebene nach links in die Tafel gelegt.

Ziehen wir jetzt in der Ebene der Zeichnung die Parallelen $o_1$ und $o_2$ durch $O_1$ resp. $O_2$ zu $o_1'$ und $o_2'$, so schneiden sie sich in einem Punkte $A_1$. Durch die Ecken der Dreiecke $A_1 O_1 O_2$ geht dann ein Kreis $K$, dessen Mittelpunkt $M_0$ auf dem Durchmesser $A_1 O_2$ liegt und der den Radius

$$r_0 = \frac{a}{\sin 2\beta}$$

hat. Es mag aber gleich bemerkt werden, daß wir uns von der Bestimmung, $o_1$ solle vertikal sein, sofort befreien können, indem wir dem Punkte $A_1$ auf dem Kreise eine andere Lage geben, wodurch der Achsenwinkel $2\beta$ nicht geändert wird; die zu $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ parallelen Projektionen $o_1'$ und $o_2'$ drehen sich aber um den Punkt $Z$, d. h. es drehen sich auch die Achsen $o_1$ und $o_2$, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern, um die Achse $z$.

Sind jetzt $\omega_1$ und $\omega_2$ die Endpunkte der von $A_1$ aus auf $o_1$ und $o_2$ nach Größe und Sinn aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten, so ist die Strecke $\omega_1 \omega_2$ nach Größe und Pfeilrichtung die resultierende Winkelgeschwindigkeit $\omega$; und die Parallele $g'$ zu ihr durch $Z$ ist demnach die Projektion der gesuchten Schraubenachse. Es ist aber überflüssig, $g'$ zu ziehen, vielmehr können wir die Parallele $g$ zu $g'$ durch $A_1$ selber legen. Sie schließt gegen $o_1$ und $o_2$ die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ ein und schneidet den Kreis $K$ zum zweiten Male in einem Punkte $G$. Dieser Punkt $G$ bestimmt umgekehrt die Gerade $g$ durch $A_1$ eindeutig, wir wollen ihn mit Ball den Bildpunkt von $g$ und den Kreis $K$ überhaupt den Bildkreis nennen.

In der Fig. 2 erscheinen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ als positive Winkel. Um jetzt die Lage der Achse $g$ durch ihren Fußpunkt $F$ in der Achse $z$ zu bestimmen, denken wir die Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ in den durch $O_1$ und $O_2$ gehenden Vertikalen $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ als Strecken

$$O_1 H_1 = h_1 \quad \text{und} \quad O_2 H_2 = h_2$$

aufgetragen und zwar nach oben, falls sie positiv sind. Ziehen wir jetzt die Verbindungslinie $h$ der beiden Punkte $H_1$ und $H_2$, welche die *Parameterachse* heißen möge und durch $G$ die Vertikale $GH$, so schneide

diese die $z$-Achse in einem Punkte $S$. Alsdann ist auch in Rücksicht auf die Vorzeichen:

$$A_1 O_2 = \frac{2a}{\sin 2\beta}; \qquad O_2 G = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_2;$$

$$GS = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \qquad O_1 S = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2;$$

$$O_2 S = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1.$$

Nach den Gleichungen (15) ist demnach:

$$r_1 \sin 2\beta = O_1 S \sin 2\beta - GS \frac{h_0}{a} \sin 2\beta,$$

also

$$r_1 = O_1 S - GS \operatorname{tg} 2\varepsilon,$$

wenn $2\varepsilon$ den Winkel der Parameterachse $h$ gegen die Achse $z$ bedeutet. Fällt man also von $G$ das Lot $p$, welches die *Bildsehne* heißen mag, auf die Parameterachse, so trifft es die Achse $z$ in einem Punkte $F$ derart, daß

$$GS \operatorname{tg} 2\varepsilon = FS$$

ist. Somit wird jetzt

$$r_1 = O_1 S - FS = O_1 F,$$

$$r_2 = O_2 S - FS = O_2 F.$$

Damit sind die Abschnitte $r_1$ und $r_2$ konstruiert, und es ist die Lage der Achse $g$ vollkommen bestimmt. Daraus folgt:

*Fällt man vom Bilde $G$ der Achse $g$ das Lot $p$ auf die Parameterachse, so geht es durch den Fußpunkt $F$ der Achse. Bildsehne und Parameterachse stehen also stets auf einander rechtwinklig.*

Die obenstehenden Ausdrücke der Strecken ergeben weiterhin:

$$-h_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + h_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = \frac{h_2 \cdot O_1 S - h_1 \cdot O_2 S}{\frac{2a}{\sin 2\beta}}$$

$$= \sin 2\beta \frac{h_2 \cdot O_1 S - h_1 \cdot O_2 S}{O_1 S - O_2 S} = \sin 2\beta \cdot SH.$$

Nach (7) ergibt sich daher:

$$h \sin 2\beta = \sin 2\beta \cdot GS + \sin 2\beta \cdot SH,$$

also

$$h = GS + SH = GH,$$

d. h. *Die Vertikale durch das Bild $G$ der Achse $g$ bis zum Schnittpunkt $H$ mit der Parameterachse stellt nach Größe und Sinn den resultierenden Windungsparameter $h$ dar.*

Der Parameter $h$ ist positiv, falls der Endpunkt $H$ oberhalb des Anfangspunktes $G$ der Strecke $GH$ liegt. Ziehen wir endlich noch

die zum Mittelpunkt $M_0$ symmetrisch liegende Parallele $h^*$ zu $h$, welche als *konjugierte* Parameterachse bezeichnet werden kann, und schneidet die durch $G$ gezogene Vertikale diese in $Q$, so ist die in vertikaler Richtung gemessene Distanz der beiden konjugierten Parameterachsen

$$QH = h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = h - q,$$

und da

$$QH = GH + QG = h + QG,$$

so folgt

$$QG = -q, \quad \text{also} \quad q = GQ,$$

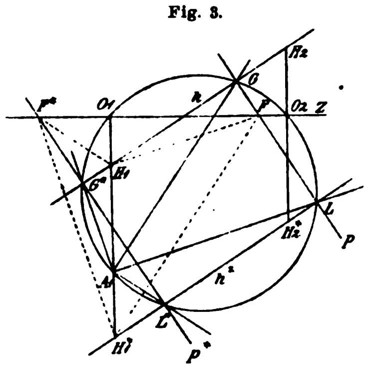
d. h. *Die Vertikale vom Bilde $G$ der Berührungskante bis zur konjugierten Parameterachse stellt nach Größe und Sinn den gemeinsamen Verteilungsparameter beider Axoide dar.*

Zieht man in Fig. 2 im weiteren die Linien $H_1F$ und $H_2F$, so schließen diese nach Definitionsgleichung (21) gegen die Vertikalen $A_1O_1$ und $A_2O_2$ die Steigungswinkel $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ der Striktionslinien ein. Man erhält also die Bilder $T_1$ und $T_2$ der Tangenten $t_1$ und $t_2$ im gemeinsamen Punkt $F$, indem man $A_1T_1$ parallel $H_1F$ und $A_2T_2$ parallel $H_2F$ zieht.

Wenn die Parameterachse $h$ sich rechtwinklig zur Bildsehne $p$ verschiebt, so ändern sich $h_1$ und $h_2$ gleichzeitig um denselben Betrag, und es durchlaufen $T_1$ und $T_2$ auf dem Bildkreis zwei projektive Punktreihen. Rückt die Parameterachse ins Unendliche, so fällt $T_1$ nach $O_1$ und $T_2$ nach $O_2$.

Es mögen jetzt in Fig. 3 $G$ und $L$ die reellen Schnittpunkte der Bildsehne $p$ mit dem Bildkreise sein. Geht die Parameterachse $h$ durch $G$, so verschwindet der Gleitparameter $h$, die Flächen $S_1$ und $S_2$ rollen ohne Gleiten, und es fallen daher $t_1$ und $t_2$, also auch $T_1$ und $T_2$ in einen Punkt $T$ zusammen. Dieser Punkt wird also bestimmt durch die Gleichung (26)

Fig. 3.



$$\frac{r_1}{\sin \alpha_1 \sin \vartheta_1} = \frac{r_2}{\sin \alpha_2 \sin \vartheta_2},$$

welche nach der bekannten Potenzeigenschaft des Kreises aussagt, daß die drei Punkte $G$, $F$ und $T$ in einer Geraden liegen, d. h. daß $T$ mit $L$ zusammenfällt, also $L$ ein Doppelpunkt der projektiven Reihen $T_1$, $T_2$ ist. Die Tangenten $t_1$ und $t_2$ fallen daher in $l$ zusammen und es ist $A_1L$ parallel $H_1F$.

*Sollen demnach zwei Schraubenaxoide ohne Gleitung aufeinander rollen,*

*so muß die Parameterachse durch den Bildpunkt $G$ ihrer Berührungskante gehen.*

Offenbar bestimmt jetzt auch umgekehrt die durch $L$ gehende konjugierte Parameterachse $h^*$ zwei aufeinander abwickelbare Axoide, die $l$ zur Berührungskante und $g$ zur gemeinsamen Tangente der Striktionslinie haben und zu den Windungsparametern

$$h_1^* = O_1 H_1^* \text{ und } h_2^* = O_2 H_2^*$$

gehören. Es ist also $G$ das zweite Doppelelement der projektiven Punktreihen $T_1$ und $T_2$, somit die Bildsehne die Perspektivachse der Projektivität und $A_1 G$ parallel $H_1^* F$.

Es bestimmt aber die Parameterachse $h^*$ auch an der Berührungskante $g$ zwei Axoide, für welche der Verteilungsparameter $q$ verschwindet, so daß $g$, $t_1$ und $t_2$ zusammenfallen. Diese Axoide sind also developpable Schraubenflächen; desgleichen die beiden Axoide, welche die Parameterachse $h$ an der Kante $l$ bestimmt. Daraus folgt:

*Sollen durch die Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ zwei developpable Schraubenaxoide* $\mathrm{D}_1$ *und* $\mathrm{D}_2$ *erzeugt werden, so muß die konjugierte Parameterachse durch den Bildpunkt $G$ der Berührungskante gehen.*

Ziehen wir also schließlich noch die Bildsehne $p^*$ durch die Punkte $G^*$ und $L^*$ der Figur 3, so entsteht der Fußpunkt $F^*$ und es ist

$$A_1 G^* \parallel H_1^* F^* \text{ und } A_1 L^* \parallel H_1 F^*.$$

Durch $F^*$ gehen zwei neue Kanten $g^*$ und $l^*$, und es ist $g^*$ normal zu $l$ und $l^*$ normal zu $g$. Die Parameterachse $h$ bestimmt an $g^*$ zwei abwickelbare, an $l^*$ zwei developpable Axoide und für $h^*$ ist es umgekehrt.

Setzt man noch

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = 2\varkappa$$

so ist nach Gleichung (20)

$$h - q = 2\varkappa.$$

Demnach ist für die Kanten $g$ und $g^*$ in bezug auf die Parameterachse $h$:

$$h_g = 0,\ q_g = -2\varkappa$$

und für die Kanten $l$ und $l^*$

$$q_l = 0,\ h_l = +2\varkappa$$

somit

$$h_l = -q_g.$$

Für die Parameterachse $h^*$ ist dagegen

$$h_1^* + h_2^* + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = -2\varkappa,$$

und es kehren somit die obigen Größen das Vorzeichen um. Fassen wir alles zusammen, so folgt:

*Sind $h_1$ und $h_2$ zwei gegebene Windungsparameter, so bestimmen sie zwei Paare nicht developpabler Axoide für reines Rollen und zwei Paare developpabler Axoide für gleitendes Rollen. Die Bilder der Berührungskanten der ersten Paare sind die Schnittpunkte der Parameterachse $h$, die der beiden andern Paare die Schnittpunkte der konjugierten Achse $h^*$ mit dem Bildkreis. Der gemeinsame Gleitparameter der developpablen Paare ist entgegengesetzt gleich dem gemeinsamen Verteilungsparameter der nicht developpablen Paare, und es ändern diese Parameter nur das Vorzeichen für die neuen Axoide, die entstehen, wenn $h$ mit $h^*$ vertauscht wird.*

Sollen endlich die Axoide deloppabel sein und zugleich ohne Gleiten rollen, so folgt mit $h = q = 0$ aus (20)

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß jetzt die Parameterachse in Figur 4 durch den Mittelpunkt des Bildkreises geht, daß demnach die Bildsehnen $p$ und $p^*$ die Tangenten des Bildkreises in den Endpunkten der Parameterachse sind. Die Developpablen sind in der Weise aufeinander abwickelbar, daß ihre Stricktionslinien in der Abwicklung kongruente Kreise werden. Es sind nämlich die Radien dieser Kreise gleich den Krümmungsradien der Stricktionslinien, haben also die Werte

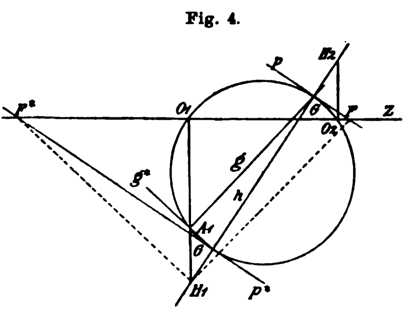
$$(31) \qquad \varrho_1 = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1}, \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2},$$

und somit ist nach Gleichung (30) in der Tat

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Daraus folgt, daß die Striktionslinien im gemeinsamen Punkte $F$ sich oskulieren, also den nämlichen Krümmungskreis besitzen. Der Krümmungsmittelpunkt läßt sich leicht angeben. Ist $h$ in Figur 4 die durch $M_0$ gehende Parameterachse, welche auf $o_1$ und $o_2$ die Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ bestimmt, so sind $G$ und $G^*$ die Bilder, $F$ und $F^*$ die Fußpunkte der Berührungskanten $g$ und $g^*$ zweier Paare developpabler Axoide $D_1$ und $D_2$, die ohne Gleiten rollen. Nach der vorangegangenen Konstruktion ist aber

Fig. 4.




$$A_1 G \parallel H_1 F \text{ und } A_1 G^* \parallel H_1 F^*$$

Da aber $A_1 G$ und $A_1 G^*$ als Sehnen über einem Durchmesser rechtwinklig sind, so ist auch $H_1 F$ rechtwinklig zu $H_1 F^*$, und es ist daher

$$FF^* = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} = \varrho_1 ,$$

d. h. $F^*$ ist der Krümmungsmittelpunkt für $F$ und $F$ der Krümmungsmittelpunkt für $F^*$. Wir schließen also auf den Satz:

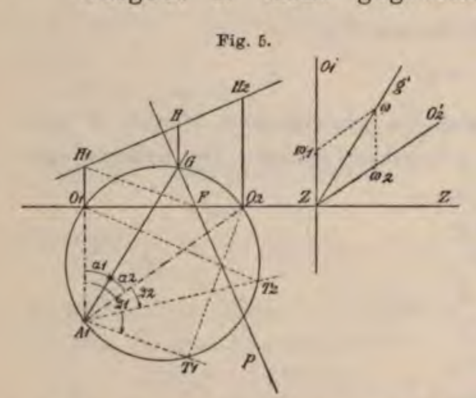
*Geht die Parameterachse durch den Mittelpunkt des Bildkreises und sind die Bildsehnen $p$ die Tangenten des Bildkreises in den Endpunkten, so bestimmen sie zwei Paare developpabler Axoide für reines Rollen. Die Berührungskanten stehen aufeinander senkrecht, und jede von ihnen ist die Krümmungsachse der beiden sich oskulierenden Rückkehrkurven für das andere Paar von Axoiden.*

## § 3. Konstruktive Bestimmung einiger Schraubenaxoide aus gegebenen Bedingungen.

Mit Hilfe der graphischen Darstellung sind wir imstande, die Summe oder Differenz zweier gegebener instantaner Schraubengeschwindigkeiten an den windschiefen Achsen $o_1$ und $o_2$ zu bilden; aber auch umgekehrt jede gegebene Schraubengeschwindigkeit in zwei Komponenten zu zerlegen. Jede derartige Aufgabe hängt mit der Bestimmung zweier Axoide für vorgeschriebene Bedingungen zusammen. Unter den zahlreich sich darbietenden Beispielen mögen im folgenden einige besonders herausgehoben werden.

Aufgabe 1. Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit $(g, h, \omega)$ in zwei Komponenten von gegebenen Achsen zu zerlegen.

Fig. 5.



Es ist klar, daß die Achsen $o_1$ und $o_2$ mit $g$ die nämliche Achse $z$ normal treffen müssen. Sind also in Figur 5 $O_1$, $O_2$, $F$ die Schnittpunkte derselben mit der Achse $z$, $o_1'$, $o_2'$, $g'$ ihre Projektionen auf die Seitenebene, so gibt die Zerlegung von $\omega$ nach $o_1'$ und $o_2'$ sofort $\omega_1$ und $\omega_2$. Um jetzt noch die Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ zu finden, ziehen wir $o_1$ durch $O_1$ parallel $o_1'$, $o_2$ durch $O_2$ parallel $o_2'$. Schneiden sich $o_1$ und $o_2$ in $A_1$, so ist der Kreis durch $A_1 O_1 O_2$ der Bildkreis $K$ unserer Darstellung. Legen wir also $A_1 G$ parallel $g'$, so ist $G$ das

Bild von $g$, und indem wir in der Vertikalen $GH = h$ machen und die Strecke nach oben auftragen, falls $h$ positiv ist, gibt $GF$ die Bildsehne $p$, somit die durch $H$ gezogene Normale zu $p$ die Parameterachse $h$, welche daher auf den Vertikalen in $O_1$ und $O_2$ die gesuchten Windungsparameter

$$h_1 = O_1 H_1 \text{ und } h_2 = O_2 H_2$$

abschneidet.

Es ist damit zugleich die Aufgabe gelöst:

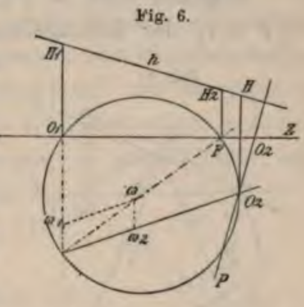
Für zwei gegebene Achsen $o_1$ und $o_2$ diejenigen Schraubenaxoide zu finden, welche sich längs einer gegebenen Kante $g$ berühren und längs dieser einen gegebenen Gleitparameter haben. Das Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten ist $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Zieht man noch $A_1 T_1$ parallel $H_1 F$, so ist $T_1$ das Bild der Tangente $t_1$ der Stricktionslinie; da $p$ die Perspektivachse ist, so müssen sich $O_2 T_1$ und $O_1 T_2$ auf $p$ schneiden, wodurch auch $T_2$ als Bild von $t_2$ bestimmt ist.

Aufgabe 2. **Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit $(g, h, \omega)$ in eine gegebene Komponente $(o_1, h_1, \omega_1)$ und eine unbekannte Komponente $(o_2, h_2, \omega_2)$ zu zerlegen.**

In der Folge können wir die Seitenebenen entbehren, da durch die Bilder die betreffenden Normalen zur Achse $z$ ihrer Richtung nach schon bestimmt sind. Sind (Fig. 6) $O_1$ und $F$ die Fußpunkte der gegebenen Achsen $o_1$ und $g$ in $z$ und ist $\alpha_1$ der von ihnen eingeschlossene bekannte Winkel, so ist dadurch der Bildkreis bestimmt. $o_1$ wird als vertikal angenommen. Trägt man in den Vertikalen durch $O_1$ und $F$ die Windungsparameter $h_1$ und $h$ mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen auf, so ist $H_1 H$ die Parameterachse $h$.

Fig. 6.




Zieht man jetzt $A_1 O_2'$ parallel $\overline{\omega_1 \omega}$, so ist damit das Bild $O_2'$ der gesuchten Achse, also auch $\alpha_2$ gefunden und, indem man die Bildsehne $p$ durch $O_2'$ normal zur Parameterachse zieht, auch der Fußpunkt $O_2$ der Achse $o_2$ selbst bestimmt. Die durch $O_2'$ gezogene Vertikale wird von der Parameterachse in $H_2$ derart geschnitten, daß $O_2' H_2$ der gesuchte Windungsparameter $h_2$ ist.

Die damit gelöste Aufgabe bezüglich der Schraubenaxoide liegt auf der Hand.

Aufgabe 3. **Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit $(g, h, \omega)$ in zwei Rotationsgeschwindigkeiten zu zerlegen, deren Achsen durch die gegebenen Punkte $O_1$ und $O_2$ gehen.**

Da $h_1 = h_2 = 0$ sein soll, fällt in Figur 7 die Parameterachse $h$ mit der Achse $z$ zusammen, und es ist demnach die Bildsehne $p$ vertikal.

Fig. 7.

Macht man also $FG = h$, so ist der durch die drei Punkte $O_1$, $O_2$, $G$ gelegte Kreis der Bildkreis, und es sind somit die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$, welche die Achse $g$ mit $o_1$ und $o_2$ einschließt, bekannt. Der Kreis braucht nicht gezeichnet zu werden, da $\alpha_1$ und $\alpha_2$ schon bei $O_1$ und $O_2$ vorkommen.

Die Zeichnung löst auch die Aufgabe, die Kehlkreisradien $r_1$ und $r_2$ zweier Hyperboloide zu konstruieren, deren Achsen $o_1$ und $o_2$ gegeben sind, und für welche das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bekannt ist. Indem man $g$ parallel $\overline{\omega_1\,\omega_2}$ zieht, erhält man den Bildpunkt $G$ und durch sein Lot auf die Achse $z$ den Fußpunkt $F$, also die Radien $O_1F = r_1$ und $O_2F = r_2$. Die Strecke $GF = h$ ist dann der Gleitparameter der Bewegung. Man bemerkt, daß dieser nur in den extremen Fällen verschwinden kann, wo $G$ mit $O_1$ oder $O_2$ zusammenfällt.

Aufgabe 4. Die auf einem Hyperboloid $H_1$ von gegebener Achse $o_1$ und gegebenem Kehlkreisradius $r_1$ abwickelbare Schraubenfläche $S_1$ von gegebener Achse $o_2$ zu finden.

Gegeben sind in Figur 8, die drei Fußqunkte $O_1$, $O_2$, $F$, wobei $O_1F = r_1$ der Kehlkreisradius ist; ferner der Achsenwinkel $2\beta$, also der Bildkreis. Weil $h_1 = 0$ ist, geht die Parameterachse $h$ durch $O_1$; weil $h = 0$ ist, muß sie sich mit der Bildsehne $p$ durch $F$ auf dem Bildkreis in $G$ rechtwinklig schneiden. Schlägt man also über $O_1F$ als Durchmesser einen Halbkreis, so schneidet er den Bildpunkt $G$ der Berührungskante $g$ aus dem Bildkreis heraus. Damit sind die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$, aber auch die Parameterachse $O_1G$ und damit der Windungsparameter $O_2H_2 = h_2$ der Schraubenfläche bestimmt. Er ist in der Zeichnung der Figur 8 positiv.

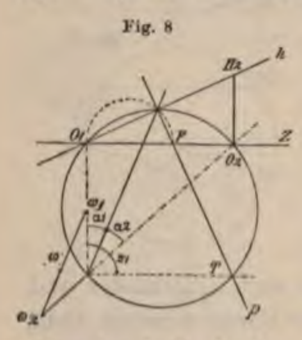


Fig. 8

Der zweite Schnittpunkt $T$ der Bildsehne mit dem Bildkreis ist das Bild der beiden vereinigten Tangenten der Striktionslinien in $F$. Da nach Konstruktion $T$ der Diametralpunkt von $O_1$ ist, so ist der Neigungswinkel $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ wie es sein muß, da beim Hyperboloid $H_1$ die Striktionslinie vom Kehlkreis gebildet wird.

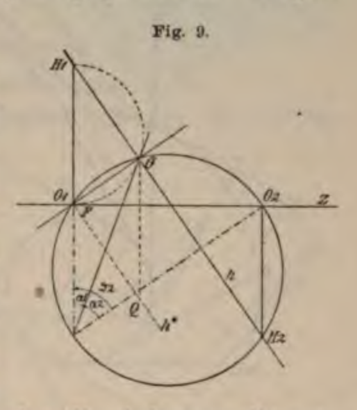
Stehen die Achsen auf einander normal, so fällt $G$ mit $O_1$ und

die Parameterachse $h$ mit $o_1$ zusammen. Das Hyperboloid geht in eine Zylinderfläche und wegen $h_2 = \infty$ die Schraubenfläche in eine Tangentenebene des Zylinders über.

**Aufgabe 5. Zu einer geschlossenen, scharfgängigen Schraubenregelfläche $S_1$ an der Achse $o_1$ die auf ihr abwickelbare Schraubenfläche $S_2$ an der Ache $o_2$ zu finden.**

Bekannt ist in Fig. 9, der Bildkreis, und da $S_1$ eine geschlossene Fläche sein soll, ist $r_1 = 0$, also $F$ in $O_1$; $r_2 = O_2 O_1 = -2a$. Wegen $h = 0$ schneiden sich die Parameterachse und die Bildsehne auf dem Bildkreis rechtwinklig. Ist also $O_1 H_1 = h_1$ der gegebene Windungsparameter von $S_1$, so liegt $G$ auf dem über $O_1 H_1$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis. $H_1 G$ ist also die Parameterachse, welche den Windungsparameter $O_2 H_2 = h_2$ von $S_2$ abschneidet, wodurch diese Fläche vollkommen bestimmt ist, da die Erzeugende $g$ mit den Achsen bekannte Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ einschließt. Der zweite Schnittpunkt $T$ der Bildsehne mit dem Bildkreis fällt nach $O_1$, es ist also die Achse $o_1$ die gemeinsame Tangente der beiden Striktionslinien und zugleich die Striktionslinie von $S_1$ selbst, auf welcher die zweite Striktionslinie ohne Gleitung abrollt. Ist $G^*$ der zweite Schnittpunkt der Parameterachse mit dem Bildkreis, so ist $O_1 G^*$ ein Durchmesser, die konjugierte Parameterachse $h^*$ geht also durch $O_1$ und schneidet somit auf der Vertikalen durch $G$ den Verteilungsparameter $q$ der Axoide ab.

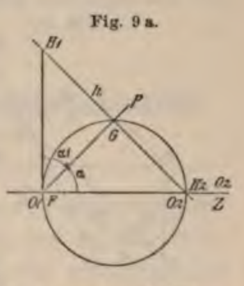
Fig. 9.




Diese Strecke $q$ ist entgegengesetzt gleich mit $h_1$, was auch ohne weiteres aus der Gleichung (18) für $r_1 = 0$ folgt.

Werden wie in Fig. 9a die Achsen $o_1$ und $o_2$ zu einander rechtwinklig, so geht die Parameterachse $h$ durch $O_2$; es ist also $h_2 = 0$, d. h. die Schraubenfläche an $o_2$ geht über in ein Hyperboloid $H_2$, und die Konstruktion zeigt, daß, wenn umgekehrt $h_2 = 0$ sein soll, die Achsen $o_1$ und $o_2$ auf einander rechtwinklig stehen. Die Fig. 9b S. 70 zeigt den ausgeführten Aufriß beider Biegungsflächen unter Zugrundelegung der halben Dimensionen der Fig. 9a und mit $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. Die Flächen drehen sich also mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten, und es gelangen gleichbezeichnete Erzeugende einmal zur Deckung.

Fig. 9a.



Aufgabe 7. Zwei auf einander abwickelbare developpable Schraubenflächen an den Achsen $o_1$ und $o_2$ zu konstruieren, wenn das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gegeben ist.

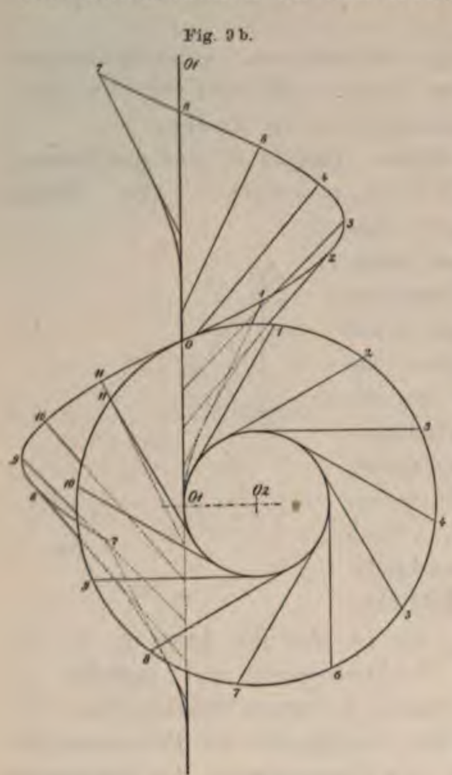


Fig. 9b.

Auf dem bekannten Bildkreis in Fig. 10, ist $G$ bestimmt durch die Parallele $A_1 G$ zu $\overline{\omega_1 \omega_2}$. Der durch $G$ gehende Durchmesser ist die Parameterachse; sie ergibt die reduzierten Ganghöhen $h_1$ und $h_2$ der Rückkehrschraubenlinien der Developpabeln $D_1$ und $D_2$. Die Tangente in $G$ ist die Bildsehne $p$; sie bestimmt die Radien $O_1 F = r_1$ und $O_2 F = r_2$ der Schraubenlinien, während die Tangente $p^*$ im zweiten Schnittpunkt $G^*$ den Krümmungsmittelpunkt $F^*$ der beiden sich in $F$ oskulierenden Schraubenlinien liefert.

Die Berührung kann nie zwischen $O_1$ und $O_2$ stattfinden, was übrigens auch die Gleichung (30) aussagt. Falls statt der Werte von $\omega_1$ und $\omega_2$ die Radien $r_1$ und $r_2$ gegeben sind, finden entsprechend den beiden Tangenten $p$ und $p'$ aus $F$ an den Bildkreis zwei Lösungen statt. Die Berührungskanten $g$ und $g'$ sind im Ebenenbüschel durch die Achse $z$ von den Achsen $o_1$ und $o_2$ harmonisch getrennt und gehören zu entgegengesetzt gleichen Verhältnissen der Winkelgeschwindigkeiten.

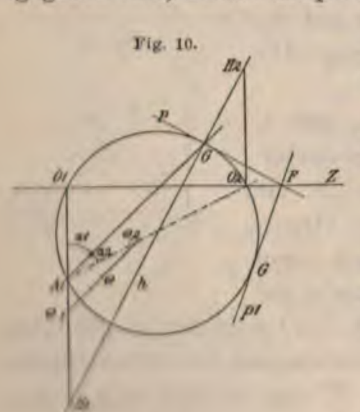


Fig. 10.

Aufgabe 8. Die zu einer geschlossenen, flachgängigen Schraubenfläche (Wendelfläche) gehörige Biegungsfläche zu konstruieren.

Wegen $r_1 = 0$ fällt in Fig. 11, $F$ nach $O_1$, wegen $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $G$ nach dem Diametralpunkt des Bildkreises, den wir vorläufig als gegeben be-

trachten. Es ist also jetzt die Bildsehne $p$ ein Durchmesser, und falls die gesuchte Fläche eine Biegungsfläche der Wendelfläche ist, geht die Parameterachse $h$ durch $G$ und ist Tangente an den Bildkreis. Es ist also $O_1 H_1 = h_1$ und $O_2 H_2 = O_2 G = h_2$. Ist aber umgekehrt $h_1$ gegeben, so muß $G$ auf dem über $O_1 H_1$ errichteten Halbkreis liegen, und man bemerkt, daß von der Achse $o_2$ nur der Fußpunkt $O_2$ (zwei Lösungen) oder nur der Achsenwinkel $2\beta$ (eine Lösung) gegeben werden darf.

Fig. 11.

Soll $2\beta$ ein spitzer Winkel sein, so muß $h_1$ negativ, d. h die Wendelfläche links gewunden sein. Im andern Falle wird $2\beta$ ein stumpfer Winkel. In der Tat ist für $h = 0$ nach (20)

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = -q,$$

aber wegen $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, $r_1 = 0$, $r_2 = -2a$

$$-q = r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 + h_2 = -2a \operatorname{tg} 2\beta + h_2.$$

Daraus folgt:

$$\sin 4\beta = -\frac{a}{h_1},$$

sodaß $2\beta > \frac{\pi}{2}$ wird, falls $h_1$ positiv ist.

Wird die Parameterachse durch $O_2$ gelegt, so entsteht ein nicht abwickelbares Hyperboloid, geht sie durch $O_1$, so degeneriert die Wendelfläche in eine ebene Kreisscheibe, und die entsprechende Schraubenfläche wird developpabel. In allen bisherigen Aufgaben kann die Lage der Achse $o_2$, falls $o_1$ fest ist, auf endlich viele Arten gewählt werden. Den geometrischen Ort dieser Achsen werden wir bald hervortreten sehen.

## § 4. Das Zylindroid, seine Axoidscharen und Normalenparaboloide.

### a. Das Zylindroid.

Liegen die beiden Schrauben $(o_1, h_1)$ und $(o_2, h_2)$ vor, und läßt man das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ alle möglichen Werte durchlaufen, so durchläuft das Bild $\mathfrak{G}$ der resultierenden Achse $g$ den ganzen Bildkreis, während die Bildsehne $p$ sich stets normal zur Parameterachse, also parallel zu sich selbst verschiebt. Die Gesamtheit aller Achsen $g$ erfüllt daher eine Achsenfläche, die durch die Differenz $2h_0$ der Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ allein vollständig bestimmt ist und mit $\mathfrak{G}_{h_0}$ bezeichnet werden mag.

Beziehen wir zunächst die Lage der Achse $g$ auf das Mittelpunktssystem $M(x, y, z)$, indem wir setzen

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = \alpha - \beta, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta,$$

so ergibt die Gleichung (8)

$$\rho \sin 2\beta = a \sin 2\alpha + h_0(\cos 2\alpha - \cos 2\beta). \tag{32}$$

Unter den parallelen Bildsehnen $p$ gibt es aber eine, welche durch den Mittelpunkt des Bildkreises geht. Ihr entsprechen zwei zu einander rechtwinklige Erzeugende $e$ und $f$, welche durch den Fußpunkt $F_0$ in der Bildsehne gehen. Machen wir $e$ und $f$ zu Achsen $x'$ und $y'$ eines neuen Koordinatensystems, so ist zu setzen

$$\rho' = \rho + h \operatorname{cotg} 2\beta, \quad \alpha' = \alpha + \varepsilon, \tag{33}$$

wo $\alpha'$ den Winkel von $g$ gegen $x'$ bedeutet und $2\varepsilon$ der Winkel von $p$ gegen die alte Achse $x$ ist, sodaß die Gleichung besteht

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{h_0}{a}.$$

Die Gleichung (32) ergibt jetzt:

$$\rho' = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \sin(2\alpha'). \tag{34}$$

Setzt man demnach $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y'}{x'}$, so erhält man als Gleichung der Fläche $\mathfrak{G}_{h_0}$

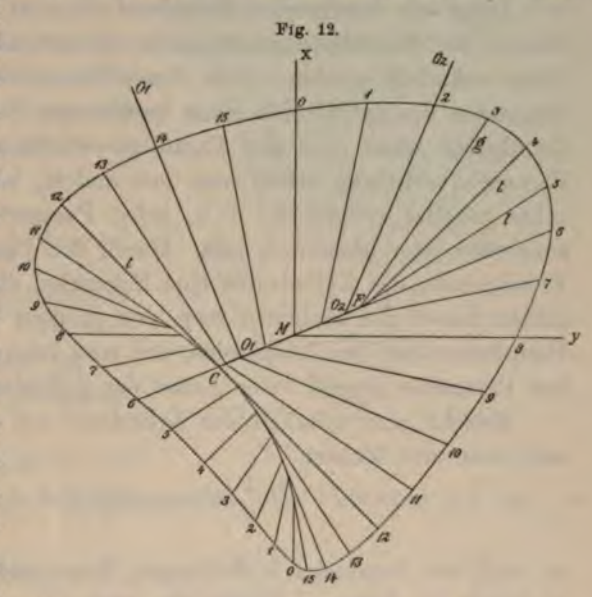
$$z = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \frac{x'y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{35}$$

Dies ist aber in der Ausdrucksweise von Cayley bekanntlich die Gleichung des *Zylindroids*. Den Punkt $F_0$ nennt man den Mittelpunkt, die Erzeugenden $e$ und $f$ die Hauptachsen, die durch die Tangenten $p$ an den Bildkreis bestimmten äußersten Fußpunkte sind Kuspidalpunkte $C$, die durch sie gehenden Kanten Torsalkanten $t$ der Fläche $\mathfrak{G}_{h_0}$. Alle diese Elemente werden durch den Bildkreis sofort geliefert, und es ist auch sehr einfach, eine konstruktive Darstellung der Fläche zu erhalten.

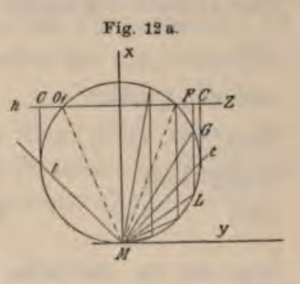
Da nach der Gleichung (35) alle Zylindroide ähnlich sind, so genügt es, dasjenige Zylindroid zu zeichnen[1]), für welches $h_1 = h_2 = 0$ ist, welches also aus einem Büschel vertikaler Bildsehnen entspringt. Wird also der Bildkreis der Fig. 12a in die Ebene $xy$ — die Bildebene für eine schiefe Parallelprojektion — gebracht, so trifft jede Sehne $p$ den Kreis in $G$ und $L$ und die Sehne $O_1 O_2$ in $F$. Trägt man

1) Das Bild eines Modells, welches schon der früheren Ausgabe beigegeben ist, findet sich in der Ausgabe 1900 von Sir R. Ball auf Seite 151.

also in Fig. 12 die Distanz $(x, p)$ in der Achse $z$ von $M$ aus in einem beliebigen Maßstabe, am einfachsten in wahrer Größe auf — nach vorn, wenn $p$ links von $M$ liegt — und zieht man durch den so erhaltenen Punkt Parallelen zu $OG$ und $OL$, so erhält man je zwei Erzeugende des Zylindroids.


Fig. 12.

Will man die Fläche durch einen Rotationszylinder begrenzen, so hat man allen Erzeugenden von der Ache $z$ aus dieselbe wahre Länge zu geben. Die Begrenzungskurve ist eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, während der Umriß eine Steinersche Hypozykloide ist. Das letztere folgt aus dem Umstande, daß außer dem Schnitt mit der Ebene $xy$ die unendlich ferne Ebene noch zwei weitere Erzeugende enthält, nämlich die beiden Tangenten des imaginären Kugelkreises, die sich auf der Achse $z$ schneiden, wie die Erzeugung aus dem Bildkreis zeigt.


Fig. 12a.

Indem wir jetzt die Differenz $h_2 - h_1 = 2h_0$ variieren lassen, nimmt das Parallelbüschel $p$ alle möglichen Richtungen an, und wir erhalten eine ganze Schar von Zylindroiden, die alle aus demselben Bildkreis entstehen. Außer den drei unendlich fernen Geraden und der Doppelkante $z$, haben sie alle noch die Achsen $o_1$ und $o_2$ gemeinsam. Sie bilden also ein Büschel von Regelflächen dritter Ordnung. Daraus folgt:

*Zwei windschiefe Achsen $o_1$ und $o_2$ bestimmen eindeutig ein Zylindroidbüschel.*

Sind jedoch auf den Achsen $o_1$ und $o_2$ die Windungsparameter $h_1$ und $h_2$ gegeben, so ist die Richtung der Bildsehnen und damit ein bestimmtes Zylindroid festgelegt. Die Bildsehne $p$ ist aber auch bestimmt, falls außer den Achsen $o_1$ und $o_2$ eine beliebige dritte Achse $g$ durch ihren Bildpunkt $G$ und ihren Fußpunkt $F$ gegeben ist, d. h.:

*Zwei Schrauben oder drei beliebige Achsen $o_1$, $o_2$, $g$ bestimmen das Zylindroid eindeutig.*

Liegt ein bestimmtes Zylindroid vor, so kann jede das Parallelbüschel der Bildsehnen rechtwinklig schneidende Gerade als Parameterachse aufgefaßt werden. Jede dieser Parameterachsen erteilt jeder Erzeugenden des Zylindroids einen bestimmten Parameter $h$. Eine solche Zuordnung nennt man eine Parameterverteilung. Aus einer gegebenen Parameterverteilung erhält man jede andere, indem man die Parameterachse parallel verschiebt, d. h. jeden Parameter um dieselbe Strecke zunehmen oder abnehmen läßt. Durch den Parameter $h$ wird aus jeder Erzeugenden des Zylindroids eine Schraube, die Parameter der Hauptachsen haben den kleinsten resp. den größten Wert; sie bestimmen die Hauptschrauben des Zylindroids, und man kann aus ihren Werten leicht den Parameter irgend einer Achse des Zylindroids ableiten.

Bezieht man nämlich das Zylindroid auf seine Hauptachsen, und setzt man wie früher:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} + a \operatorname{cotg} 2\beta = \varkappa,$$

so wird der Parameter $h$ derjenigen Erzeugenden, welche den Winkel $\alpha'$ gegen die Achse $x'$ einschließt, nach (7)

$$h = \varkappa - \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha'. \tag{37}$$

Der kleinste Parameter ist also

$$H_1 = \varkappa - \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \tag{38}$$

und der größte:

$$H_2 = \varkappa + \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta}. \tag{39}$$

Somit wird

$$h = H_1 \cos^2 \alpha' + H_2 \sin^2 \alpha'. \tag{40}$$

Dies ist die Ballsche Darstellung der Parameterverteilung, und man bemerkt, daß die von den Endpunkten der Parameterstrecken auf dem Zylindroid gebildete sogenannte *Parameterkurve* $\mathfrak{P}$ in der Ebene $(x'y')$ die Projektion besitzt:

$$(x'^2 + y'^2)^3 - (H_1 x'^2 + H_2 y'^2)^2 = 0. \tag{40}$$

Die Parameterkurven sind also sowohl in der Projektion als auf dem Zylindroid selbst unikursale Kurven 6. Ordnung. Ihre Projektionen auf die Ebene $(x'y')$ werden sofort aus der Darstellung erhalten, indem man wie in Fig. 13, auf jedem durch $O'$ gezogenen Strahl die ent-

sprechende Strecke $h = GH$ direkt nach beiden Seiten von $O'$ aus aufträgt.

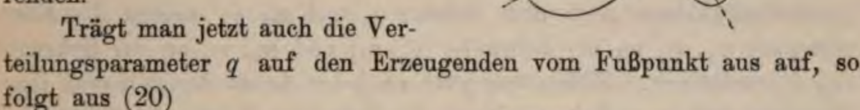
Für $h_1 = h_2$ wird die Parameterachse horizontal und die Konstruktion gibt direkt die von Lewis zuerst gegebene Darstellung der Parameter eines Zylindroids. Geht die Parameterachse durch den Mittelpunkt des Bildkreises, so ist

$$\varkappa = 0,$$

(42) $$\text{also } H_0 = -\frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha',$$

die Hauptparameter sind entgegengesetzt gleich und die Parameterkurve $\mathfrak{P}_0$ ist symmetrisch zu den Hauptachsen und Winkelhalbierenden.

Fig. 13.



Trägt man jetzt auch die Verteilungsparameter $q$ auf den Erzeugenden vom Fußpunkt aus auf, so folgt aus (20)

(43) $$q = h - 2\varkappa = -\varkappa - \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha'$$

oder

(44) $$q = H_0 - \varkappa, \quad \text{d. h.}$$

*Die Kurve $\mathfrak{Q}$ der Verteilungsparameter ist ebenfalls eine Kurve $\mathfrak{P}$, und zwar diejenige Kurve $\mathfrak{P}^*$, die zur konjugierten Parameterachse $h^*$ gehört, somit aus $\mathfrak{P}_0$ durch Verkürzung der Radien um den halben Abstand beider Parameterachsen entsteht.*

Endlich besitzt das Zylindroid $\mathfrak{G}_{h_0}$ selbst längs jeder seiner Erzeugenden einen Verteilungsparameter $g$. Schreibt man die Gleichung der Fläche bezogen auf die Hauptachsen in der Form (34)

$$\varrho' = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \sin 2\alpha',$$

so ist dieser Parameter

(45) $$g = -\frac{d\varrho'}{d\alpha'} = -2\frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha' = 2H_0.$$

Die Parameterkurve $\mathfrak{G}$ des Zylindroids entsteht also aus der symmetrischen Kurve $\mathfrak{P}_0$ durch Verdoppelung aller Radienvektoren.

Den Schnittpunkten $C$ und $C'$ jeder Parameterachse mit dem Bildkreis entsprechen auf dem Zylindroid zwei Achsen $c$ und $c'$ mit dem Parameter Null, also zwei Nullschrauben. Sie liegen symmetrisch zum

Mittelpunkt $F_0$, und ihre Richtungen sind von den Richtungen der Hauptschrauben harmonisch getrennt. In der Schraubentheorie heißen $c$ und $c'$ *konjugierte* Schrauben. Wird die Parameterachse parallel verschoben, so erhalten $c$ und $c'$ gleichen Parameter und es tritt ein neues Paar von Nullschrauben auf.

*Durch die konjugierten Schrauben werden also die Achsen des Zylindroids mit gleichem Parameter involutorisch gepaart; die Hauptschrauben bilden die Doppelelemente dieser geschaarten Involution.*

### b) Die Axoidscharen und Normalenparaboloide.

Auf dem Zylindroid $\mathfrak{G}_{h_0}$ sei eine bestimmte Parameterverteilung durch die Parameterachse festgelegt. Es seien $a$ und $a'$ zwei Schrauben des Zylindroids, $h$ und $h'$ ihre Windungsparameter. Wir erteilen ihnen die Winkelgeschwindigkeiten $\omega$ und $\omega'$. Zerlegen wir diese Schraubengeschwindigkeiten nach den Achsen $o_1$ und $o_2$, so mögen die Komponenten $\omega_1$, $\omega_1'$ an der Schraube $(o_1, h_1)$ und $\omega_2$, $\omega_2'$ an der Schraube $(o_2, h_2)$ entstehen. Bilden wir jetzt an jeder Achse die Differenz ihrer Komponenten, so erhalten wir an der Schraube $(o_1, h_1)$ die Schraubengeschwindigkeit $\omega_1 - \omega_1'$ und an der Schraube $(o_2, h_2)$ die Schraubengeschwindigkeit $\omega_2 - \omega_2'$. Offenbar ist die Summe dieser neuen Schraubengeschwindigkeiten die Schraubengeschwindigkeit $\omega - \omega'$, die somit zu derjenigen Schraube $(g, h)$ des Zylindroids gehört, deren Achse der Verbindungsstrecke $\overline{\omega\omega'}$ parallel läuft. Da man $\omega$ und $\omega'$ stets so wählen kann, daß die Achse $g$ jede beliebige Erzeugende des Zylindroids sein kann, so ergibt sich das Resultat:

*Legt man durch eine beliebige Achse $g$ des Zylindroids diejenigen Schraubenflächen* S *und* S′, *welche zu den Schrauben an zwei beliebigen Achsen $a$ und $a'$ des Zylindroids gehören, so bilden sie ein Paar von Schraubenaxoiden für zwei Winkelgeschwindigkeiten $\omega$ und $\omega'$, deren Verbindungsstrecke $\overline{\omega\omega'}$ der Achse $g$ parallel läuft.*

Halten wir die Schraube $g$ fest, indessen $a$ und $a'$ das Zylindroid durchlaufen, so erhalten wir lauter Schraubenaxoide, die sich längs $g$ berühren. Eine solche einfache Mannigfaltigkeit möge eine *Axoidschar* und $g$ ihr *Träger* heißen.

*Bei gegebener Parameterverteilung ist jede Erzeugende $g$ des Zylindroids Träger einer Axoidschar, deren Achsen das Zylindroid erfüllen.*

Unter den Flächen der Schar figurieren auch die Schraubenflächen $S_1$ und $S_2$ an den Achsen $o_1$ und $o_2$. Da der Gleitparameter $h$ an der Achse $g$ für alle Flächen der Schar derselbe ist, so folgt:

*Die beiden Schraubenaxoide* $S_1$ *und* $S_2$ *schroten mit allen Schraubenflächen der durch sie bestimmten Axoidschar. Die Schar enthält entweder keine oder nur Biegungsaxoide, je nachdem* $S_1$ *und* $S_2$ *mit oder ohne Gleitung rollen.*

Halten wir die Fläche $S_1$, welche zur Schraube $(o_1, h_1)$ gehört, fest, und ist $h$ der Windungsparameter des Trägers $g$, so können wir den vorigen Satz auch so aussprechen:

*Besitzt ein Axoid* $S_1$, *das selbst zur Schraube* $(o_1, h_1)$ *gehört, längs der Kante* $g$ *den Gleitparameter* $h$, *so ist der Ort der Achsen aller entsprechenden Axoide seiner Schar, das durch die Schrauben* $(o_1, h_1)$ *und* $(g, h)$ *bestimmte Zylindroid.*

Eine Axoidschar enthält im allgemeinen zwei Hyperboloide, die zu den konjugierten Achsen $c$ und $c'$ gehören; sie besteht aus lauter Biegungsflächen, falls der Träger mit $c$ oder $c'$ zusammenfällt, und aus lauter developpablen Flächen, falls der Träger mit einer der beiden Achsen $d$ oder $d'$ koinzidiert, die sich mit $c$ und $c'$ auf der Achse $z$ schneiden.

Das Zylindroid allein ohne Parameterverteilung bestimmt eine zweifache Mannigfaltigkeit von Axoidscharen. Jede Achse desselben ist Träger von unendlich vielen Scharen; darunter ist stets eine Schar von Biegungsflächen und eine Schar developpabler Axoide. Die beiden Torsalkanten des Zylindroids dagegen sind Träger von je einer Schar developpabler und aufeinander abwickelbarer Axoide. Die Striktionslinien derselben oskulieren sich sämtlich im Kuspidalpunkt der Torsalkante, während der andere Kuspidalpunkt der Mittelpunkt des gemeinsamen Krümmungskreises ist.

*Liegen daher zwei Kreise, von denen jeder durch den Mittelpunkt des andern geht in zwei zueinander senkrechten Ebenen, so bestimmen ihre Achsen als Torsalkanten ein Zylindroid, welches der Ort der Achsen aller Schraubenlinien ist, die jeden der beiden Kreise im Mittelpunkt des anderen oskulieren.*

Auch die zweifach unendlich vielen Hyperboloide aller Scharen lassen sich übersichtlich gruppieren. Da man die Parameterverteilung stets so wählen kann, daß ein gegebenes Paar konjugierter Achsen den Parameter Null erhält, so bestimmt jede Erzeugende $g$ des Zylindroids mit jedem Paar konjugierter Geraden als Achsen ein System von Axoiden, welches aus lauter Hyperboloiden besteht. Solcher Systeme, welche aber keine Scharen sind, gibt es einfach unendlich viele.

Da die Individuen jeder Axoidschar sich längs des Trägers $g$ berühren, so gehört zu jeder Axoidschar ein eindeutig bestimmtes längs $g$ gemeinschaftliches Normalenparaboloid $P_g$. Dasselbe besitzt

die Achse $z$ und den Träger $g$ zu geradlinigen Striktionslinien. Da die Schar zwei Hyperboloide enthält, deren Achsen mit dem Paar konjugierter Geraden $c$ und $c'$ koinzidieren, so folgt, daß diejenigen Erzeugenden $n$ des Paraboloids, welche $g$ rechtwinklig schneiden, auch $c$ und $c'$ treffen müssen. Daraus folgt der Satz:

*Entsprechend den zweifach unendlich vielen Axoidscharen sind mit einem Zylindroid zweifach unendlich viele Normalenparaboloide verbunden, von welchen jedes durch irgend eine Erzeugende $g$ als Striktionslinie und irgend ein Paar konjugierter Geraden des Zylindroids bestimmt ist.*

Den unendlich vielen Axoidscharen am Träger $g$ entsprechen die Normalenparaboloide von $g$ nach allen Paaren konjugierter Geraden; einer bestimmten Parameterverteilung des Zylindroids entsprechen dagegen die Paraboloide durch ein bestimmtes Paar konjugierter Achsen nach allen Erzeugenden $g$ des Zylindroids. In beiden Fällen bilden die Paraboloide ein Büschel.

*Das Zylindroid ist also unendlich oft der Ort der Striktionslinien aller Paraboloide eines Büschels, welches je durch zwei konjugierte Geraden, die Achse $z$ und die endlich ferne reelle Gerade des Zylindroids bestimmt ist.*

Fällt der Träger $g$ mit $c$ oder $c'$ zusammen, so berührt das Paraboloid $P_g$ das Zylindroid längs $g$; andrerseits besteht die zugehörige Axoidschar aus Biegungsaxoiden. Daraus folgt:

*Jedes Zylindroid ist die Enveloppe einer einfach unendlichen Schar von Normalenparaboloiden und eine Orthogonalfläche aller Axoidscharen, welche aus Biegungsaxoiden bestehen.*

Diesem Satze kann man auch die folgende Form geben:

*Fällt man von allen Punkten einer Erzeugenden $c$ des Zylindroids die Lote auf die konjugierte Erzeugende $c'$, so erfüllen diese ein das Zylindroid längs $c'$ berührendes Paraboloid.*

Für die Hauptschrauben fällt die Achse $c$ mit der konjugierten $c'$ zusammen; ist $g$ eine beliebige Erzeugende des Zylindroids, so berührt das Paraboloid $P_g$ das Zylindroid längs der Hauptschraube, fällt $g$ mit der Hauptschraube selbst zusammen, so findet Oskulation statt, d. h.

*Fällt man von allen Punkten einer Hauptachse des Zylindroids auf eine Erzeugende $g$ derselben die Lote, so erhält man jedesmal ein Paraboloid $P_g$, welches das Zylindroid längs der Hauptachse berührt. Dasjenige Paraboloid, dessen Erzeugende auf der Hauptachse selbst normal stehen, ist das Schmiegungsparaboloid des Zylindroids.*

### § 5. Die Zykloidenverzahnung der Hyperboloidräder.

Nach dem Vorausgegangenen bestimmt jedes Schraubenpaar $(o_1 h_1)$ und $(o_2 h_2)$ für ein gegebenes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$

und $\omega_2$ zwei bestimmte korrespondierende Schraubenaxoide $S_1$ und $S_2$, die sich längs einer Erzeugenden $g$ berühren und zugleich eine einfach unendliche Anzahl weiterer Schraubenflächen S, welche die durch den Träger $g$ bestimmte Axoidschar bilden und deren Achsen $a$ das durch die Schrauben $(o_1, h_1)$ und $(o_2, h_2)$ bestimmte Zylindroid erfüllen. Diese Axoidschar S kann dazu benutzt werden, um zu einer geometrisch exakten Verzahnung der Grundkörper $S_1$ und $S_2$ zu gelangen, also im Falle diese Hyperboloide sind, eine der Zykloidenverzahnung der Stirnräder oder der Kegelräder analoge Verzahnung von Hyperboloidrädern zu erhalten.

Es sei S irgend ein Axoid der Schar, $(a, H)$ seine Schraube, $\Omega$ seine Winkelgeschwindigkeit. Damit S gleichzeitig auf $S_1$ und $S_2$ abschrotet, müssen in Fig. 14, die Endpunkte der drei Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$, $\omega_2$ und $\Omega$ in einer Parallelen $\gamma$ zu $g$ gelegen sein, welche überhaupt für jede Achse $a$ die Größe der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ bestimmt. Sind also $\Omega_1$ und $\Omega_2$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen S auf $S_1$ und $S_2$ rollt, so ist $\Omega_1$ dargestellt nach Größe und Sinn durch die Strecke $\omega_1 \Omega$ und $\Omega_2$ durch die Strecke $\omega_2 \Omega$. Es ist also

Fig. 14.



$$\Omega_2 - \Omega_1 = \omega_2 - \omega_1 = \omega.$$

Gehen wir von den Axoiden zu den Schraubengeschwindigkeiten über, so läßt sich folgendes Resultat aussprechen:

*Bildet man die Differenz der Schraubengeschwindigkeit $\Omega$ an der Schraube $(a, H)$ einerseits mit $\omega_1$ an der Schraube $(o_1, h_1)$, anderseits mit $\omega_2$ an der Schraube $(o_2, h_2)$, so erhält man zwei Schraubengeschwindigkeiten $\Omega_1$ und $\Omega_2$, die zur nämlichen Schraube $(g, h)$ gehören.*

Es mögen jetzt die Achsen $o_1$, $o_2$ und $a$ in einem ruhenden Raume $\Sigma_0$ gelegen sein, mit $o_1$ sei ein Raum $\Sigma_1$, mit $o_2$ ein Raum $\Sigma_2$ fest verbunden. Es sei $l$ irgend eine Erzeugende der Fläche S[1]), so erhält $l$ im Raume $\Sigma_0$ durch Verschraubung der Fläche S um $a$ die absolute Geschwindigkeit $\Omega$. Durch die Schraubenbewegung von S wird aber an der Achse $o_1$ eine Schraubenbewegung der Fläche $S_1$, also auch des Raumes $\Sigma_1$ hervorgerufen, welche der Geraden $l$ die Führungsgeschwindigkeit $\omega_1$ erteilt. Infolgedessen muß sich $l$ relativ in $\Sigma_1$ mit

1) Es kann auch an Stelle von $l$ eine beliebige Gerade, eine Raumkurve, oder selbst eine Fläche treten.

einer Geschwindigkeit bewegen gleich der Differenz der absoluten und der Führungsgeschwindigkeit, d. h. mit der Geschwindigkeit $\Omega_1$.

In analoger Weise bringt die Schraubung von S an der Achse $o_2$ die Geschwindigkeit $\omega_2$ des Raumes $\Sigma_2$ hervor, welche $l$ die Führungsgeschwindigkeit $\omega_2$ erteilt. Relativ zum System $\Sigma_2$ besitzt demnach $l$ eine Geschwindigkeit gleich der Differenz der absoluten und der Führungsgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit $\Omega_2$.

Nach obigem Satze gehören aber $\Omega_1$ und $\Omega_2$ beide zur Schraube $(g, h)$. Infolgedessen beschreibt $l$ in $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ momentan zwei unendlich schmale windschiefe Flächenelemente, die der nämlichen Schraubenfläche angehören, sich also längs der ganzen Erstreckung von $l$ berühren. Läßt man also den Bewegungsvorgang während einer endlichen Zeit bestehen, so wird $l$ relativ in den Räumen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ zwei Flächen $Z_1$ und $Z_2$ erzeugen, die in jedem Momente der Bewegung sich längs der gemeinsamen Erzeugenden berühren. Infolge der Verschiedenheit der Winkelgeschwindigkeiten $\Omega_1$ und $\Omega_2$ erhält jeder Punkt von $l$ momentan gleichgerichtete, aber verschiedene Geschwindigkeiten, sodaß die Flächen $Z_1$ und $Z_2$ schief zur Berührungskante über einander weggleiten. Da $l$ stets eine feste Erzeugende der Fläche S bleibt und S beständig auf $S_1$ und $S_2$ schrotet, so können die Flächen $Z_1$ und $Z_2$ auch erhalten werden, indem man die Fläche S längs der festgehaltenen Grundflächen $S_1$ und $S_2$ abschroten läßt. Dreht sich $S_1$ um $o_1$, so wird durch die stete Berührung von $Z_1$ mit $Z_2$ auch die Fläche $S_2$ an $o_2$ in Bewegung gesetzt; demnach sind $Z_1$ und $Z_2$ zwei entsprechende Zahnflanken für eine sogenannte Kraftverzahnung. Fällt $l$ in der Anfangslage mit $g$ zusammen, so entstehen zwei Zahnflanken, die man als Hypozykloiden- und Epizykloidenflächen bezeichnen kann. Wir erhalten also zunächst das Resultat:

*Entsprechende Zahnflanken $Z_1$ und $Z_2$ zweier Schraubenaxoide oder Hyperboloide müssen in jedem Augenblicke der Bewegung längs der Berührungslinie $l$ von derjenigen Schraubenfläche berührt werden, die zu der Schraube an der momentanen Berührungskante der Axoide gehört. Das Normalenparaboloid dieser Schraubenfläche enthält also die Angriffslinien aller Pressungen, die längs $l$ von der einen Zahnflanke auf die andere ausgeübt werden.*

Die Schraubenfläche S hat in Analogie mit der Zykloidenverzahnung der Stirnräder eine doppelte Bedeutung. Im festen Raume $\Sigma_0$ enthält sie die aufeinanderfolgenden Lagen der momentanen Berührungslinie $l$ beider Zahnflanken; sie kann also als die *Eingriffsfläche* der Verzahnung bezeichnet werden. Andererseits erzeugt sie durch Abschroten auf den Grundflächen die Zahnflanken; sie ist also zugleich die Rollfläche oder

*Wälzungsfläche* der Verzahnung. Es ist dies eine charakteristische Eigentümlichkeit dieser einfachsten Art der Verzahnung; denn es können unendlich viele Eingriffsflächen angegeben werden, welche nicht mit der Wälzungsfläche identisch sind.

Die Fläche S erzeugt aber nur die eine Hälfte jeder Zahnflanke; die andere Hälfte wird erzeugt durch eine passend gewählte zweite Fläche S′ der Axoidschar, deren Achse im allgemeinen auf der anderen Seite der Berührungskante $g$ liegen wird. Zu jeder Zahnflanke gehört dann als Eingriffsfläche eine Kombination zweier Stücke der Flächen S und S′, die in $g$ kontinuierlich mit einer Wendekante in einander übergehen. Es ergibt sich also das Resultat:

*Sind* $S_1$ *und* $S_2$ *zwei gegebene Schraubenaxoide oder Hyperboloide, so kann als Eingriffsfläche jedes passend gewählte Schraubenflächenpaar* S *und* S′ *benutzt werden, das der Axoidschar angehört, welche durch den Träger* $g$ *bestimmt wird. Schroten die Flächen* S *und* S′ *als Wälzungsflächen auf den Grundflächen ab, so erzeugen sie die zur Eingriffsfläche gehörenden Zahnflanken* $Z_1$ *und* $Z_2$.

Wenn die konjugierten Geraden $c$ und $c'$ des Zylindroids reell sind, so existieren unter den Flächen S zwei Hyperboloide, die möglicherweise als Wälzungsflächen benutzt werden können. Sind dagegen beide Grundkörper schon hyperboloidisch, so sind sämtliche Flächen S Schraubenflächen. Da ferner die Flächen S nur dann ohne Gleiten auf $S_1$ und $S_2$ rollen, wenn $g$ selbst eine Nullschraube ist, also wenn $S_1$ und $S_2$ selbst Biegungsflächen sind, was bei zwei Hyperboloiden niemals möglich ist, so ergibt sich folgender Satz:

*Sollen zwei Hyperboloide verzahnt werden, so kann als Eingriffsfläche und gleichzeitig als Wälzungsfläche jedes Paar von Schraubenflächen* S *und* S′ *gewählt werden, das der Axoidschar vom Träger* $g$ *angehört. Diese Flächen sind niemals auf den Grundhyperboloiden abwickelbar, und es kann niemals eintreten, daß die Eingriffs- und Wälzungsfläche selbst ein Hyperboloid ist.*

Dieses Resultat ist nicht ohne Interesse; denn es liegt nahe, in Analogie mit den Stirnrädern und Kegelrädern die Wälzungsfläche unter den unendlich vielen Hyperboloiden zu suchen, welche beide Grundkörper längs $g$ berühren und deren Achsen das durch die drei Geraden $o_1$, $o_2$ und $g$ bestimmte Normalenparaboloid erfüllen. Ist $o$ die Achse eines solchen Hyperboloids, so bestimmt sie mit $o_1$ und $g$ ein Zylindroid $\mathfrak{G}_1$, mit $o_2$ und $g$ ein Zylindroid $\mathfrak{G}_2$. Diese Zylindroide müssen aber längs $g$ verschiedene Gleitparameter besitzen, weil sonst $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ die Schrauben an $o$ und $g$ gemeinsam hätten, also identisch wären. Infolge der Verschiedenheit der Parameter können sich die durch Ab-

schroten des Hyperboloids an $o$ auf $S_1$ und $S_2$ erzeugten Flächen $Z_1$ und $Z_2$ niemals berühren, also auch nicht als Zahnflanken Verwendung finden.

### § 6. Konstruktive Darstellung der Verzahnung.

In den Fig. 15 bis 15d, Taf. III, ist die Verzahnung des einen Hyperboloids in orthogonaler Parallelprojektion durchgeführt. Die beiden Achsen sind der Aufrißebene parallel, $o_1$ speziell vertikal in der Aufrißebene, $o_2$ *vor* derselben und unter dem Achsenwinkel $2\beta = 60^0$ gegen $o_1$ geneigt. Ist $O_1 O_2$ der gegebene kürzeste Abstand beider Achsen, so ist der Bildkreis $K$ bestimmt, die Linie $O_1 O_2$ ist zugleich die Parameterachse $h$, und es kann die gemeinsame Berührungskante $g$ aus dem Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten konstruiert werden. Sei $M$ der Mittelpunkt des ersten Hyperboloids.

Wird $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 4$ gewählt, so ist der Bildpunkt G von $g$ bekannt, und es schneidet die vertikale Bildsehne $p$ durch G aus $O_1 O_2$ die beiden Kehlkreisradien

$$r_1 = OF \quad \text{und} \quad r_2 = O_2 F$$

heraus, während die Strecke $GF$ den Gleitparameter $h$ beider Grundkörper darstellt. Derselbe ist negativ. Durch die Kehlkreisradien sind beide Hyperboloide bestimmt; ihre Aufrisse sind Hyperbeln, welche $g''$ zur gemeinsamen Asymptote haben. Die Hyperboloide sind begrenzt durch die Kehlkreise $K_1$ und $K_2$, sowie durch die oberen Teilkreise $T_1$ und $T_2$, deren Ebenen durch denselben Punkt $A_3$ von $g$ gehen, zu den Achsen rechtwinklig stehen und die Basisebenen der beiden Normalenkegel $N_1$ und $N_2$ der Hyperboloide längs $T_1$ und $T_2$ bilden, welche die Ergänzungskegel genannt werden.

Sind $z_1$ und $z_2$ die Zähnezahlen beider Räder, so verhält sich

$$z_1 : z_2 = \omega_2 : \omega_1 = 4 : 3.$$

Für $z_1 = 24$ wird also $z_2 = 18$, und es ist damit die Teilung $t$ der beiden Teilkreise festgelegt.

Unter den unendlich vielen Schraubenflächen der Axoidschar vom Träger $g$ sind nun die Eingriffs- und Wälzungsflächen $S_a$ und $S_b$ durch ihre Achsen $a$ und $b$ zu bestimmen.

Schlagen wir um $A_3$ einen Kreis, dessen Radius der vierte Teil vom Radius des Teilkreises $T_1$ ist, so ist er zugleich der dritte Teil des Radius von $T_2$, und indem wir von $M''$ aus die beiden Tangenten $a''$ und $b''$ an diesen Kreis legen, sind die Wälzungsflächen bestimmt, und ihre Winkelgeschwindigkeiten sind, absolut genommen:

$$\Omega_a = 4\omega_1 = 3\omega_2 = \Omega_b.$$

Es schroten also $S_a$ und $S_b$ auf dem ersten Grundkörper genau viermal, auf dem zweiten genau dreimal ab.

Die beiden Tangenten $a''$ und $b''$ schneiden aus dem Bildkreis $K$ ihre Bilder $A$ und $B$ heraus, und ihre Bildsehnen bestimmen auf $O_1 O_2$ sowohl die Radien

$$r_a = FF_a, \quad r_b = FF_b$$

der Striktionslinien, als auch die Windungsparameter

$$H_a = AF_a, \quad H_b = BF_b$$

der Wälzungsflächen $S_a$ und $S_b$, wodurch diese vollständig bestimmt sind. Beide Parameter haben negative Werte, d. h. $S_a$ und $S_b$ sind linksgewundene Schraubenflächen. Sie sind in den Fig. 15a und 15b, Taf. III, auseinander gerückt, im Aufriß dargestellt; ihre Grundrisse in Fig. 15c finden wir am einfachsten mittels der horizontalen Schnitte $E_a$ und $E_b$, in welchen die Ebene des Teilkreises $T_1$, sowie die zum Mittelpunkt $M$ symmetrische Ebene des unteren Teilkreises $T_1'$ beide Flächen schneidet.

Die Spurkurven $E_a$ und $E_b$ lassen sich aus dem Aufriß allein durch folgende Überlegung finden. Denken wir uns eine Seitenrißebene normal zur Aufrißebene durch die Achse der Fläche $S_a$ gelegt und mit der vordern Hälfte nach der linksseitigen Hälfte der Aufrißebene niedergelegt, so ist der Seitenriß dem Aufriß kongruent, aber um den vierten Teil der Ganghöhe in der Richtung der Achse nach unten verschoben. Daraus folgt, daß die Kurven $E_a$ und $E_b$ durch den Aufriß von $S_a$ resp. $S_b$ allein bestimmt sind.

Wird also der halbe Schraubengang der Striktionslinien jeder der Flächen $S_a$ und $S_b$ in 6 gleiche Teile geteilt, und werden die durch diese Punkte gehenden 6 Erzeugenden mit der obern und untern Teilkreisebene geschnitten, so erhält man in Fig. 15c von jeder Spurkurve $E_a$ und $E_b$ resp. die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_6$ und $B_0, B_1, \ldots B_6$, wobei die in der untern Teilkreisebene $T_1'$ liegenden Spurkurven die Spiegelbilder zu den obern Spurkurven bezüglich der durch $M'$ gehenden Vertikalen sind. Indem man also gleichbezeichnete Punkte verbindet, erhält man die Grundrisse von $S_a$ und $S_b$ und zugleich auf diesen die Spurkurven in den Kehlkreisebenen. Von diesen sind nur die äußersten Punkte eingetragen. Da beide Wälzungsflächen das Hyperboloid längs $g$ berühren, so berühren $E_a$ und $E_b$ ihren Teilkreis in den Punkten $A_3$ resp. $B_3$.

Um jetzt die Spur der Zahnflanke $Z_1$, also das Zahnprofil $C$ in der Ebene des Teilkreises $T_1$ zu finden, muß die Fläche $S_a$ auf dem Grundkörper derart abgeschrotet werden, daß der momentane Berührungspunkt der Striktionslinie stets auf dem Kehlkreis des Hyperboloides bleibt. Daraus folgt, daß der Querschnitt $E_a$ von $S_a$ in der Teilkreisebene sich

kongruent bleibt, also im Grundriß bloß eine Drehung um den Punkt $M'$ vollzieht. Da $S_a$ viermal auf dem Hyperboloid abgerollt werden kann, so gelangen die 6 Erzeugenden von $S_a$ mit denjenigen Erzeugenden des Hyperboloides zur Deckung, welche einer von $A_3$ ausgehenden Einteilung des Teilkreises in 48 gleiche Teile entspricht. Es seien 0, 1, ..., 6 diese Teilpunkte. Betrachten wir also in der obern Teilkreisebene den Kurvenzug $A_0 A_1 A_2 B_4 B_5 B_6$, legen wir durch diese Punkte die Kreise aus $M'$ und machen wir:

$$C_0 6 = A_3 A_0, \quad C_4 2 = A_3 B_4,$$
$$C_1 5 = A_3 A_1, \quad C_5 1 = A_3 B_5,$$
$$C_2 4 = A_3 A_2, \quad C_6 0 = A_3 B_6.$$

so erhält man das Zahnprofil $C$ der obern Ebene $T_1$. In der untern Ebene betrachten wir den entsprechenden gleich bezeichneten Linienzug $A_0 A_1 A_2 B_4 B_5 B_6$; legen wir durch diese Punkte die Kreise aus $M'$ und machen wir:

$$D_0 6 = B_3 A_0, \quad D_4 2 = B_3 B_4,$$
$$D_1 5 = B_3 A_1, \quad D_5 1 = B_3 B_5,$$
$$D_2 4 = B_3 A_2, \quad D_6 0 = B_3 B_6,$$

so erhalten wir das Zahnprofil $D$ der untern Teilkreisebene. Die Verbindungslinien der Punkte $C$ und $D$ mit gleichem Index ergeben die Zahnflanke $Z_1$, welche in Fig. 15c eingetragen ist. Wird das Profil $D$ an der Vertikalen durch $M'$ gespiegelt, so bildet es nach Festsetzung der Zahnstärke mit $C$ zusammen die Profilierung des Zahnes in der Teilkreisebene $T_1$. Es ist klar, daß das Zahnprofil in der Kehlkreisebene analog bestimmt wird, und daß die Punkte desselben andererseits die Mitten allen Erzeugenden $CD$ der Fläche $Z_1$ sind. Es ergibt sich also das Resultat:

*Die Spurkurven $E_a$ und $E_b$ der Eingriffsfläche bilden für jeden Normalschnitt zur Achse die Eingrifflinie der zugehörigen Zahnprofile, und es sind die Profile selbst bestimmt, weil die korrespondierende Teilung der Eingrifflinie und des Teilkreises bekannt ist.*

Da die Eingrifflinie nicht auf dem Teilkreis ohne Gleitung abrollt, so gehen die Zahnprofile $C$ und $D$ nicht orthogonal durch den Teilkreis und die Zahnachsen nicht durch den Teilkreismittelpunkt $M'$, sondern sie berühren alle einen bestimmten Kreis $R$ um $M'$, den zu kennen für die Zeichnung wichtig ist. Wir gelangen zum Radius dieses Kreises durch folgende Betrachtung:

Die Tangente des Zahnprofils $C$ in $A_3$ ist die Spur der Tangentenebene der Flanke $Z_1$ durch die Berührungskante $g$ in diesem Punkte. Ist aber $l$ irgend eine Erzeugende von $Z_1$, $r$ ihr kürzester Abstand

und $\alpha$ ihr Neigungswinkel gegen die zugehörige Momentanachse $g$, so wird $Z_1$ längs $l$ berührt von einer Schraubenfläche um die Momentanachse vom Windungsparameter $h$, und es ist demnach der Verteilungsparameter $Q$ der Zahnflanke längs $l$:

$$Q = -(h + r \operatorname{cotg} \alpha).$$

Fällt aber $l$ mit $g$ oder mit der Momentanachse in $A_3$ selbst zusammen, so verschiebt sich im ersten Zeitmoment $g$ infolge des Gleitparameters $h$ in sich selbst, während die Momentanachse die benachbarte Lage $g'$ von $g$ annimmt. Im zweiten Zeitelement beschreibt demnach $g$ um $g'$ ein windschiefes Flächenelement, und da $g$ und $g'$ beide auf dem Grundhyperboloid liegen, so steht die Zentralebene des Flächenelementes auf derjenigen des hyperboloidischen Elementes im Zentralpunkt des letzteren senkrecht, und es ist

$$\operatorname{Lim}(r \operatorname{cotg} \alpha) = r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = -q.$$

Demnach ist der gesuchte Parameter nach (20) mit $h_1 = h_2 = 0$,

$$Q = q - h = -2a \operatorname{cotg} 2\beta = FF^*.$$

Durch den Zentralpunkt auf dem Kehlkreis, die zur Tangentenebene des Hyperboloids normale Zentralebene und den Parameter $Q$ ist also das windschiefe Flächenelement von $Z_1$ längs $g$ bestimmt, und es kann für jeden Punkt dieser Linie, welche übrigens für die Gesamtfläche $Z_1$ eine Kuspidalkante ist, die Tangentenebene angegeben werden.

Bezeichnet $u$ die Länge der Erzeugenden $g$ zwischen Kehlkreis und Teilkreis, $\Theta$ den Winkel der Tangentenebene des Punktes $A_3$ gegen die Zentralebene, $\Theta_1$ den Winkel ihrer Spur gegen die Spur der Zentralebene in der Teilkreisebene, so ist, weil $\alpha_1$ den Winkel von $g$ gegen $o_1$ bedeutet:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\cos \alpha_1} = \frac{\frac{u}{\cos \alpha_1}}{Q} = \frac{M'' N_1''}{FF^*}.$$

Macht man also in Figur 15c die Strecken

$$A_3 Q = \frac{FF^*}{2}, \quad QL = \frac{M'' N_1''}{2},$$

so ist $A_3 L$ die verlangte Tangente des Zahnprofils $C$ und bestimmt als Tangente auch den verlangten Kreis $R$ um $M'$.

Die Tangenten sämtlicher Zahnprofile in ihren Schnittpunkten mit dem Teilkreis sind Tangenten an $R$; bezeichnet man also die durch den Zahnmittelpunkt des Teilkreisbogens an $R$ gelegte Tangente als Achse des Zahnprofils, so berühren alle Achsen den Kreis $R$.

Die Gesamtheit dieser Achsen erfüllt für alle Punkte von $g$ ein hyperbolisches Paraboloid, welches durch die Grundkörper allein vollständig bestimmt und von der Wahl der Eingriffsfläche ganz unabhängig ist. In der Kehlkreisebene selbst gehen die Zahnprofile rechtwinklig durch den Kehlkreis; je mehr sich die Teilkreisebene $T_1$ von der Kehlkreisebene entfernt, um so größer ist die Abweichung der Zahnachse vom entsprechenden Teilkreisradius, im unendlich fernen Punkt von $g$ beträgt sie einen rechten Winkel. Die Zahnflanke $Z_1$ würde überall rechtwinklig durch das Hyperboloid gehen können, falls

$$Q = q \quad \text{oder} \quad h = 0$$

wäre, ein Umstand, der aber erfordert, daß die Grundkörper aufeinander abwickelbar sind, was bei Hyperboloiden ausgeschlossen ist.

In der Praxis werden die Zahnräder aber nicht durch horizontale Schnitte, sondern durch die Normalenkegel ihrer Grundhyperboloide begrenzt. Da der Kegel $N_1$ durch Drehung um die Achse $o_1$ sich in sich selbst verschiebt, so bleiben seine Durchdringungskurven mit den Wälzungsflächen beim Abschroten ebenfalls kongruente Kurven, und es ergibt sich sofort der Satz:

*Die Abwicklungen der Durchdringungskurven $E_a^k$ und $E_b^k$ der Eingriffsflächen $S_a$ und $S_b$ mit dem Ergänzungskegel bilden die Eingrifflinien der abgewickelten Zahnprofile des Ergänzungskegels.*

Da die Spurkurven $E_a$ und $E_b$ der Eingriffsflächen in der Ebene des Teilkreises $T_1$ bekannt sind, $T_1$ aber die Basis des Normalenkegels ist, so können aus Grund- und Aufriß von $S_a$ und $S_b$ diese Durchdringungen $E_a^k$ und $E_b^k$ leicht konstruiert werden. In Figur 15c ist für den oberen Teilkreis der Grundriß von $E_a^k$ gestrichelt eingetragen und daraus in Figur 15d die Abwicklung der Zahnprofile ausgeführt, da die Teilung auf dem Teilkreis die alte bleibt. Die Tangenten in den Schnittpunkten des abgewickelten Zahnprofils, sowie die Zahnachsen berühren wieder einen gewissen Kreis $R_0$; man findet den Radius dieses Kreises aus Figur 15c, indem man durch die Spitze des Normalenkegels die erste Tafellinie legt und diese mit der durch $g$ und die Spur $t$ bestimmten Tangentenebene des Punktes $A_3$ in $R_0$ zum Schnitt bringt.

In der Figur 15 ist sodann das abgewickelte Profil für irgend eine Lage desselben auf dem Kegel aufgewickelt, und ein Zahn nebst der Zahnflanke $Z_1$ in Grund- und Aufriß dargestellt. Die Zahnachsen aller aufgewickelten Profile erfüllen dabei ein bestimmtes Rotationshyperboloid, welches $O_1$ zur Achse und die Kegelspitze $N_1$ zum Mittelpunkt hat.

Was endlich die *Begrenzung der Zähne* an Kopf und Fuß betrifft,

so können als Begrenzungsflächen solche Hyperboloide gewählt werden, welche als Axoide paarweise zusammengehören. Da sich zwei solche Flächen längs einer Erzeugenden des Zylindroids berühren, so ist ein Eindringen des Zahnkopfes in den Fuß des Zahnes des andern Rades ausgeschlossen, solange wenigstens die Berührungskante $g$ zwischen $o_1$ und $o_2$ liegt. Handelt es sich um zwei Räder, deren Mittelebenen in die Kehlkreisebenen fallen, so können in diesen Kopf- und Fußkreis in der üblichen Weise angenommen werden; dann sind dadurch die Begrenzungshyperboloide vollständig bestimmt.

Liegt jedoch das Rad an der Teilkreisebene $T_1$, so zeichne man Kopf- und Fußkreis $T_k$ und $T_f$ auf dem Normalenkegel und lege durch diese die Hyperboloide. Da diese selbst Axoide sein sollen, sind ihre Kehlkreise bestimmt. Ihre Radien werden erhalten, indem man die Schnittpunkte der beiden gewählten Kreise mit dem Zylindroid bestimmt und durch diese die Erzeugenden desselben zieht, welche dann auch Erzeugende der gesuchten Axoide sind.

Die Schnittpunkte müssen wie im Grundriß von Fig. 15, mittelst der eingetragenen Querschnitte durch das Zylindroid bestimmt werden. Diese Querschnitte können leicht auf kurze Strecken in der Nähe des Schnittpunktes gezeichnet werden, falls man den Schnitt des Zylindroids mit der Teilkreisebene bereits gezeichnet hat, was mittels des Bildkreises $K$ geschieht. Die Durchdringungen der Hyperboloide mit den Zahnflanken $Z$ sind zwar keine geraden Linien, weichen aber so wenig von solchen ab, daß sie geradlinig gezeichnet werden können.

Bezüglich der sogenannten *Sicherung des Zahneingriffes* ist zu bemerken, daß dazu nötig ist, die Eingrifflinie des zweiten Rades und dessen Zahnprofil zu zeichnen. Die beiden Eingrifflinien stehen dann in der Beziehung, daß durch die Erzeugenden der Eingriffsfläche jedem Punkte der ersten ein bestimmter Punkt der zweiten Eingrifflinie zugeordnet wird. In zwei entsprechenden Punkten findet allemal gleichzeitig Eingriff statt. Denkt man sich in jedem Rade den Kopfkreis eingetragen, so bestimmt dieser auf der zugehörigen Eingrifflinie den einen Endpunkt der Eingriffstrecke, sein entsprechender in der andern Eingrifflinie ist dann der zweite Endpunkt der Eingriffstrecke. Durch die Eingriffstrecke ist dann auch der entsprechende Eingriffbogen des Teilkreises bestimmt, der größer als die Teilung sein muß und diejenigen Stücke jedes Profils, die überhaupt zum Eingriff gelangen. Damit aber hängt wieder die Bestimmung des Gleitweges und des Reibungsfeldes jeder Zahnflanke zusammen, ebenso die Ermittelung der Reibungsarbeit, von welcher die Brauchbarkeit der erhaltenen Zahnprofile insbesondere abhängig ist.

Eine besonders einfache Verzahnung erhält man noch durch eine eigentümliche Spezialisierung. Wenn das Büschel der Bildsehnen $p$ der Achse $z$ parallel läuft, so zerfällt das Zylindroid in drei Ebenen $E_1, E_2, U$, indem sämtliche Erzeugende entweder parallel $o_1$ oder parallel $o_2$ laufen, oder im Unendlichen liegen. Es ist demnach $O_1$ der Bildpunkt sämtlicher Erzeugenden von $E_1$ und $O_2$ der Bildpunkt aller Erzeugenden von $E_2$. Die Parameterachse $h$ ist vertikal, sonst aber unbestimmt; legt man sie durch $O_1$, so sind die Windungsparameter aller Erzeugenden $g$ von $E_1$ unbestimmt, für alle Erzeugenden $l$ von $E_2$ endlich groß und umgekehrt, falls die Parameterachse durch $O_2$ gelegt wird. Somit besteht jede Axoidschar aus lauter Zylinderflächen mit parallelen Achsen, darunter die gemeinsame Tangentenebene S. Schneiden sich also $g$ und $l$, und liegt $g$ in $E_1$, $l$ in $E_2$, so enthält die Axoidschar an $g$ den Zylinder $S_1$ um $o_1$, diejenige an $l$ den Zylinder $S_2$ um $o_2$, während S die gemeinsame Fläche beider Axoidscharen und somit die gemeinsame Tangentenebene der Zylinder $S_1$ und $S_2$ ist.

Infolgedessen kann S als Eingriffs- und Wälzungsfläche sowohl für $S_1$ als $S_2$ benutzt werden. Rollt S ohne Gleitung auf $S_2$ ab, so beschreibt $g$ im Raume $\Sigma_2$ eine developpable Schraubenfläche $Z_2$, deren Rückkehrkurve durch Aufwicklung von $g$ auf den Zylinder $S_2$ entsteht.

Durch die Verschiebung von S an $S_1$ wird aber an der Achse $o_1$ eine Drehung hervorgerufen von der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \frac{r_2\, \omega_2 \cos 2\beta}{r_1},$$

und es beschreibt $g$ im Raume $\Sigma_1$ eine Zylinderevolvente $Z_1$ von $S_1$. Weil $g$ parallel $o_1$ und in S liegt, berühren sich beide Flächen $Z_1$ und $Z_2$ beständig längs $g$; sie bilden also die Zahnflanken einer Linienverzahnung, welches gerade die von Olivier angegebene Verzahnung ist.

Straßburg i. E., im Dezember 1903.

---

## Über ein Problem, das mit der Theorie der Turbinen zusammenhängt.

Von Georg Scheffers in Darmstadt.

In der Theorie der Turbinen tritt das folgende spezielle Problem auf: Eine *inkompressible* Flüssigkeit führt eine solche *stationäre* Strömung aus, bei der erstens die Geschwindigkeit aller Teilchen *dieselbe* Größe hat und bei der zweitens alle Stromlinien auf kongruenten *Drehungskegeln* verlaufen, die zwar verschiedene Spitzen, aber gemeinsame Achse

haben. Die Stromlinien sollen insbesondere so beschaffen sein, *daß sie durch Drehung um die Achse miteinander vertauscht werden*, sodaß also — um einen modernen mathematischen Ausdruck zu gebrauchen — die Strömung alle Rotationen um die Achse gestattet. Die Frage ist, was für Kurven die Stromlinien sind.

Diese Frage ist sofort zu beantworten. Da nämlich der Abstand zwischen zweien der Kegel überall derselbe ist, so zieht die Forderung der konstanten Geschwindigkeit nach sich, daß zwei benachbarte Stromlinien auf demselben Kegel überall gleichen Abstand voneinander haben müssen. Breitet man den Mantel dieses Kegels mit der Spitze $S$ in die Ebene aus, so gehen demnach die Stromlinien dieses Kegels in ebene Parallelkurven über. Auch nach dieser Ausbreitung muß jede Stromlinie durch Rotation um $S$ wieder in eine Stromlinie übergehen. Es handelt sich also um die Bestimmung einer solchen Schar von Parallelkurven in der Ebene, die durch Rotation um einen bestimmten Punkt $S$ der Ebene in sich übergeht. Parallelkurven in der Ebene haben aber gemeinsame Normalen. Demnach gehen alle ihre Normalen aus einer von ihnen hervor, wenn man sie um $S$ dreht, d. h. die Normalen umhüllen einen Kreis, dessen Mitte $S$ ist. Die Stromlinien sind also auf der in die Ebene ausgebreiteten Kegelfläche die orthogonalen Trajektorien der Tangenten eines Kreises, d. h. die *Evolventen eines Kreises mit der Mitte $S$.*[1]) —

Angeregt durch dieses spezielle Problem möchte ich im folgenden *die Frage etwas verallgemeinern.* Die soeben erwähnten Normalen gehen, sobald der Kegelmantel wieder in seine ursprüngliche Form zurückgeführt wird, in geodätische Linien des Kegels über, *die Stromlinien sind also hier orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien.*

Nehmen wir nun an, die Strömung finde nicht gerade längs jener kongruenten Drehungskegel, sondern längs einer Schar von Drehungsflächen überhaupt statt, die eine gemeinsame Achse haben, so können wir nun fragen, unter welchen Umständen die Stromlinien orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien jener Drehungsflächen sind.

Das Problem sei also dies:

*Eine inkompressibele Flüssigkeit befinde sich in einer stationären Strömung um eine Achse so, daß jede Stromlinie durch Drehung um die Achse wieder Stromlinien ergibt. Die Geschwindigkeit der Strömung sei konstant. Die Stromlinien ordnen sich alsdann auf einer Schar von*

---

1) Mein Kollege für Wasserkraftmaschinen, Herr Prof. Pfarr, stellte mir vor einiger Zeit das obige Problem, indem er eine Vermutung aussprach, die durch die hier gegebene Antwort bestätigt wird.

*Drehungsflächen um jene Achse an. Wann sind sie orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien der Drehungsflächen?*[1])

Die feste Achse sei die $z$-Achse, die Differentiation nach der Zeit $t$ sei durch Striche angedeutet. Da die Strömung stationär sein soll, so müssen die Geschwindigkeitskomponenten $x'$, $y'$, $z'$ Funktionen des Ortes $(x, y, z)$, frei von $t$ sein. Die Bedingung der Inkompressibilität ist bekanntlich:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Ist $c$ die konstante Geschwindigkeit, so ist außerdem:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2. \tag{2}$$

Nun seien die in der $xz$-Ebene gelegenen Meridiankurven der Drehungsflächen durch die Gleichung:

$$z = f(x, u)$$

dargestellt, die eine willkürliche Konstante $u$ enthalte. Zu jedem bestimmten Werte von $u$ gehört alsdann eine bestimmte Meridiankurve und damit eine bestimmte Drehungsfläche. Die Gleichungen der zu einem beliebigen Werte von $u$ gehörigen Drehungsfläche sind dann:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = f(r, u), \tag{3}$$

wo $r$, $\vartheta$ bekannte Bedeutung haben. Da jeder Punkt $(x, y, z)$ des Raumes auf einer der unendlich vielen Drehungsflächen liegt, so gehört zu jedem Punkte $(x, y, z)$ ein bestimmtes Wertetripel $r$, $\vartheta$, $u$ vermöge (3). Wir können daher $r$, $\vartheta$, $u$ als Koordinaten statt $x$, $y$, $z$ einführen. Alsdann ist, wenn nach der Zeit differenziert wird:

$$\begin{cases} x' = r'\cos\vartheta - \vartheta' r\sin\vartheta, \\ y' = r'\sin\vartheta + \vartheta' r\cos\vartheta, \\ z' = f_r r' + f_u u'. \end{cases} \tag{4}$$

Ist $F$ eine *beliebige* Funktion von $x$, $y$, $z$ und geht sie durch Einführung der neuen Koordinaten $r$, $\vartheta$, $u$ in eine Funktion $\Phi$ über, so ist bei *jeder* Art der Strömung $F' = \Phi'$, d. h.

$$\frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' = \frac{\partial \Phi}{\partial r}r' + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\vartheta' + \frac{\partial \Phi}{\partial u}u'$$

[1]) Ob die Lösung dieses mathematischen Problems auch wirklich für die Theorie der Turbinen von Nutzen sein kann, wage ich nicht zu entscheiden, wenn ich auch glaube, einen Nutzen darin erblicken zu dürfen, daß man die Querschaufeln, auf die das Wasser aufprallt, längs geodätischer Linien konstruiert. Aber meine Kenntnisse über Turbinen sind so minimal, daß ich auch dies nur mit allem Vorbehalt aussprechen möchte.

oder, wenn die Werte (4) eingesetzt werden:

$$(r' \cos \vartheta - \vartheta' r \sin \vartheta) \frac{\partial F}{\partial x} + (r' \sin \vartheta + \vartheta' r \cos \vartheta) \frac{\partial F}{\partial y} + (f_r r' + f_u u') \frac{\partial F}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial r} r' + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vartheta' + \frac{\partial \Phi}{\partial u} u'.$$

Diese Formel gilt für *alle* Arten der Strömung, also müssen die Koeffizienten von $r'$ rechts und links übereinstimmen, ebenso die von $\vartheta'$ und die von $u'$. Demnach ist:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial x} + \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} + f_r \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ -r \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial x} + r \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \\ f_u \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \end{aligned}$$

also auch, wenn wir diese Gleichungen nach $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u} \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u} \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{1}{f_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u}. \end{aligned}$$

Setzen wir in der ersten Formel $F = \Phi = x'$, in der zweiten $F = \Phi = y'$, in der dritten $F = \Phi = z'$, so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \cos \vartheta \frac{\partial x'}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial x'}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u} \cos \vartheta \frac{\partial x'}{\partial u}, \\ \frac{\partial y'}{\partial y} &= \sin \vartheta \frac{\partial y'}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial y'}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u} \sin \vartheta \frac{\partial y'}{\partial u}, \\ \frac{\partial z'}{\partial z} &= \frac{1}{f_u} \frac{\partial z'}{\partial u}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser drei Werte in (1) erhalten wir die Bedingung der Inkompressibilität ausgedrückt in den neuen Koordinaten $r$, $\vartheta$, $u$, wenn wir noch rechts $x'$, $y'$, $z'$ durch ihre Werte (4) ersetzen. Dabei ist zu beachten, daß $x'$, $y'$, $z'$ Funktionen von $x$, $y$, $z$ allein oder also von $r$, $\vartheta$, $u$ allein sind, sodaß nach (4) auch $r'$, $\vartheta'$, $u'$ Funktionen von $r$, $\vartheta$, $u$ allein sind. Da wir ferner annehmen, daß die Strömung längs der gewählten Drehungsflächen verlaufe, und da auf jeder dieser Flächen $u$ konstant ist, so ist insbesondere

$$u' = 0$$

zu setzen. Somit nimmt die Bedingung der Inkompressibilität die Form an:

$$\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} + \frac{r'}{r} + \frac{f_{ru}}{f_u} r' = 0.$$

Da nun jede Stromlinie durch Drehung um die $z$-Achse wieder in eine Stromlinie übergehen soll, und da sich bei dieser Drehung von den drei Koordinaten $r$, $\vartheta$, $u$ nur $\vartheta$ ändert, so folgt, daß die Geschwindigkeitskomponenten $r'$, $\vartheta'$ *Funktionen von $r$ und $u$ allein*, frei von $t$ und $\vartheta$, sein müssen. Die letzte Bedingung nimmt demnach die einfachere Gestalt an:

$$\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{r'}{r} + \frac{f_{ru}}{f_u} r' = 0$$

oder, nach Division mit $r'$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \log (r' r f_u) = 0,$$

woraus folgt:

$$r' r f_u = U(u),$$

wo $U$ eine Funktion von $u$ allein sein muß. Haben wir somit

$$r' = \frac{U}{r f_u} \tag{5}$$

gefunden, so ergibt sich schließlich $\vartheta'$ aus der Bedingung (2), die vermöge (4) und wegen $u' = 0$ übergeht in:

$$(1 + f_r^2) r'^2 + r^2 \vartheta'^2 = c^2, \tag{6}$$

woraus wegen (5) folgt:

$$\vartheta'^2 = \frac{c^2 r^2 f_u^2 - (1 + f_r^2) U^2}{r^4 f_u^2}. \tag{7}$$

Es sei $\alpha$ der Winkel, den die Stromlinie mit dem Breitenkreise im Punkte $(r, \vartheta, u)$ der zu einem bestimmten $u$ gehörigen Drehungsfläche (3) bildet. Die Richtungskosinus der Tangente der Stromlinie sind proportional $x'$, $y'$, $z'$, die Richtungskosinus der Tangente des Breitenkreises nach (3) gleich $-\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, 0. Also ist

$$\cos\alpha = \frac{-x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

oder nach (4) und (2):

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta' r}{c},$$

daher nach (6) und (5):

$$\sin^2\alpha = \frac{c^2 - \vartheta'^2 r^2}{c^2} = \frac{(1 + f_r^2) r'^2}{c^2} = \frac{(1 + f_r^2) U^2}{c^2 r^2 f_u^2}.$$

Zugleich ist $\alpha$ der Winkel, den die durch den Punkt $(r, \vartheta, u)$ gehende *orthogonale Trajektorie der Stromlinien* unserer Drehungsfläche mit dem

Meridian bildet. Nach einem bekannten Satze der Flächentheorie[1]) ist diese orthogonale Trajektorie dann und nur dann eine *geodätische* Linie der Drehungsfläche, wenn der Ausdruck

$$r^2 \sin^2 \alpha = \frac{(1 + f_r^2)\, U^2}{c^2 f_u^2}$$

auf der Fläche konstant ist, d. h. nur noch von $u$ abhängt. Demnach finden wir:

$$\frac{1 + f_r^2}{f_u^2} = \varphi(u),$$

wo $\varphi$ eine Funktion von $u$ allein sein soll.

Es handelt sich also darum, $f(r, u)$ so als Funktion von $r$ und $u$ zu bestimmen, daß:

$$\varphi(u)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1 \tag{8}$$

ist. Dies läßt sich noch vereinfachen: $u$ war eine Größe, die auf jeder Fläche konstant ist, aber von Fläche zu Fläche variiert. An ihrer Stelle können wir eine andere Größe $v$ in die Gleichungen (3) der Drehungsflächen einführen, die wir als irgend eine Funktion von $u$ wählen dürfen:

$$v = \psi(u).$$

Alsdann wird $f(r, u)$ eine Funktion $f$ von $r$ und $v$, und zwar ist:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d\psi}{du},$$

sodaß die Forderung (8) übergeht in:

$$\varphi(u)\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1.$$

Wir können insbesondere $\psi(u)$ so wählen, daß

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

wird, da $\varphi(u)$ sicher nicht gleich Null ist. Alsdann reduziert sich die Forderung auf:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1.$$

Mit anderen Worten: Wir hätten von vornherein durch passende Wahl der für die einzelnen Drehungsflächen charakteristischen Größe $u$ erreichen können, daß die Gleichung (8) die einfachere Form annimmt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1. \tag{9}$$

1) Vergleiche z. B. des Verf. Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1909, S. 419.

Es war

$$z = f(x, u)$$

die Gleichung der in der $xz$-Ebene gelegenen Meridiankurven. Also hat sich nach (9) ergeben: Für diese Meridiankurven muß $z$ eine solche Funktion von $x$ und $u$ sein, daß

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 \tag{10}$$

ist. Zu jedem bestimmten $u$ gehört eine bestimmte Meridiankurve. Verschieben wir sie aus der $xz$-Ebene heraus längs der $y$-Achse um die Strecke $u$, so erhalten wir eine Schar von unendlich vielen Kurven, die, auf die $xz$-Ebene zurückprojiziert, die unendlich vielen Meridiankurven in dieser Ebene ergeben. Anders ausgesprochen: Diese unendlich vielen verschobenen Kurven sind die Schnittkurven der Ebenen $y = \text{const.}$ $(= u)$ mit der *Hilfsfläche*

$$z = f(x, y),$$

für die nach (10) die Gleichung besteht:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

Die Normale der Fläche $z = f(x, y)$ bildet bekanntlich mit der $y$-Achse einen Winkel, dessen Kosinus gleich

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

ist. Dieser Wert ist aber nach (11) gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d. h. die Tangentenebenen der Hilfsfläche bilden mit der $y$-Achse oder mit der $xz$-Ebene einen Winkel von $45^0$. Die Hilfsfläche ist also eine von der $xz$-Ebene unter $45^0$ aufsteigende *Böschungsfläche* oder, was dasselbe ist, die Fläche der Tangenten einer solchen Kurve, deren Tangenten mit der $xz$-Ebene sämtlich den Winkel von $45^0$ bilden, d. h. einer unter $45^0$ aufsteigenden *Schraubenlinie* auf einem *allgemeinen* Zylinder, dessen Richtung die der $y$-Achse ist.

Die auf der $xz$-Ebene liegende Grundkurve des Zylinders sei mit $k$ bezeichnet. Schneiden wir die Tangentenfläche der Schraubenlinie mit der $xz$-Ebene, so ergibt sich offenbar eine Evolvente der Kurve $k$. Schneiden wir sie mit einer Ebene parallel zur $xz$-Ebene, so ist die Projektion der Schnittkurve auf die $xz$-Ebene ebenfalls eine Evolvente von $k$.

Nach den vorhergehenden Erörterungen ergibt sich demnach:

*Die Meridiankurven der Drehungsflächen in der $xz$-Ebene sind die Evolventen einer beliebigen Kurve $k$ in dieser Ebene.*

Wir fassen das Ergebnis so zusammen:

*Bei einer solchen stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die überall dieselbe konstante Geschwindigkeit hat und die Drehungen um eine Achse gestattet, sind die Strömungslinien auf Drehungsflächen mit dieser Achse gelegen, und zwar sind sie dann und nur dann orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien dieser Drehungsflächen, wenn die Meridiankurven der Flächen die Evolventen einer ebenen Kurve sind.*

*Spezielle Fälle* ergeben sich, wenn die oben erwähnte Böschungsfläche in eine Ebene oder einen Kegel ausartet, d. h. wenn die Kurve $k$ zu einem im Unendlichfernen oder im Endlichen gelegenen Punkte wird. Alsdann sind die Meridiankurven entweder parallele Geraden oder konzentrische Kreise. Im ersteren Falle sind die Drehungsflächen kongruente Kegel, und so kommen wir zu dem am Anfang erwähnten Ausgangsfall zurück, — im anderen Falle sind die Drehungsflächen Ringflächen.

Das Wesentliche des Ergebnisses liegt darin, daß die Meridiankurven der Flächen als Evolventen *Parallelkurven* sind, daß also zwei der Drehungsflächen überall gleichen Abstand voneinander haben. Die Drehungsflächen bilden also eine Schar von *Parallelflächen.*

Es leuchtet ein, daß sich diese Betrachtung erheblich verallgemeinern läßt. Da mir jedoch nur daran lag, gerade jene spezielle, technisch vielleicht nicht unwichtige Frage zu beantworten, und *zwar mit expliziter Entwicklung der Formeln,* so sei nur ganz kurz angedeutet, wie man allgemein ohne Rechnung zum Ziele kommt:

Findet eine beliebige stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit statt, so bilden die von irgend einer Kurve ausgehenden Stromlinien eine invariante Fläche. So lassen sich beliebig viele Flächen konstruieren, längs deren die Strömung stattfindet. Greifen wir eine einfach unendliche Schar von solchen Flächen heraus und verlangen wir, daß die Stromlinien auf diesen Flächen orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien seien, so heißt dies nach einem allgemeinen Satze von Gauß, daß je zwei benachbarte Stromlinien auf einer der Flächen überall gleichen Abstand voneinander haben. Daraus folgt, da die Geschwindigkeit konstant sein, d. h. jeder Stromfaden einen Querschnitt von überall gleichem Inhalt haben muß, daß also auch von jenen Flächen je zwei unendlich benachbarte überall denselben Abstand voneinander haben müssen, d. h.: die Flächen müssen *Parallelflächen* sein.

Darmstadt, den 4. Januar 1904.

# Über das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt.

Von Paul Stäckel in Kiel.

1. Sowohl für die Theorie der krummen Flächen selbst als auch für ihre zahlreichen Anwendungen, besonders auf die Mechanik, ist es von großer Wichtigkeit, daß man jede Fläche in der Nähe eines regulären Punktes durch ein Stück einer einfachen Fläche ersetzen kann. In erster Annäherung läßt sich die Fläche durch ein Stück ihrer Tangentialebene in dem betrachteten Punkte ersetzen. Wie man die zweite Näherung zu wählen hat, wird von den Forderungen abhängen, die man an sie stellt.

Man kann *erstens* verlangen, daß die Ersatzfläche in ihren Krümmungsverhältnissen mit der Urfläche für den betrachteten Punkt vollständig übereinstimmt, und erhält dann nach dem Vorgange von Ch. Dupin (Développements de géométrie, Paris 1813) eine oskulierende Fläche zweiter Ordnung, und zwar, jenachdem der Punkt elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch ist, ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid oder einen parabolischen Zylinder; den Schnitt einer Ebene, die der Tangentialebene in dem betrachteten Punkte parallel ist, mit der oskulierenden Fläche bezeichnet Dupin als zugehörige *Indicatrix*.

Man kann *zweitens* verlangen, daß die Ersatzfläche erkennen läßt, wie die Urfläche zur Tangentialebene liegt, ob nämlich die Urfläche ganz auf der einen oder der anderen Seite der Tangentialebene liegt oder diese schneidet, wobei man dann gleichzeitig eine Näherung für die *Schnittkurve* erhalten will. Da sich bei den entsprechenden Untersuchungen über die Annäherung von Kurven herausgestellt hatte, daß die oskulierende Parabel nicht nur die erste, sondern auch die zweite Forderung erfüllt, daß sie nämlich auch erkennen läßt, auf welcher Seite der Tangente die Kurve liegt, so hat man vielfach ohne weiteres angenommen, daß auch bei den krummen Flächen dasselbe gelte. Diese Unklarheit tritt schon bei Dupin auf und zieht sich durch die ganze Literatur des neunzehnten Jahrhunderts. Sie ist wohl deshalb solange unbemerkt geblieben, weil für die elliptischen und hyperbolischen Punkte in der Tat beide Forderungen zu demselben Ergebnisse, nämlich zu den oskulierenden Paraboloiden führen, und weil man die parabolischen Punkte als „Ausnahmefälle“ nur flüchtig betrachtete.

Auf diese Weise erklärt es sich, daß *manche Lehrbücher geradezu falsche Behauptungen über das Verhalten der Fläche zu ihrer Tangentialebene in einem Punkte enthalten.* Um dies im einzelnen nachzuweisen, werde die Fläche auf ein System rechtwinkliger kartesischer Koordinaten bezogen, deren Anfangspunkt der betrachtete reguläre Punkt $P$ sei; die $xy$-Ebene möge die Tangentialebene, die $z$-Achse die Flächennormale in $P$ sein. Dann hat man für die Umgebung von $P$ die Darstellung:

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + \tfrac{1}{6}(\alpha x^3 + 3\beta x^2y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3) + \cdots\cdots,$$

in der den Veränderlichen $x$ und $y$ hinreichend kleine Werte beizulegen sind. F. Joachimsthal (*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung*, 1. Auflage, Leipzig 1872, 2. Auflage, Leipzig 1881, S. 56—67) sagt dazu: „So erhalten wir für $z$ eine Reihe beginnend mit:

$$\tfrac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2),$$

einem Gliede, welches wegen der beliebigen Kleinheit von $x$ und $y$ in bezug auf das Vorzeichen bestimmend wird für die ganze Reihe, deren nachfolgende Glieder in Beziehung auf $x$ und $y$ von der dritten und höherer Ordnung sind. Die Fläche wird von der Tangentialebene berührt oder geschnitten, jenachdem $r_0t_0 - s_0^2$ größer als Null oder kleiner. Der Grenzfall, daß diese Differenz gleich Null ist, gehört zum ersten.“ Hiermit im wesentlichen identisch ist auch die Darstellung in der dritten, von L. Natani besorgten Auflage (Leipzig 1890, S. 101—103.). In ähnlicher Weise äußern sich auch J. Knoblauch (*Einführung in die allgemeine Theorie der Flächen*, Leipzig 1880, S. 50) und L. Raffy (*Leçons sur les applications géométriques de l'analyse*, Paris 1897, S. 141).

Daß hier ein Fehlschluß vorliegt, zeigt das einfache Beispiel

$$z = \tfrac{1}{2}t_0y^2 + \tfrac{1}{6}\alpha x^3,$$

wo sofort ersichtlich ist, daß die Tangentialebene im Anfangspunkte von der Fläche in einer Neilschen Parabel geschnitten wird, sodaß die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der Tangentialebene liegt. Man darf auch nicht etwa sagen, der Teil der Fläche, der unterhalb der Tangentialebene liegt, sei im Verhältnis zu dem, der oberhalb liegt, nur klein, und dieses Verhältnis komme der Null um so näher, je kleiner die Umgebung des Anfangspunktes angenommen werde, denn man will doch gerade wissen, was sich in einer kleinen Umgebung des Anfangspunktes ereignet.

Worin besteht aber der Fehler? Bei einer Potenzreihe mit einer reellen Veränderlichen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

ist das erste nicht verschwindende Glied für hinreichend kleine Werte von $x$ ausschlaggebend, das heißt, es bestimmt das Vorzeichen der ganzen Summe. Man hat nun stillschweigend angenommen, daß in entsprechender Weise bei einer Potenzreihe mit zwei reellen Veränderlichen

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension, die wirklich auftreten, in demselben Sinne ausschlaggebend sei. Das ist jedoch eine unberechtigte Verallgemeinerung. Wenn die beiden unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$ unendlich klein werden, braucht das nicht bei beiden von derselben Ordnung zu geschehen, vielmehr hindert nichts, daß die Ordnungen verschieden sind, und wenn man daher Näherungsausdrücke gewinnen will, so darf man nicht einfach die Glieder niedrigster *Dimension* beibehalten, sondern hat zu untersuchen, welches die Glieder niedrigster *Ordnung* sind. Die Begriffe: Ordnung und Dimension gehen also bei mehreren Veränderlichen auseinander. Diese Tatsache kommt schon zur Geltung, wenn man eine algebraische Kurve untersucht, deren Gleichung in der Form vorliegt, daß ein Polynom in $x$ und $y$ gleich Null gesetzt wird, und sie war den Mathematikern des 18. Jahrhunderts, ja schon Newton wohlbekannt. Man hätte also nur die bei der Untersuchung der Kurven üblichen Methoden auf die Schnittkurve der Fläche und ihrer Tangentialebene anzuwenden brauchen, um zu dem richtigen Resultate zu gelangen. Wie aber in einem Flusse oft zwei Strömungen lange nebeneinander laufen, ohne sich zu vermischen, so ist das auch mit den Methoden der Kurvendiskussion und dem Ansatze von Dupin gegangen. So sehen wir, daß Salmon (*On the geometry of three dimensions*, London 1862, deutsche Bearbeitung von Fiedler, Leipzig 1880, S. 9—12) zuerst die Natur der Schnittkurven ganz richtig charakterisiert, dann aber die Fläche ohne weiteres durch das oskulierende Paraboloid ersetzt (vergl. auch Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, 2. Auflage, Leipzig 1875, §§ 87 und 102).

Die richtige Darstellung des Sachverhaltes findet man bei G. Scheffers (*Einführung in die Theorie der Flächen*, Leipzig 1901, S. 138—141), der beweist, daß bei geeigneter Wahl der $x$- und $y$-Achse „die Schnittkurve der zur Tangentenebene parallelen Ebenen in der Nähe von $P$ im allgemeinen durch die Kurve:

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6} \alpha x^3$$

ersetzt werden darf“. Im allgemeinen bedeutet hier, daß $\alpha$ als von Null

verschieden vorausgesetzt wird; verschwindet $\alpha$, so bedarf es einer weiteren Untersuchung. Wie die einfachen Beispiele

$$z = y^2 \pm x^4$$

zeigen, ist es nicht erlaubt, die einschränkenden Worte „im allgemeinen" wegzulassen; in dieser Beziehung bedarf daher die sonst korrekte Darstellung von V. und L. Kommerell (*Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen*, Leipzig 1903, S. 71) der Berichtigung.

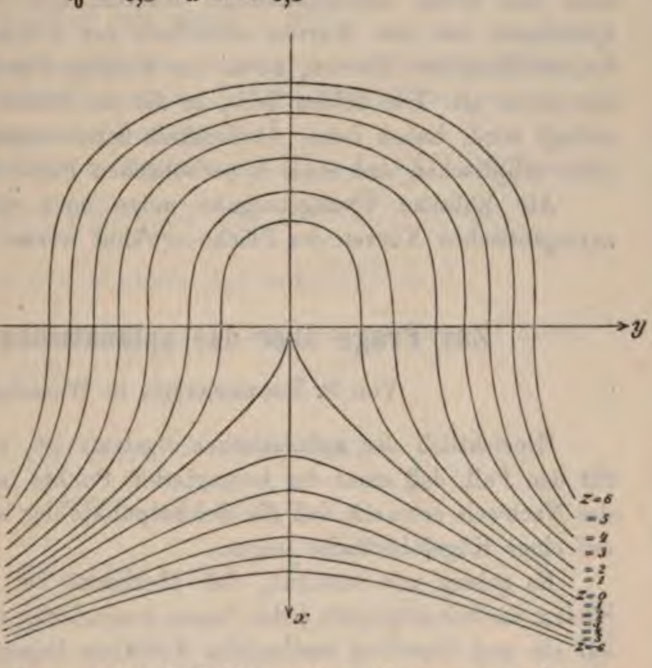
2. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man, um das Verhalten einer Fläche zu ihrer Tangentialebene in einem parabolischen Punkte zu charakterisieren, notwendig Flächen dritter oder höherer Ordnung heranziehen muß. Am einfachsten ist der Fall, daß man mit einer Fläche dritter Ordnung:

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6} \alpha x^3$$

auskommt. Im Anschluß an eine Vorlesung über die Theorie der krummen Flächen, die ich im Wintersemester 1902/03 gehalten habe, ist diese Fläche von zweien meiner Zuhörer, den Herren O. Losehand und W. Quidde, für die Werte

$$t_0 = 0{,}5 \quad \alpha = -0{,}3$$

modelliert worden; bei dieser Wahl der Konstanten treten nämlich die Eigenschaften der Fläche besonders deutlich hervor. Zusammen mit den Modellen der Paraboloide bildet dieses Modell eine Ergänzung zu den drei Kartonmodellen über die Krümmung der Flächen, die Chr. Wiener entworfen hat und die als Serie XXII des früheren Brillschen, jetzt Schillingschen Verlages erschienen sind; dieselbe Verlagshandlung liefert auch Abgüsse des Gipsmodells der Fläche dritter Ordnung.



Die umstehende Figur zeigt in Verkleinerung auf $\frac{2}{3}$ die Schnitte der Fläche mit Ebenen, die in je 1 cm Abstand parallel zur $xy$-Ebene gelegt sind. Die Schnitte für positives $z$ hat man sich oberhalb, die für negatives $z$ unterhalb der Ebene der Zeichnung zu denken. Diese Ebene selbst ist die Tangentialebene der Fläche im Anfangspunkte der Koordinaten; sie wird von der Fläche in einer Neilschen Parabel geschnitten. Die Schnitte parallel der $xz$-Ebene sind kongruente Parabeln zweiter Ordnung. Die in der $yz$-Ebene selbst liegende Parabel bildet die Grenze zwischen dem Gebiet der elliptischen und dem der hyperbolischen Punkte; sie besteht aus lauter parabolischen Punkten. Die Schnitte parallel der $xz$-Ebene sind kongruente Parabeln dritter Ordnung. Hieraus geht, nebenbei gesagt, hervor, daß die Fläche eine Schiebungsfläche ist.

Die Figur der Schnitte mit Ebenen parallel der $xy$-Ebene bringt, wie Herr Quidde bemerkt hat, sehr schön zum Ausdruck, daß im Anfangspunkte ein Übergang von den elliptischen zu den hyperbolischen Punkten stattfindet. Wenn man den Kurvenstücken oberhalb der $y$-Achse ihr Spiegelbild in bezug auf diese Achse hinzufügt, so erhält man eine Schar ellipsenähnlicher Kurven, und wenn man das Entsprechende bei den Kurven unterhalb der $y$-Achse tut, eine Schar hyperbelähnlicher Kurven, wobei die Neilsche Parabel den Asymptoten äquivalent ist. Die beiden Teile, in die die Fläche durch die $yz$-Ebene zerlegt wird, haben daher Ähnlichkeit beziehungsweise mit der Hälfte eines elliptischen und eines hyperbolischen Paraboloids.

Als hübsche Übungsaufgabe möge noch die Bestimmung der asymptotischen Kurven der Fläche erwähnt werden.

---

## Zur Frage über das aplanatische System.

Von S. Trozewitsch in Warschau.

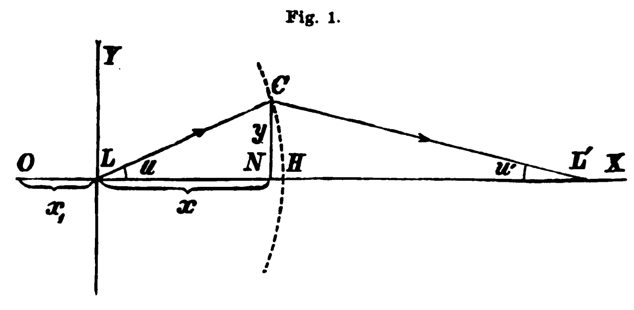
Hinsichtlich des aplanatischen Systems ist, meines Wissens, nur für den Fall, daß einer der konjugierten Punkte im Unendlichen liegt, der Nachweis erbracht, daß die Schnittpunkte der konjugierten Strahlen auf einer Kugeloberfläche liegen.

Es gelang mir darzutun, daß überhaupt bei einem aplanatischen System die Schnittpunkte jedes Paares konjugierter meridionaler Strahlen auf ein und derselben bestimmten Kreislinie liegen.

Der Nachweis ist unter Zuhilfenahme der analytischen Geometrie erbracht: Es mag in der Zeichnung (Fig. 1) der Punkt $C$ den Durchschnittspunkt irgend zweier konjugierten Strahlen $LC$ und $L'C$ dar-

stellen. Wenn nun das System (welches wir in der Zeichnung nicht darstellen) für die Punkte $L$ und $L'$ (Fig. 1) aplanatisch ist, so ist der Quotient $\frac{\sin u'}{\sin u}$ konstant. Wir wollen diesen Quotienten durch $\frac{m}{n}$ ausdrücken, so daß also $\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{m}{n}$.

Fig. 1.




Aus dem $\triangle LCL'$ folgt, daß

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{LC}{L'C},$$

also:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{m}{n}.$$

Fragen wir nun: Was stellt der geometrische Ort solcher Punkte wie $C$ dar, für welche das Verhältnis ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten $L$ und $L'$ konstant und gleich $\frac{m}{n}$ ist?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir als Abszissenachse $LL'$, als Ordinatenachse die Senkrechte zu ihr, errichtet im Punkte $L$. $x$ und $y$ seien die Koordinaten des Punktes $C$.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $LCN$ und $CNL'$ erhalten wir:

$$LC = \sqrt{LN^2 + CN^2} \quad \text{und} \quad L'C = \sqrt{(NL')^2 + CN^2},$$

oder:

$$LC = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad L'C = \sqrt{(NL')^2 + y^2}.$$

Es sei nun die Entfernung zwischen den gegebenen Punkten $L$ und $L'$ gleich $a$, so daß:

$$LL' = a.$$

Dann ist:

$$NL' = LL' - LN = a - x.$$

Daraus folgt:

$$(NL')^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

und

$$L'C = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}.$$

Das heißt:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}} = \frac{m}{n},$$

folglich:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 - 2ax + x^2 + y^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

woraus wir finden, daß:

$$(m^2 - n^2)x^2 + (m^2 - n^2)y^2 = 2m^2ax - m^2a^2,$$

also

$$x^2 + y^2 - \frac{2m^2ax}{m^2 - n^2} = -\frac{m^2a^2}{m^2 - n^2}.$$

Fügen wir zu beiden Teilen der letzten Gleichung

$$\frac{m^4a^2}{(m^2 - n^2)^2}$$

hinzu, so erhalten wir nach einigen Abkürzungen:

$$\left(x - \frac{m^2a}{m^2 - n^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{mna}{m^2 - n^2}\right)^2,$$

das aber ist die Gleichung für den Kreis, dessen Zentrum auf der $X$-Achse liegt in einer Entfernung $x_1 = \frac{m^2a}{m^2 - n^2}$ vom Koordinatenanfangspunkt $L$ und dessen Radius:

$$r = \frac{mna}{m^2 - n^2}$$

ist.

Daraus folgt nun, daß *bei einem aplanatischen System die Durchschnittspunkte entsprechend konjugierter Strahlen auf einer Kreislinie liegen.*

Für die Untersuchung der erhaltenen Resultate führen wir der Einfachheit halber eine besondere Längeneinheit ein, und zwar nehmen wir an, daß $LH = m$ (Einheiten), wobei $H$ der Durchschnittspunkt der erwähnten Kreislinie mit der Linie $LL'$ ist.

Dann ist:

$$L'H = n,$$

weil nach Voraussetzung:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H} = \cdots = \frac{m}{n}.$$

Ferner:

$$LL' = LH + HL' = m + n.$$

Folglich:

$$x_1 = \frac{m^2a}{m^2 - n^2} = \frac{m^2(m + n)}{m^2 - n^2} = \frac{m^2}{m - n}$$

und

$$r = \frac{mna}{m^2 - n^2} = \frac{mn(m + n)}{m^2 - n^2} = \frac{mn}{m - n}.$$

Schließlich erhalten wir folgende Formeln:

$$x_1 = \frac{m^2}{m - n} \quad \text{und} \quad r = \frac{mn}{m - n}.$$

1. Wenn $m < n$, dann ist $x_1 < 0$, d. h. dann kommt das Zentrum des Kreises links vom Koordinatenanfangspunkt $L$ zu liegen. Dieser Fall ist in unserer Zeichnung (Fig. 1) zur Darstellung gebracht.

2. Ist $m > n$, dann ist $x_1 > 0$, d. h. das Zentrum des Kreises kommt rechts von dem Koordinatenanfangspunkt zu liegen.

3. Ist $m = n$, dann ist $x_1 = \infty$ und $r = \infty$, d. h. die Kreislinie $CH$ verwandelt sich in eine gerade Linie, welche durch den Abschnitt $LL'$ in der Mitte hindurchgeht.

Bemerken wir noch, daß, wenn der Punkt $L'$ ins Unendliche zu liegen kommt, $n = \infty$ wird und $L$ sich in den Brennpunkt des Systems verwandelt, und $LH = m = F$, wo $F$ die Brennweite des Systems bedeutet. Andererseits ist dann

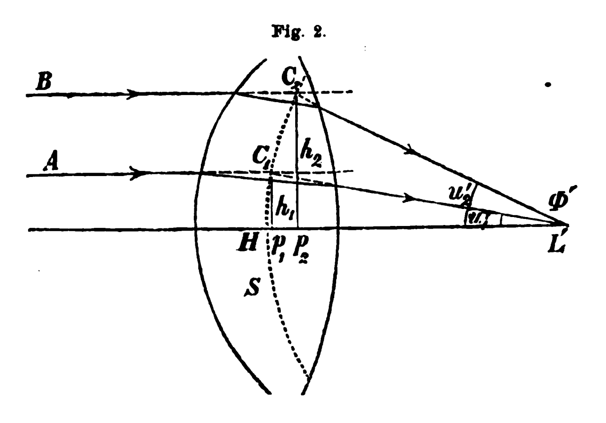
$$x_1 = \left(\frac{m^2}{m-n}\right)_{n=\infty} = 0$$

und

$$r = \frac{mn}{m-n} = \left(\frac{m}{\frac{m}{n} - 1}\right)_{n=\infty} = -m.$$

Daraus schließen wir, daß, wenn einer von zwei konjugierten aplanatischen Punkten im Unendlichen liegt, das Zentrum unserer Kreislinie mit dem andern Punkt zusammenfällt (welcher dann als Brennpunkt des Systems erscheint), und der Radius dieser Kreislinie (abgesehen vom Vorzeichen) gleich der Brennweite des Systems wird (Fig. 2).

Fig. 2.




Diese Bemerkungen könnten für die Feststellung der Genauigkeit des aplanatischen Systems vermittels der Zeichnung von Nutzen sein.

Bis jetzt zogen wir nur solche Punkte in Betracht, welche in der Ebene der Zeichnung liegen, die als durch das Achsensystem gelegt gedacht wird. Solche Strahlen heißen Meridionalstrahlen. Dabei überzeugten wir uns, daß bei aplanatischem System die Durchschnittspunkte konjugierter Strahlen auf einer Kreislinie liegen. Faßt man nun überhaupt alle Strahlen ins Auge, welche in das System fallen, dann ist es nicht schwer sich zu überzeugen, daß die Durchschnittspunkte konjugierter Strahlen überhaupt auf einer Kugeloberfläche liegen, deren Zentrum und Radius natürlich mit Zuhilfenahme derselben Formeln bestimmt werden, welche für die Kreislinie aufgestellt waren:

$$x_1 = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \quad \text{und} \quad r = \frac{mna}{m^2 - n^2}.$$

Von Interesse ist, daß:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H},$$

weil:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} : \frac{mna}{m^2 - n^2} = \frac{m}{n}$$

und:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H} = \cdots \frac{m}{n}.$$

Warschau, im Oktober 1903.

---

# Kleinere Mitteilungen.

## Graphisch-numerische Methode zur beliebig genauen Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung.

Die vorgelegte algebraische oder transzendente Gleichung sei

$$(1) \qquad f(x) = 0.$$

Bringt man Gleichung (1) auf die Form

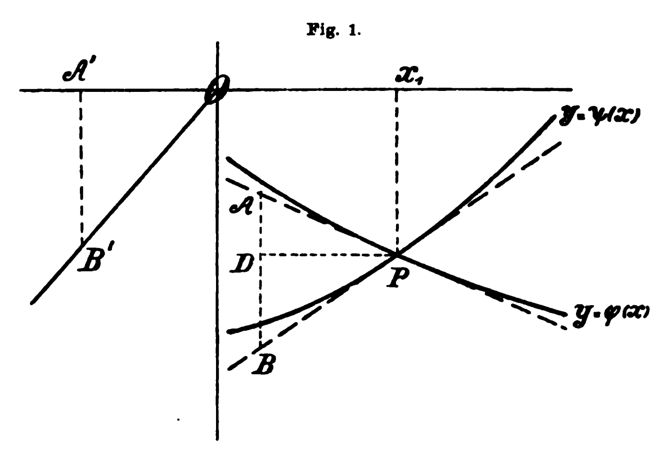
$$\varphi(x) = \psi(x)$$

und zeichnet die beiden Kurven:

$$(2) \qquad y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad (3)\ y = \psi(x),$$

in einem Cartesischen Koordinatensystem auf, so bedeuten die Abszissen der Schnittpunkte jener Kurven die Wurzeln der Gleichung (1), wie bekannt.

Fig. 1.




Ein solcher Schnittpunkt sei $P$; die entsprechende Wurzel sei $x_1$. Durch Abmessen in der (maßstäblichen) Zeichnung erhält man den Näherungswert $x_1'$ für die Wurzel $x_1$; damit ergebe sich durch Einsetzen in (2) und (3):

$$\varphi(x_1') = y_1' \quad \text{und} \quad \psi(x_1') = y_2'.$$

Es sei

$$y_1' - y_2' = \Delta y'.$$

Die dem Werte $\Delta y'$ entsprechende Verbesserung $\Delta x'$, die an $x_1'$ anzubringen ist, läßt sich dann folgendermaßen graphisch ermitteln: An die Stelle der Kurven läßt man im Punkte $P$ die entsprechenden Kurventangenten treten und trägt $\Delta y' = AB$ zwischen die Tangenten ein und zwar in einem — z. B. 10 mal — größeren Maßstab. In dem größeren Maßstab erhält man die Verbesserung $\Delta x' = PD$ und damit als genaueren Wert der Wurzel:

$$x_1'' = x_1' + \Delta x'.$$

Setzt man jetzt den neuen Näherungswert $x_1''$ in die Gleichungen (2) und (3) ein, so möge sich ergeben:

$$\varphi(x_1'') = y'' \quad \text{und} \quad \varphi(x_1'') = y_2''.$$

Es sei

$$y_1'' - y_2'' = \Delta y''.$$

Fig. 2.

In ganz ähnlicher Weise wie $\Delta x'$, bestimmt man nun graphisch die an $x_1''$ anzubringende Verbesserung $\Delta x''$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens läßt sich die Wurzel mit jeder erwünschten Genauigkeit finden, wobei nur noch zu bemerken ist, daß man den Maßstab für das Dreieck $PAB$ bei jeder neuen Verbesserung vergrößern muß.

Fig. 3.

Eine Erleichterung bei der graphischen Bestimmung der Verbesserungen $\Delta x'$, $\Delta x''$ ... beruht auf einem von Herrn Professor Mehmke ausgesprochenen Gedanken. Sind nämlich zwei oder mehr Verbesserungen zu bestimmen, so ist es zweckmäßig, durch $O$ (s. Fig. 1) die Gerade $OB'$ so zu ziehen, daß

$$OA' = PD = \Delta x' \quad \text{und}$$

$$A'B' = AB = \Delta y'.$$

Für ein bestimmtes $\Delta y$ kann dann in bequemer Weise (hauptsächlich bei Anwendung von Millimeterpapier) das entsprechende $\Delta x$ abgelesen werden.

Oft wird es möglich sein, $f(x)$ so zu zerlegen, daß eine der zwei Kurven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ eine Gerade wird. Dies kann z. B. erreicht werden durch Anwendung der von Professor Mehmke im „Civilingenieur" Band 35 S. 617 angegebenen logarithmographischen Methode.

*1. Beispiel*:

$$x^5 - 6x - 10 = 0.$$

Wir zerlegen in: $10y = x^5$ und $10y = 6x + 10$. Die Zeichnung (Fig. 2) ergibt:

$x_1' = 1{,}7$. Durch Einsetzen dieses Wertes in die letzten beiden Gleichungen findet man $y_1' = 1{,}42$, $y_2' = 2{,}02$, also $\Delta y' = 0{,}6$. Die mitgeteilte Konstruktion liefert hierzu (siehe Figur 2) $\Delta x' = 0{,}14$. Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$x_1'' = 1{,}84$, $y_1'' = 2{,}109$, $y_2'' = 2{,}104$, $\Delta y'' = 0{,}005$, $\Delta x'' = 0{,}0012$;

$x_1''' = 1{,}8388$, $y_1''' = 2{,}1021$, $y_2''' = 2{,}1033$, $\Delta y''' = 0{,}0012$;

$$\Delta x''' = 0{,}00028;$$

$x_1^{IV} = 1{,}83908$, $y_1^{IV} = 2{,}10376$, $y_2^{IV} = 2{,}10344$; $\Delta y^{IV} = 0{,}00032$,

$$\Delta x^{IV} = 0{,}00007.$$

Also erhält man schließlich:

$x_1^{V} = 1{,}83901$.

Mit Hilfe der regula falsi erhält man, aber weniger schnell und bequem, denselben Wert bei der gleichen Anzahl von Verbesserungen.

*2. Beispiel:*

$$x = \cos x.$$

Zweckmäßige Zerlegung:

$$y = x \quad \text{und} \quad y = \cos x.$$

Mit drei Verbesserungen erhält man:

$$x = 42^0\, 20'\, 47''.$$

Die oben geschilderte Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung stützt sich auf ein Verfahren, das vom Feldmesser angewendet wird, wenn es sich um die Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden (Grenzen von Grundstücken) handelt.

Stuttgart, im März 1904. P. Werkmeister.

---

## Bücherschau.

**K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen.** I. Band mit 87 Figuren. Leipzig 1902, G. J. Göschensche Verlagsbuchhandlung. Sammlung Schubert XXXIV. 8⁰, VIII u. 380 S. Preis: Geb. in Leinwd. M. 12.—.

Das Interesse für liniengeometrische Untersuchungen scheint gegenwärtig neu zu erwachen. Darauf deutet nicht nur das rasch aufeinanderfolgende

Erscheinen der liniengeometrischen Werke von Ball (Theory of screws, 2. Aufl. 1900), Study (Geometrie der Dynamen, 1901—1903), Jessop (A treatise on the line complex, 1903) und des vorliegenden hin, sondern auch das Hervortreten neuer Gesichtspunkte und Hilfsmittel bei der Behandlung dieser Disziplin in verschiedenen neueren Aufsätzen. Eine Hauptveranlassung zu diesem Fortschritte gab die Verwendung der Liniengeometrie in der Mechanik, insbesondere das Studium der Zusammensetzung endlicher Bewegungen.

Das Erscheinen eines elementar gehaltenen, aber weitergehenden Untersuchungen nicht ausweichenden Lehrbuches der Liniengeometrie ist daher freudig zu begrüßen, da seit dem Plückerschen Originalwerke keines erschienen ist, das die allgemein verwendete analytische Methode bevorzugt. Das vorliegende Buch ist aber umso freudiger zu begrüßen, weil es im Sinne der modernen Strömung beständig die Anwendungen auf die Bewegungslehre und Mechanik in den Vordergrund stellt, ferner weil es nicht einseitig analytisch vorgeht, sondern auch synthetische Betrachtungen einschaltet, wo eine Abkürzung des Weges hierdurch erreicht wird. Die eigenartige systematische Anordnung des umfangreichen Stoffes und die wissenschaftliche Vertiefung und Weiterbildung, die einzelne Teile bei der Bearbeitung erfahren haben, zeigen, daß das Buch mit großer Liebe und — wie noch hinzugefügt werden muß — Sorgfalt geschrieben ist.[1])

Von der Schraubenbewegung ausgehend wird im 1. Abschnitt durch Zuordnung eines jeden Punktes zur Normalebene seiner Bahn das Nullsystem und als Gesamtheit der Bahnnormalen aller Punkte das (Strahlen-)Gewinde erhalten, ferner das Nullsystem als reziproke Verwandtschaft ermittelt und seine analytische Darstellung angeschlossen. Bei der Untersuchung der Lage der Polarenpaare sowie der Anordnung der Gewindestrahlen tritt sofort eine der nachahmenswertesten Eigenarten des Buches hervor, nämlich das Bestreben, alle geometrischen Gebilde dem Leser anschaulich zu machen, so daß sie nicht bloß als mathematisch bestimmt erkannt werden, sondern auch von der Vorstellung leicht erfaßt und festgehalten werden können. Der 2. Abschnitt beschäftigt sich nach jedesmaliger kurzer aber klarer Entwicklung der erforderlichen mechanischen Begriffe mit dem Auftreten des Nullsystems (oder Gewindes) in der Theorie der Dynamen, Windungen und reziproken Kräftepläne ebener Fachwerke.

Erst im 3. Abschnitt werden nach Besprechung der tetraedrischen Punkt- und Ebenenzeiger die tetraedrischen und rechtwinkligen Linien-, Stab- und Feldzeiger eingeführt und Gleichungen zwischen ihnen im allgemeinen betrachtet. Der Verfasser hat es gewagt, für *Koordinaten* das von H. Graßmann vorgeschlagene deutsche Wort „*Zeiger*" durchgehends anzuwenden, das den Vorzug der Kürze und der leichten Verbindbarkeit mit anderen Worten besitzt. Referent kann ihm nur besten Erfolg hierzu wünschen. Auch sonst ist das Werk in vieler Hinsicht durch Graßmann günstig beeinflußt. Im 4. Abschnitt z. B. werden nicht bloß lineare *homogene* Gleichungen zwischen den 6 Linienzeigern und die hierdurch definierten Gewinde und

1) Ein auf S. 91 unterlaufenes Versehen, das eine kleine Änderung in der Beweisführung des Satzes 47 bedingt, wird (nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn Verfassers) am Schlusse des II. Bandes samt einigen wenigen Druckfehlern berichtigt werden.

Netze in Betracht gezogen sondern auch der durch eine *nicht homogene* lineare Gleichung bestimmte lineare *Stabwald* eingehender untersucht, als es schon durch Plücker geschehen. Eine genaue Untersuchung erfährt das Strahlennetz, insbesondere das ohne reelle Brennlinien, von dem mehrere sehr anschauliche Erzeugungen gelehrt werden. Der ziemlich umfangreiche beachtenswerte 5. Abschnitt ist den imaginären Elementen gewidmet. Analytisch eingeführt (als Gruppen komplexer Zahlen), werden ihnen reelle geometrische Gebilde nach v. Staudt zugeordnet und für deren analytisch definierte Lagenbeziehungen die entsprechenden geometrischen Tatsachen gesucht. Schließlich erfahren noch die imaginären Elemente der Flächen 2. Ordnung eine eingehendere Betrachtung.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den linearen Gewindenmannigfaltigkeiten und ihren Anwendungen auf die Mechanik. Trägt man die Steigung $\mathfrak{f}$ (Parameter) eines Gewindes auf seiner Achse als gerichtete Strecke auf, wobei der Drehsinn der zugehörigen Schraubung die positive Richtung auf der Achse bestimmt, so ist das Gewinde durch einen Stab, seinen *Steigungsstab*, dargestellt. Jeder Gewindemannigfaltigkeit ist auf diese Weise eine Stabmannigfaltigkeit zugeordnet. Diese Mannigfaltigkeiten (darunter das *Zylindroid* und die Stabkongruenz $C_3^{(2)}$ des Gewindenetzes), die für die Bewegungslehre von besonderer Bedeutung sind, werden hier eingehender untersucht, als es bis dahin der Fall war, insbesondere was die möglichen Ausartungsfälle und die gestaltlichen Verhältnisse anbelangt.

Nach dieser lückenhaften Inhaltsangabe sei nur noch auf einige wertvolle historische und interessante philosophische Bemerkungen hingewiesen sowie auf die zahlreichen nach jedem Abschnitte beigegebenen Übungsaufgaben, die den pädagogischen Wert des Buches bedeutend erhöhen.

Wien, Juni 1904. E. Müller.

---

**R. Redlich. Vom Drachen zu Babel.** Eine Tierkreisstudie. Sonderabdruck aus Band 84 des „Globus". 4°. 13 S. mit 6 Abbildungen. Braunschweig 1903, Vieweg und Sohn.

Der Aufsatz knüpft an die Resultate der von der Deutschen Orientgesellschaft zur planmäßigen Durchforschung der Ruinen von Babylon entsandten Expedition an und widmet seine besondere Aufmerksamkeit dem bei der Aufdeckung des Istartores zum Vorschein gekommenen Mischgebilde, das Delitzsch den Drachen zu Babel nennt. Die Absicht des Verfassers geht dahin, zu zeigen, daß der Drache „aus den Symbolen der Tag- und Nachtgleichen und der Sonnenwenden zusammengebaut — das wandelnde Jahr" ist. Die zu diesem Behufe angestellte Untersuchung des babylonischen Tierkreises führt Herrn Redlich zu dem Ergebnis, daß die auf den erhaltenen babylonischen „Grenzsteinen", die der Zeit um 1000 a. C. entstammen, befindlichen Zeichen, nicht wie Hommel will, mit dem griechichen Zodiakus identisch sind, sondern einen „Tierkreis" des Äquators repräsentieren.

Die durch eine die Lage des Himmelsäquators für das Jahr 1000 a. C. wiedergebende Sternkarte unterstützten Darlegungen lassen sich nicht völlig von der Hand weisen, wirken vielmehr auf den ersten Blick sehr bestechend. Daß überhaupt jemals in Babylon ein Bilderkreis der Ekliptik entstanden sein konnte, sei durchaus unwahrscheinlich, da unser

griechischer Tierkreis als ein auffällig verzerrtes Spiegelbild des babylonischen Äquatorkreises erscheine. Die Vermutung, daß der Kopf des Tiamatdrachen im heutigen Sternbild der Leier zu suchen sei, hat manches für sich; denn der helle Hauptstern Wega war vor 13000 Jahren Polarstern und noch bis etwa 5000 a. C. in Mesopotamien circumpolar. — Doch werden wohl nicht viele Leser dem Verfasser in die vornehmlich gegen den Schluß der Abhandlung gehäufte Symbolik ohne Bedenken folgen, wenn auch der Mehrzahl der Konjekturen Geist und Scharfsinn nicht abgesprochen werden soll.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

---

# Neue Bücher.

### Analysis.

1. Larkman, A. E., The calculus for Engineers and others. Specially adapted for Board of Trade Examinations. London, Simpkin. 4 s. 6 d.
2. Malý, F., Grundriß der Mediationsrechnung. Graz, „Styria". K. 12.
3. Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. (Sammlung Schubert XXXII.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 7.

### Astronomie und Geodäsie.

4. Förster, Wilh., Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel. (Astronom. Abhandlgn. Nr. 5.)
5. Lockyer, N. J. N., Astronomia. Nuova versione con note ed aggiunte di G. Celoria. 5a ediz. (Manuali Hoepli.) Milano. L. 1.50.

S. auch Nr. 48.

### Biologie.

6. Pearson, Karl, Mathematical contributions to the theory of Evolution. XIII On the theory of Contingency and its relation to Association and normal Correlation. With 2 diagrams. London, Dulau. 4 s.

### Darstellende Geometrie, Photogrammetrie.

7. Chollet, T., Traité de géométrie descriptive. 1ère partie (classes de première C et D). Paris, Vuibert et Nony. Frs. 2.
8. Hjelmslev, J., Deskriptivgeometri. Grundlag for forelaesninger paa polyteknisk laeranstalt. I. halvdel. Odense. Kr. 5.
9. Lawrence, W. H., Principles of architectural perspective. 2d ed. Boston, Clarke. Cloth. $ 1.75.
10. Pesch, A. J. van, Leerboek der beschrijvende meetkunde, 3e druk, met 150 fig. in den tekst en 4 uitsl. platen. Bewerkt door P. Wijdenes. Deventer, Dixon. Fl. 1.50.
11. Schell, Ant., Der photogrammetrische Stereoskopapparat. Wien, Seidel & Sohn. M. 1.
12. Schlesser, E., Géométrie descriptive et Géométrie cotée. Classes de première et de mathématiques (préparation à l'Ecole navale, etc.) (Programmes du 31 mai 1902.) Paris, Delagrave. Frs. 3.50.
13. Vonderlinn, J., Darstellende Geometrie f. Bauhandwerker. Zum Gebrauch an Baugewerkschulen u. ähnl. techn. Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. 1. Tl. Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinkl. u.

schiefwinkl. Axonometrie, einfache Dachausmittelungen. 2. verm. Aufl. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 3.

**Mechanik.**

14. Besant, W. H. and Ramsey, A. S., A treatise on Hydromechanics. Part I, Hydrostatics. 6 th. ed. London, Bell. 6 s.
15. Duhem, Pierre, Recherches sur l'hydrodynamique. 2e série. Les conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la la viscosité au voisinage de l'état critique. Paris, Gauthier-Villars.
16. Hauber, W., Statik II. Angewandte (techn.) Statik. (Sammlung Göschen Nr. 179.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
17. Macrès, Essai sur la philosophie de la mécanique. Paris, Marescq. Frs. 2.50.

**Physik.**

18. Besson, Paul, Le radium et la radioactivité. Propriétés générales. Emplois médicaux. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.75.
19. Blondlot, R., Rayons „N". Recueil des communications faites à l'Académie des sciences. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.
20. Bullerdieck, Adf., Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes f. starke Elektrolyte. Diss. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.80.
21. Bottone, S. R., Radium, and all about it. London, Whittaker. 1 s.
22. Boynton, W. P., Applications of the Kinetic Theory to gases, vapours, &c. London, Macmillan. 7 s.
23. Gerard, Eric, Leçons sur l'électricité. I. Théorie de l'électricité et du magnétisme. Électrométrie. Théorie et construction des générateurs électriques. 7e éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.
24. Gerdien, Hans, Über den Einfluß der Torsion auf das magnetische Moment zirkular magnetisierter Nickel- u. Eisendrähte. Diss. Leipzig. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.40.
25. Graetz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 11. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. M. 7, geb. in Leinw. M. 8.
26. Hofmann, Karl, Die radioaktiven Stoffe nach dem neuesten Stande der wissenschaftlichen Erkenntnis. 2., verm. u. verb. Aufl. Leipzig, Barth. M. 2.
27. Kelvin, Lord, Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light. Founded on A. S. Hathaway's stenographic report of twenty lectures delivered in Johns Hopkins University, Baltimore, in October 1884; followed by twelve appendices on allied subjects. London, Clay. Cloth. 15 s.
28. Klimpert, Rich., Lehrbuch der Akustik. 1. Bd.: Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen. Mit 257 Erklärungen u. 106 in den Text gedr. Fig., nebst e. Sammlung v. 70 gelösten u. analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Für das Selbststudium u. zum Gebrauche an Lehranstalten bearb. nach System Kleyer. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 4.50.
29. Lodge, Sir Oliver, Modern views on matter. 3rd. ed. London, Clarendon Press. 2 s.
30. Lommel, Lehrbuch der Experimentalphysik. 10. u. 11., neubearb. Aufl., hrsg. v. Walt. König. Leipzig, Barth. M. 6.40, geb. in Leinw. M. 7.20.
31. Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 2. Bd. Technische Wärmelehre. München u. Berlin, Oldenbourg. M. 13.
32. Marchis, L., Thermodynamique. Notions fondamentales. (Bibliothèque de l'Elève-Ingénieur, Physique industrielle.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.
33. Mayer, Hans, Die neueren Strahlungen. Kathoden-, Kanal-, Röntgen-Strahlen u. die radio-aktive Selbststrahlung (Becquerelstrahlen). Vom Standpunkte der modernen Elektronentheorie unter Berücksichtigung der neueren experimentellen

Forschungsresultate behandelt u. im Zusammenhange dargestellt. M.-Ostrau, Papauschek. M. 1.50.

34. Murani, Oreste, Fisica. 7ª ediz. accresciuta e riveduta dall' autore. (Manuali Hoepli.) Milano. L. 3.

35. Naudet, G., Expériences d' électricité. Paris, Desforges. Frs. 2.

36. Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. La télégraphie sans fil. (Scientia Nr. 23.) Paris, Naud. Cart. Frs. 2.

37. Righi, Augusto, La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni, elettroni.) 2ª ediz. con aggiunte. Bologna. L. 3.

38. Rothé, Edmond, Contribution à l' étude de la polarisation des électrodes (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.

39. Rutherford, E., Radio-Activity. Cambridge, University Press. 10 s. 6 d.

40. Schwienhorst, Heinr., Experimentelle u. theoretische Untersuchungen an der positiven ungeschichteten Lichtsäule. Diss. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.60.

41. Science Physics Papers. Being the questions set at the Intermediate Science Examinations of the University of London from 1875—1903. (University Tutorial Series.) London, Clive. 2 s. 6 d.

42. Semenov, Jules, Recherches expérimentales sur l' étincelle électrique (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.

43. Soddy, Frederick, Die Entwicklung der Materie enthüllt durch die Radioaktivität. Wilde-Vorlesung. Übers. v. G. Siebert. Leipzig, Barth. M. 1.60.

44. Thomson, J. J., Electricity and Matter. With diagrams. London, Constable. 5 s.

45. Valentiner, Siegfr., Die elektromagnetische Rotation u. die unipolare Induktion in kritisch-historischer Behandlung. Karlsruhe, Braun. M. 2.

46. Vasilesco-Karpen, M. N., Recherches sur l' effet magnétique des corps électrisés en mouvement (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.

## Rechenapparate, Tafeln.

47. Crelle's, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren u. Dividieren m. Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern u. sicherer machen. Mit e. Vorworte von C. Bremiker, 9. Ster.-Aufl. (Mit deutschem u. französ. Text.) Berlin, Reimer. geb. in Leinw. M. 15.

48. Gauss, F. G., Die Teilung der Grundstücke, insbes. unter Zugrundelegung rechtwinkliger Koordinaten. Nebst vierstell. logarithm. u. trigonom. Tafeln, e. Quadrattafel, sowie e. Multiplikations- u. Divisionstafel. 4. Aufl. 2 Tle. Berlin, v. Decker. geb. in Leinw. M. 7.60.

49. Levitus, D., Rechenmaßstab. Graphische Tafel zum Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren sowie zur Logarithmenberechnung u. zu allen trigonometrischen Berechnungen. Freiberg, Frotscher. M. 1.50.

50. Rex, Frd. Wilh., Fünfstellige Logarithmentafeln. 1. Heft: Taf. I—III. Die Logarithmen der Zahlen u. der goniometrischen Funktionen. Ster.-Druck, 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 1.30.

## Verschiedenes.

51. Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte u. ungeflügelte Worte. Leipzig, Teubner. M. 8.

52. Fischer, V., Vektordifferentiation u. Vektorintegration. Leipzig, Barth. M. 3.

53. Lorenz, L., Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. Valentiner. T. II. 2ᵉ fasc. Copenhagne, Lehmann & Stage.

54. Mewes, Rud., Dampfturbinen, deren Entwicklung, Bau, Leistung u. Theorie, nebst Anhang üb. Gas- u. Druckluftturbinen. Berlin, Krayn. M. 7.50, geb. M. 8.50.

55. Schütz, Ludw. Harald, Die Fortschritte der techn. Physik in Deutschland seit dem Regierungsantritt Kaiser Wilhelm II. Rede. Berlin, Bornträger. M. —.50
56. Stokes, Sir George Gabriel, Mathematical and physical Papers. Vol. 4 Cambridge. University Press. 15 s

---

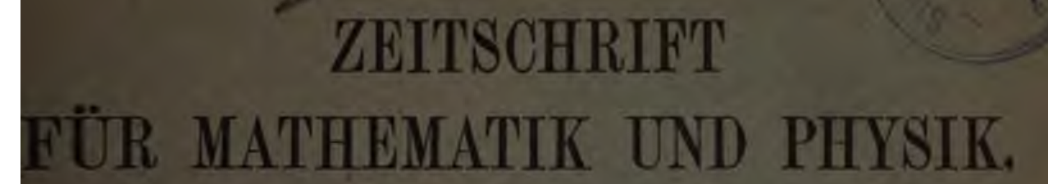
## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Ahrens, W., Scherz u. Ernst in der Mathematik, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 51.
Arndt, Erdmann, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der 1. Klasse. Progr. 4te Realsch. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Besson, P., Le radium . . ., s. N. B. 18.
Lorenz, H., Lehrbuch d. techn. Physik, II, s. N. B. 31.
Blondlot, R., Rayons „N", s. N. B. 19.
Duhem, P., Recherches sur l' hydrodynamique. 2e série.
Fischer, V., Vektordifferentiation u. Vektorintegration, s. N. B. 52.
Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. Paris, Gauthier-Villars.
Geistbeck, Michael, Leitfaden der mathematischen u. physikalischen Geographie für Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten. 24., verbesserte u. 25. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.40, geb. M. 1.8
Gerard, E., Leçons sur l' électricité, I, s. N. B. 23.
Hauber, W., Statik, II., s. N. B. 16.
Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1903. (Veröffentl. des K. Preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 16.) Berlin, Stankiewicz.
Hiber, Gravitation als Folge einer Umwandlung der Bewegungsform des Äthers im Inneren der wägbaren Materie. München, Lukaschik. M. 2
Lorenz, L., Oeuvres scientifiques. II 2, s. N. B. 53.
Kewitsch, G., Zweifel an der astronomischen u. geometrischen Grundlage des 60-Systems. (Sonderabdruck aus: Zeitschr. f. Assyriologie Bd. XVIII.) Straßburg, Trübner.
Marchis, L., Thermodynamique, s. N. B. 32.
Moore, Eliakim Hastings, Subgroups of the generalized finite modular group. (From: The decennial publications of the University of Chicago, vol. IX.)
Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes, s. N. B. 36.
Riehl, Alois, Hermann von Helmholtz in seinem Verhältnis zu Kant. Berlin, Reuther & Reichard. M. —.80
Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen, s. N. B. 3.
Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. 2., revidierte Aufl. (Sammlung Schubert XIII.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 8
Schlesinger, Josef, Über die Sprache in den mathematischen Schulbüchern. Progr. d. Lessing-Gymn. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Schulze, Edm., Kurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt u. einer Spitze. Mit 2 Taf. Progr. d. Friedrichs-Werderschen Gymn. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Teixeira, F. Gomes, Obras sobre Matematica. Por ordem do Governo Português. Vol. I. Coimbra, Imprensa da Universidade.
Veröffentlichung des kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 15. Astronomisch-geodät. Arbeiten I. Ordnung, Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Greenwich i. J. 1903. Berlin, Stankiewicz.


31. Serie, Modell Nr. 2.
Erzeugung der Pascalschen Curven als Epitrochoiden mit freiem Centrum.
ka
kb
M2
M1
M


31. Serie, Modell Nr. 5.
Cycloidenverzahnung als Anwendung der Methode der Hülfspolbahnen.
kb
d'b
B
db
da
d'a
ka



# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

51. BAND. 2. HEFT.

MIT 41 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 15. November 1904.

BG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

**ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.**

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

---

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

---

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



---

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**F. Biske, A. Börsch, G. Bohlmann, K. Doehlemann, V. Fischer, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, A. V. Leon, F. Ludwig, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, E. Wölffing.**

# Untersuchung der Festigkeit von Eisenbetonbauten.

Von Ing. Mario Baroni in Mailand.

Indem ich hiermit meine Untersuchungen über einige Fälle kleinster Veränderungen bei Eisenbetonbauten veröffentliche, habe ich nicht die Absicht eine neue Rechnungsmethode für derartige Bauten anzugeben.

Ich will nur an der Hand einer strengen analytischen Methode zeigen, wie es möglich ist, die über solche Konstruktionen bestehenden Hypothesen zu kontrollieren, indem gleichzeitig nach dem Fortschritt dieser Veränderungen bestimmt wird, was für eine Hypothese der Wahrheit mit größter Wahrscheinlichkeit entspricht.

Die Grundsätze meiner Theorie, von jeder Deformationshypothese unabhängig, sind die bis jetzt allgemein angenommenen.

Die bekanntesten Theorien sind schon zur Genüge in den Arbeiten von Guidi, Canevazzi, Caracciolo, Considère, Ritter, Harel de la Noé und Cristophe erörtert. Diese Theorien lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

1. Jeder senkrechte Querschnitt durch einen gebogenen Körper bleibt während des Deformationsvorganges eben, so daß sich jedes aus Eisen oder Beton bestehende Sektionselement um eine gemeinsame neutrale Achse gleichwinklig dreht.

Der Spannungswiderstand jedes Betonelements bei konstantem Elastizitätsmodul ist der Verlängerung proportional und beträgt etwa $^1/_{10}$ des Elastizitätsmoduls.

2. Die zweite Theorie hält am linearen Deformationsgesetz fest, aber nimmt an, daß der Spannungswiderstand der Betonelemente bei Verlängerungen den gewöhnlichen Elastizitätsgesetzen bei nicht armiertem Beton entspricht, so daß anfangs der Elastizitätsmodul konstant bleibt; aber später beim Überschreiten der Elastizitätsgrenze verringert er sich allmählich, und der größte anzunehmende Widerstand ist nicht höher als die gewöhnliche Betonbruchbelastung.

3. Ritter stellte eine dritte Hypothese auf, bei der vorausgesetzt wird, daß ein senkrechter Querschnitt nicht eben bleibt, sondern sich seine Oberfläche parabolisch ändert, indem angenommen wird, daß die Elemente des Eisens an der Oberfläche der gekrümmten Sektion bleiben.

Es gilt auch in diesem Falle für die Widerstände, was die erste Hypothese angibt.

4. Hennebique stellt keine besonderen Hypothesen über die Deformation auf, sondern er beschränkt sich darauf, nur den Betonzugwiderstand außer acht zu lassen.

Es gibt noch andere Theorien, z. B. die von Piketty und anderen, die man jedoch als nur kleine Umgestaltungen der zweiten, in bezug auf das Zugwiderstandsgesetz des Betons betrachten kann. Es wird jedoch dabei immer vorausgesetzt, daß die Elemente des Eisens in der Ebene des Schnittes bleiben, d. h. daß die Formveränderung der verschiedenen zwischen zwei benachbarten Schnitten gelegenen Elemente nur von ihrem Abstand von der Fläche der neutralen Achsen, nicht aber von ihrem eigenen Wesen abhängt. Dies ist eben bezeichnend für alle bis jetzt aufgestellte Hypothesen, mit Ausnahme einer von Harel de la Noé angedeuteten, welcher annahm, daß die Elemente des Eisens durch den sie umgebenden Beton fortgerissen werden.

Und da die Resultate meiner Untersuchungen in einigen Deformationsperioden den bisher gegebenen Erklärungen und der Hypothese Harel de la Noés widersprechen, so glaube ich, daß sie Fachmänner um so mehr interessieren müssen.

Die erste Theorie verlor infolge der schönen Versuche Considères an Wert; auch Résal beschränkte sich darauf, sie nur auf die erste Periode der Deformation anzuwenden, während deren jedes Betonelement einen Widerstand, geringer als die Elastizitätsgrenze, auszuhalten hat. Jenseits dieser Grenze gab er keine Theorie an. Dagegen hat jetzt die zweite Theorie (die mittlere von Canevazzi) und die von Hennebique besonders Ansehen erlangt. Auch ich glaube, daß beide für die Praxis genügende Resultate geben, die bei ersterer für die Veränderungen des Eisens etwas zu gering, für die des Betons etwas übertrieben sind, während Hennebique die Veränderungen des Eisens überschätzt.

Aber bei der Prüfung der verschiedenen Hypothesen, allein vom theoretischen Standpunkt aus, erregten ihre auffallenden Ungewißheiten und Widersprüche großen Zweifel darüber, wie weit sie besonders in den Fällen, wo Eisen oder wo Beton vorwiegt, der Wahrheit nahe kommen. Das hat in mir den Wunsch geweckt zu untersuchen, ob von jeder Hypothese abgesehen, es möglich wäre, die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit zu behandeln, in der Hoffnung, dabei die Gesetze der verschiedenen Deformationsperioden zu entdecken.

Die Grundsätze der rationellen Statik genügen zur Lösung der Aufgabe nicht, weil diese infolge der unbestimmten Verteilung der Widerstände im Eisen und im Beton selbst unbestimmt ist.

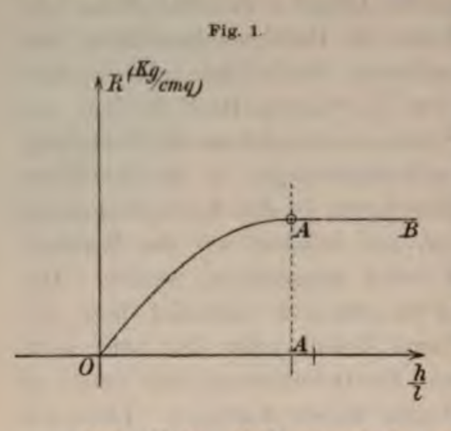
Man mußte also das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit, das in der Bauwissenschaft so fruchtbar an Erfolgen war, zu Hilfe rufen. Es könnte zwar scheinen, daß die große Adhäsion zwischen Beton und Eisen die Veränderungen einiger Werte des Problems beeinflusse und daher die Anwendung dieses Grundsatzes beschränke: aber meiner Meinung nach ist diese Adhäsion nur ein inneres Band in dem von den beiden Materialien gebildeten System, von welchem die Verteilung der Widerstände im Beton, sowie die Veränderungen an der Oberfläche des Körpers abhängen, und kann eben darum in den Kraftgleichungen und in den Deformationsbewegungen, aus welchen wir das Minimalgesetz herleiten werden, analytisch nicht ausgedrückt werden. Um dies an einem mechanischen Beispiel zu erläutern, erscheint diese Adhäsion wie die Verbindungen in einem Gelenksystem mit sehr zahlreichen Stäben. Sie beeinflussen zwar die Deformation, aber finden in den Gleichungen der Kräfte und Arbeiten keinen Ausdruck. Eben wie in diesem Falle kann ich also den Grundsatz der geringsten Arbeit anwenden: in den folgenden Gleichungen werden einige Werte eine besondere Bedeutung haben, einige veränderliche Werte werden sich nur in bestimmter bekannter Weise verändern können; ihre Veränderungen werden Beziehungen aufweisen, verschieden von denen, die sie hätten, wenn die Verbindung nicht vorhanden wäre, aber diese wird in den Gleichungen nicht besonders zum Ausdruck gelangen, wie eine Kraft, welche auf das ganze Gleichgewicht Einfluß hat.

Ich wollte aber die Lösung des allgemeinen Problems der allmählich gebogenen Körper mit Hilfe einfacherer Probleme erreichen (der Körper wird nur gedehnt, die Adhäsion zwischen den beiden Materialien wird nicht berücksichtigt). Und auch die Lösung dieser letzteren Probleme ist sehr wertvoll, da sich daraus annähernd richtige Rechnungstheorien ergeben, deren Anwendung für die Praxis genügend ist, gleichviel welches die Beziehung zwischen den Sektionsflächen des Eisens und des Betons ist.

Über Zug- und Druckwiderstand des Betons werde ich nur das sagen, was nötig ist, um die Bedeutung der Symbole zu verstehen, die in den folgenden Untersuchungen über gedehnte oder gebogene Körper aus armiertem Zement zur Anwendung gelangen. Der Zug- oder Druckwiderstand eines beliebigen Körpers ist vollkommen bestimmt, wenn das Verhältnis des einheitlichen Widerstandes zur Deformation der Längeneinheit bekannt ist, d. h., wenn man eine Kurve, wo die Ordinaten die einheitlichen Widerstände ($R$) und die Abszissen die einheitlichen Deformationen $\left(\frac{h}{l}\right)$ darstellen, zeichnen kann. Die auf diese

Weise für die verschiedenen Materialien gezogenen Linien besitzen einige gemeinsame Eigenschaften. Sie beginnen geradlinig oder ungleich gekrümmt, die Konkavität nach der Abszissenachse $\frac{h}{l}$ gerichtet, und in einem Punkte $A$ oder kleinem Abstande (dessen Ordinate die Bruchbelastung ist) gehen sie in eine fast gerade der $\frac{h}{l}$ Achse parallele Linie über, oder (ohne daß man den Punkt $A$ bestimmen kann) streben sie, eine der Achse $O\frac{h}{l}$ parallele Richtung anzunehmen, indem sie Asymptoten einer Geraden werden (Fig. 1).

Fig. 1.




Beim Beton (falls $R$ zwischen 0 und 50 kg pro qcm Druck variiert) wird, infolge der Bachschen Versuche, die oben erwähnte Linie durch die Gleichung:

$$R^n = E\frac{h}{l}$$

bestimmt, worin $E$ und $n$ je nach den Bestandteilen des Betons zwischen folgenden Grenzen schwanken:

$E$ von $2{,}07 \times 10^5$ bis $4{,}57 \times 10^5$ (Einheiten: Kilo und qcm)

$n$ von 1,09 bis 1,21.

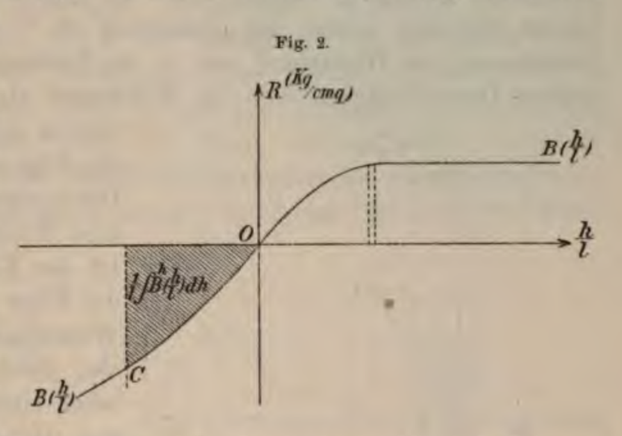
Für den gewöhnlichen Beton kann man $E$ annähernd $= 2 \times 10^5$ und $n$ zwischen 1,41 und 1,21 ansetzen Die Ordinate der Kurventangente am Punkte $A$, also am Ende der Kurve (Bruchbelastung) hat einen Wert von $190 \div 180$ kg pro qcm. Wo es sich um Zug handelt, ist die Form der Kurve weniger bestimmt. Sie fängt mit einer Geraden an, deren Gleichung

$$R = E\frac{h}{l}$$

ist ($E$ ungefähr $= 2 \times 10^5$), dann krümmt sie sich plötzlich (was einige unberücksichtigt lassen), um in eine Tangente, deren Ordinate zwischen 12 und 19 kg pro qcm schwankt, überzugehen. Beide Linien können in einem einzigen Diagramm zusammengefaßt werden (Fig. 2); auf diesem bedeuten die positiven $\frac{h}{l}$ die einheitlichen Verlängerungen, die negativen die einheitlichen Verkürzungen, ebenso bedeuten die positiven $R$ die einheitlichen Zug-, die negativen die einheitlichen Druckwiderstände.

Bei der Berechnung gezogener und gebogener Körper werde ich diese Linie durch die Funktion $B\left(\frac{h}{l}\right)$ darstellen: sie läßt sich nicht analytisch mit einem einzigen Ausdruck bestimmen, infolge ihrer Veränderungen in den verschiedenen Deformationsperioden; es bedeutet also $B$ nur ein Symbol, das je nach Phase und Wesen der Deformation verschieden erscheint. Man muß also die bestimmten Integrale, wo die Funktion $B$ oder deren Derivate zu $\frac{h}{l}$ vorkommt, als die Summen so vieler Integrale ansehen, als Formen der Funktion zwischen den Grenzen der Integrale vorhanden sind.

Fig. 2.




Unter diesen Integralen hat eines eine besondere physikalische Bedeutung, nämlich:

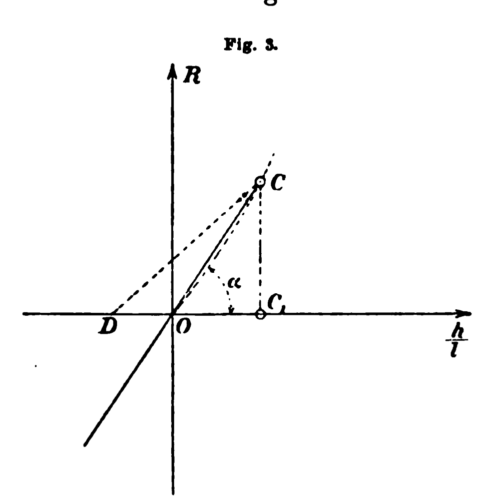
$$\int_0^{\frac{h}{l}} B\left(\frac{h}{l}\right) d\frac{h}{l} = \frac{1}{l}\int_0^{h} B\left(\frac{h}{l}\right) dh$$

als Maß für die Deformationsbewegung eines Körpers mit der ursprünglichen Länge $l$ und dem Querschnitt 1, wenn die Länge von 1 nach $\left(1 + \frac{h}{l}\right)$ übergeht; während $\int_0^h B\left(\frac{h}{l}\right) dh$ dieselbe Arbeit für einen Körper von der Länge $l$ und dem Querschnitt 1 angibt.

Die Derivate $\frac{dB}{d\left(\frac{h}{l}\right)}$ wird auf dem Diagramm von dem Winkelparameter der Tangente gegeben: auf der geradlinigen Strecke, mit welcher das Diagramm sowohl des Zuges wie des Druckes beginnt, fällt dieser Parameter zusammen mit dem der vom Anfangspunkt der Koordinaten bis zu dem auf der Linie $B$ betrachteten Punkte gezogenen Sehne, und sein numerischer Wert mißt das Verhältnis zwischen Koordinate und Abszisse, zwischen Widerstand und Deformation, mit anderen Worten den Elastizitätsmodul.

An den krummen Strecken ist er kleiner als der gemeinsame Elastizitätsmodul ($\operatorname{tg} \alpha$) (Fig. 3); während jedoch seine physikalische Bedeutung auf diesen Strecken ihren Wert verliert, da der Widerstand nicht mehr geradlinig wächst, behält die Derivate selbst auf noch so kleinen Strecken immer ihre Bedeutung als Verhältnis zwischen der Veränderung im Widerstand und in der Verlängerung und zeigt, mit welcher Geschwindigkeit sich der Widerstand als Funktion der Deformation verändert. Das hat bei den folgenden Berechnungen der Deformationsarbeit eine besondere Wichtigkeit, daher werde ich der Kürze wegen immer in der Folge Elastizitätsmodul den Winkelparameter der Tangente und nicht das Verhältnis zwischen einheitlichem Widerstand und einheitlicher Deformation nennen. Die Untertangente $C_1 D$ mißt das Verhältnis zwischen dem einheitlichen Widerstand und dem auf obige Weise bestimmten Elastizitätsmodul. Ich werde sie virtuelle Deformation nennen, um sie von der wirklichen Deformation, mit welcher sie bloß in der ersten geradlinigen Phase des Diagramms übereinstimmt, zu unterscheiden: sie wird unendlich, wenn sich der Punkt $C$ der Bruchgrenze nähert, während der Elastizitätsmodul Null wird. Ebenso werde ich bei einem Element des Normalschnittes durch einen gebogenen Körper virtuelle Drehung den Winkel nennen, in dem es sich um die neutrale Achse des Schnittes drehen müßte, um eine wirkliche, seiner virtuellen gleiche Deformation zu bekommen. Die Linie, welche den Widerstand der Flächeneinheit des Eisens bei Zug oder Druck darstellt, besitzt auch die vorgenannten allgemeinen Eigenschaften, nur verläuft sie zuerst gerade in beträchtlichem Maße (bis ungefähr 1500 kg pro qcm), dann in regelmäßiger Krümmung. Man kann also auch in diesem Falle von virtuellen Deformationen sprechen, dieselben werden aber bei den folgenden Berechnungen im allgemeinen den wirklichen entsprechen, da im allgemeinen angenommen wird, daß der Widerstand des Eisens noch innerhalb der ersten Phase liegt.

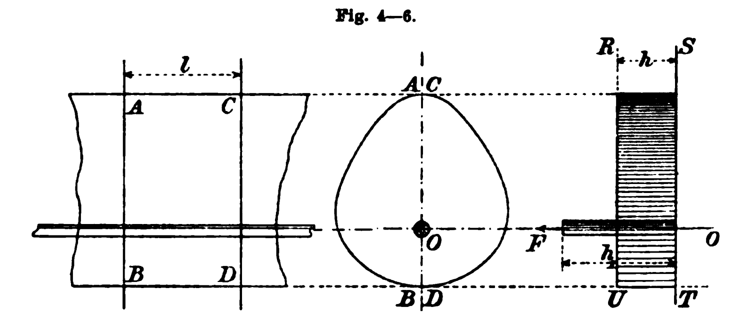
Fig. 3.



## Zugwiderstand eines aus Eisen und Beton bestehenden gedehnten Körpers ohne Adhäsion zwischen Eisen und Beton.

Man denke sich einen aus Eisen und Beton bestehenden zylindrischen Körper mit beliebigem Durchschnitt: es bestehe die innere Armierung aus eisernen Stäben von konstantem Schnitt (dessen Form keinen Einfluß hat) mit geradliniger Achse, die der Achse des Körpers aus Beton parallel sei: ferner mögen die Schwerpunkte der beiden senkrechten Querschnitte durch das Eisen und den Beton in $O$ zusammentreffen (Fig. 4—6). Der Einfachheit halber hat man die Armierung in Fig. 4 und 5 als aus einem einzigen Rundeisen bestehend gezeichnet.

Fig. 4—6.




Es unterliege nun der Körper längs seiner Schwerpunktachse der Wirkung der Zugresultante $F$; gesetzt ihre Komponenten verteilen sich auf die verschiedenen Sektionselemente so wie die Widerstände, und die Adhäsion zwischen Eisen und Beton sei gleich Null, so daß man sie als ein einer gemeinsamen Zugkraft ausgesetztes System betrachten kann, so ergibt sich folgende Frage:

Wie müssen die Spannungswiderstände, in einer beliebigen Sektion des Körpers, zwischen Eisen und Beton verteilt sein, damit die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum werde?

Ich setze ferner voraus, daß in dem Betonschnitt die Spannungswiderstände (folglich auch die Verlängerungen) gleichmäßig verteilt sind, so daß während der Deformation jeder Querschnitt eben, und zur Schwerpunktachse senkrecht bleibt. Dasselbe nehme ich für die Armierung an. Ich ziehe jetzt eine Schicht des Körpers in Betracht, die zwischen den Normalschnitten $AB$ und $CD$ liegt und bezeichne mit

$l =$ die Länge der Fibern zwischen zwei Sektionen vor der Deformation.

$h_1 =$ die Verlängerung der Eisenfibern.

$\frac{h_1}{l}$ ihre einheitliche Verlängerung.

$A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = den entsprechenden einheitlichen Widerstand.

$\frac{1}{l}A'\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = die Derivate von $A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ nach $h_1$.

$\Omega_1$ = den gesamten Querschnitt der Armierung.

$h$ = die Verlängerung der Betonelemente.

$\frac{h}{l}$ = die einheitliche Verlängerung derselben.

$B\left(\frac{h}{l}\right)$ = den entsprechenden einheitlichen Widerstand.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{h}{l}\right)$ = die Derivate nach $h$ der Funktion $B\left(\frac{h}{l}\right)$.

$\Omega$ = die Fläche des Betonquerschnittes.

Es ist also:

$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ der gesamte Widerstand der Armierung.

$\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)$ der gesamte Widerstand des Betons.

$\Omega_1 \int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1$ die Deformationsbewegung der zwischen den beiden Schnitten enthaltenen Armierung, wenn die Verlängerung zwischen Null und $h$ begriffen ist.

Die Bedingungsgleichungen müssen bestimmen:

1. daß die Summe der Widerstände = $F$ ist;

2. daß die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sind mithin folgende:

$$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega B\left(\frac{h}{l}\right) = F,$$

$$\Omega_1 \int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1 + \Omega \int_0^{h} B\left(\frac{h}{l}\right) dh = \text{Minimum}.$$

Die Variabeln dieser Gleichungen sind $h$ und $h_1$; wenn sich $h_1$ verändert, verändert sich auch der entsprechende Gesamtwiderstand, und infolge der ersten Gleichung verändert sich auch der zweite, d. h. auch $h$: es handelt sich darum, das Verhältnis zwischen $h$ und $h_1$ zu bestimmen, um der zweiten Gleichung zu genügen.

Ich setze $h_1$ als unabhängige Variable und leite beide Gleichungen danach ab, indem ich mit $h'$ die Derivate von $h$ nach $h_1$ bezeichne. Dann bekomme ich:

$$\begin{cases} \Omega_1 \frac{1}{l} A'\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega \frac{h'}{l} B'\left(\frac{h}{l}\right) = 0. \\ \Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega h' B\left(\frac{h}{l}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung erhalte ich für $h'$

$$h' = \frac{\Omega_1 A'\left(\frac{h_1}{l}\right)}{\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

durch Substitution in der zweiten erhalte ich:

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}, \tag{1}$$

woraus sich, unabhängig von der Kraft $F$, das Verhältnis zwischen den beiden Deformationen ergibt, wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

**Erörterung der Formel (1). — Dehnung des Körpers ohne Adhäsion.**

Ziehen wir jetzt die Formel (1) in Betracht:

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h'}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}.$$

1. Fall. Man setze die Spannung $J$ so klein an, daß in keinem Eisen- oder Betonelement die elastische Periode, während deren der Widerstand der wirklichen Deformation annähernd proportional bleibt, überschritten werde.

Man erhält in diesem Falle

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1\frac{h_1}{l},$$

$$B\left(\frac{h}{l}\right) = E\frac{h}{l},$$

worin $E$ und $E_1$ die gemeinsamen Elastizitätsmoduln für die Zugkraft sind. Man bekommt also:

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1,$$

$$B'\left(\frac{h}{l}\right) = E,$$

und so wird die Formel (1)

$$\frac{E_1\frac{h_1}{l}}{E_1} = \frac{E\frac{h}{l}}{E}, \text{ d. h. } h_1 = h.$$

Also während dieser Phase der geringsten Beanspruchungen ist die Verlängerung des Betons gleich der des Eisens.

2. Fall. Man nehme an, die Zugkraft $F$ habe die Höhe erreicht, daß in den Betonelementen die Elastizitätsperiode überschritten sei, daß also der Widerstand nicht mehr als der Verlängerung proportional anzusehen sei; dann wird die Funktion $B$ nicht mehr eine lineare sein. Die Formel (1) wird in diesem Fall:

$$\frac{E_1 \frac{h_1}{l}}{E_1} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

oder

$$\frac{h_1}{l} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)},$$

woraus hervorgeht, daß „die Verlängerung für die Längeneinheit der virtuellen Betonverlängerung gleich ist", und da während dieser nicht elastischen Phase der Deformation die virtuelle Verlängerung größer als die wirkliche ist, so folgt daraus, daß sich das Eisen mehr als der Beton verlängert: die Differenz wächst, je weiter sich der Widerstand des letzteren der Bruchbelastung nähert.

3. Fall. Man nehme an, daß die Deformation des Eisens die elastische Periode auch schon überschritten habe: dann wird die Funktion $A$ auch nicht mehr eine lineare sein Die Formel (1) wird:

$$\frac{A\left(\frac{x}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{x}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

und drückt aus, daß die virtuelle Verlängerung des Eisens der ebenfalls virtuellen des Betons gleich kommt.

Theoretisch müßte man diesen Zustand erreichen können; denn wenn der Betonwiderstand sich der Bruchbelastung nähert, nähert sich die virtuelle Betonverlängerung der Unendlichkeit, während die wirkliche Eisenverlängerung nicht unendlich werden kann. Und da sich beide virtuelle Verlängerungen gleichzeitig der Unendlichkeit nähern, so müßte der Bruch in beiden Materialien gleichzeitig geschehen.

### Dehnung des Körpers. — Vollständige Adhäsion zwischen Eisen und Beton.

Man denke sich einen zylindrischen Körper aus Beton und Eisen von beliebigem Querschnitt; die Armierung bestehe aus einem oder mehreren Stäben, parallel zu den Erzeugungslinien der zylindrischen

Oberfläche des Körpers, von beliebigem Durchschnitt. Man nehme ferner an, daß in jeder Sektion die Schwerpunkte der Eisen- und der Betonflächen zusammenfallen.

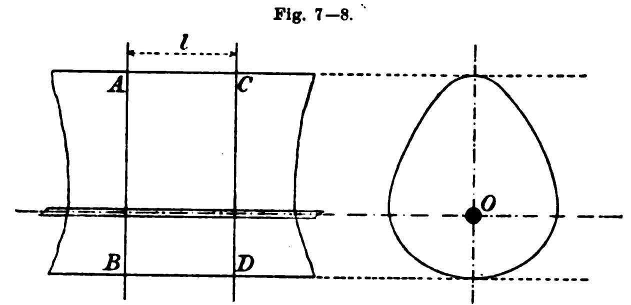


Fig. 7—8.

Fig. 7 stellt die Schicht des in Betracht zu ziehenden Körpers dar zwischen den Sektionen $AB$ und $CD$, die zur Schwerpunktachse senkrecht sind.

Fig. 8 stellt den Schnitt $AB$ dar, worin die Armierung zu größerer Einfachheit durch ein einziges Rundeisen bezeichnet ist. Der Körper unterliege längs der Schwerpunktachse der Wirkung der Zugresultante $F$.

Ich nehme an:

1. daß vollständige Adhäsion zwischen Eisen und Beton vorhanden sei, so daß, wie groß auch die Spannung sei, die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons gleiche Deformation haben;

2. daß der einheitliche einer bestimmten Verlängerung entsprechende Betonwiderstand derselbe sei wie bei gleicher Deformation in nicht armierten Körpern.

Über die Deformation der verschiedenen Betonelemente stelle ich keine Hypothese auf; um in dem allgemeinen Fall zu bleiben, will ich diese Deformationen als verschieden ansehen, obwohl sich dieselben nach einem unbekannten Gesetz von Element zu Element verändern.

Ich bezeichne mit $h_1$ die Verlängerung der Eisenfibern und mit $h$ die eines beliebigen Betonelementes $l d\omega$. Der gesamte Zugwiderstand des Eisens ist eine bekannte Funktion von $\frac{h_1}{l}$; ferner ist der Zugwiderstand eines Betonelementes $l d\omega$ ebenfalls eine bekannte Funktion von $\frac{h}{l}$. Die Summe der Gesamtwiderstände beider Materialien muß gleich $F$ sein. Wenn man also diese Bedingung als unverändert festhält, und für $h_1$ einen beliebigen Wert ansetzt, so sind die verschiedenen Werte von $h$, infolge dessen, alle bestimmt und zwar hängt jeder von der Lage des Betonelementes ab, nach dem erwähnten unbekannten Gesetze, so daß also $h$ immer als Funktion von $h_1$ angesehen werden kann.

Man kann also folgende Aufgabe lösen:

Welches Verhältnis muß zwischen der Deformation $h_1$ und dem Deformationssystem $h$ obwalten, damit, wenn die Summe der Widerstände gleich $F$ ist, die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum darstelle.

Es sei:

$\Omega_1$ = die Gesamtfläche des Schnittes durch die Armierung.

$\Omega$ = die Gesamtfläche des Betonschnittes.

$A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = der einheitliche Zugwiderstand des Eisens, der einheitlichen Verlängerung $\frac{h_1}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l}A'\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = die Derivate dieses Widerstandes zu $h_1$.

$B\left(\frac{h}{l}\right)$ = der einheitliche Zugwiderstand des Betons, der einheitlichen Verlängerung $\frac{h}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{h}{l}\right)$ = die Derivate dieses einheitlichen Widerstandes zu $h$.

$h'$ = die Derivate von $h$ zu $h_1$.

Dann haben wir:

$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = dem gesamten Spannungswiderstand der Armierung.

$\int\limits_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) d\omega$ = dem gesamten Spannungswiderstand des Betons.

$\Omega_1 \int\limits_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1$ = der gesamten Deformationsarbeit des Eisens.

$\int\limits_0^{\Omega} d\omega \int\limits_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) dh$ = der gesamten Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen drücken aus:

1. daß die Summe der Widerstände gleich $F$ ist;

2. daß die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sind folgende:

$$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \int\limits_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) d\omega = F,$$

$$\Omega_1 \int\limits_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1 + \int\limits_0^{\Omega} d\omega \int\limits_0^{h} B\left(\frac{h}{l}\right) dh = \text{Minimum}.$$

Durch Ableitung in bezug auf $h_1$ bekommt man daraus folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \Omega_1 \frac{1}{l} A'\left(\frac{h_1}{l}\right) + \frac{1}{l}\int\limits_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) h' \, d\omega = 0, \\ \Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \int\limits_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) h' \, d\omega = 0, \end{cases}$$

woraus

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{\int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right) h'\, d\omega}{\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right) h'\, d\omega}, \tag{2}$$

was das Verhältnis zwischen $h_1$ und dem System der Deformationen $h$ ergibt, sobald die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

**Erörterung der Formel (2). — Dehnung des Körpers. — Vollständige Adhäsion.**

$$\text{Formel (2)} = \frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{\int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right) h'\, d\omega}{\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right) h'\, d\omega}.$$

1. Fall. — Man nehme nun die Zugkraft $F$ so klein an als genügt, damit jedes Element des Betons elastische Deformation habe, und man also den Widerstand jeden Elementes als der entsprechenden Verlängerung proportional ansehen kann.

Die Funktionen $A$ und $B$ können auf folgende Weise geschrieben werden:

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1 \frac{h_1}{l},$$

$$B\left(\frac{h}{l}\right) = E \frac{h}{l},$$

daher ist

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1,$$

$$B'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E.$$

Die Formel (2) wird dann:

$$\frac{E_1\left(\frac{h_1}{l}\right)}{E_1} = \frac{\int_0^\Omega E \frac{h}{l} h'\, d\omega}{\int_0^\Omega E h'\, d\omega} \quad \text{oder} \quad h_1 = \frac{\int_0^\Omega E h h'\, d\omega}{\int_0^\Omega E h'\, d\omega}.$$

Hier muß daran erinnert werden, daß $h'$ die Derivate von $h$ nach $h_1$ ist, und trotz der Integrationszeichen, kann man $dh_1$ entfernen und den Bruch durch $l$ dividieren.

$$h_1 = \frac{\int_0^\Omega Eh \frac{dh}{l} d\omega}{\int_0^\Omega E \frac{dh}{l} d\omega}.$$

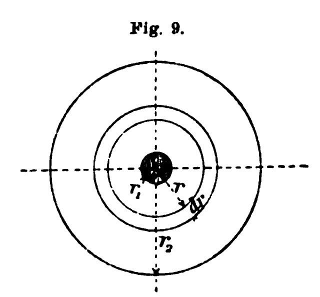
$E \frac{dh}{l} d\omega$ ist die Widerstandsveränderung eines Elementes $l d\omega$, wenn seine Verlängerung $dh$ beträgt. $Eh \frac{dh}{l} d\omega$ ist dagegen die Arbeitsveränderung des Elementes $l d\omega$. Es bezeichnen also die beiden Glieder des Bruches die gleichzeitige Bewegung und Kraftveränderung; mit anderen Worten der Bruch ist die Derivate der Deformationsarbeit des Betons nach seinem Gesamtwiderstand. Der Wert dieser Derivate wird natürlich von dem Gesetze abhängen, welches die Verteilung der Widerstände auf die verschiedenen Elemente des Betonschnittes bestimmt.

Man kann jedoch der Derivaten der gesamten Bewegung zu dem Gesamtwiderstand eine noch klarere Bedeutung geben: in der Tat kann sie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$h_1 = \frac{\int_0^\Omega h\,dh\,d\omega}{\int_0^\Omega dh\,d\omega},$$

wo aber $dh$ nicht das Differential von $h$, als Funktion von $\omega$, sondern als Funktion von $h_1$ ist. In der neuen Gestalt lassen sich beide Integrale graphisch darstellen; ich will mich auf einen sehr einfachen Fall beschränken, dessen Ergebnis jedoch leicht zu verallgemeinern ist. Der Schnitt des Körpers sei kreisförmig, und die Armierung ein Rundstab, dessen Achse zugleich die des Körpers ist.

Fig. 9.



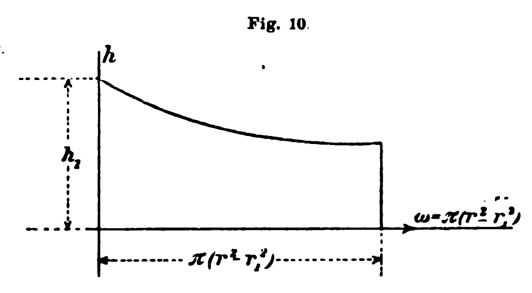

(Fig. 9). Man kann sich alsdann den Betonschnitt in mit dem Rundstab konzentrische Elementflächen zerlegt denken

$$d\omega = 2\pi r dr,$$

und annehmen, daß bei jeder einzelnen die Deformation konstant sei. Somit läßt sich graphisch das Integral $\int_0^{\Omega} h\,d\omega$ darstellen durch die Fläche zwischen einer horizontalen Achse, auf die die Flächen $\pi(r^2-r_1^2)$ als Abszissen aufgetragen werden, und einer Linie, deren Ordinaten die entsprechenden $h$ sind.

Die erste Ordinate wird $h_1$ sein, da infolge der Adhäsion ich vorausgesetzt habe, daß die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons dieselbe Verlängerung haben; die folgenden Ordinaten können $h_1$ gleichen, oder verschieden sein, doch in letzterem Falle muß man mir die Hypothese gestatten: entweder nehmen die Ordinaten ab (wenn $h_1$ die größte Verlängerung ist) oder zu (wenn $h_1$ die kleinste ist) mit dem Bestreben konstant zu werden.

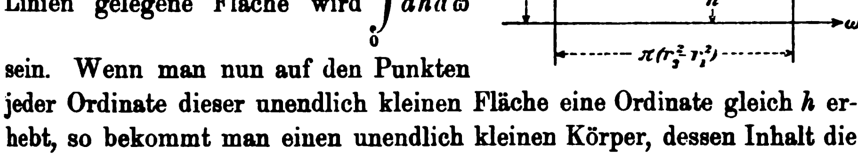
Fig. 10.



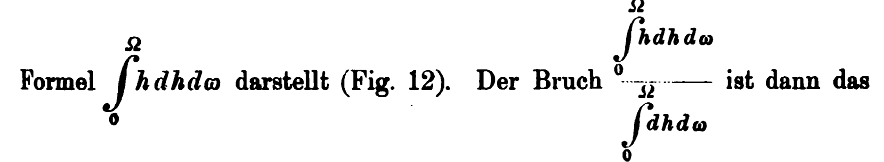

Wenn man nun $h_1$ veränderlich annimmt, so werden auch alle $h$ veränderlich, aber nicht im gleichen Sinne, da bei Zunahme von $h$ (indem die Zugkraft $F$ konstant bleibt), der Betonwiderstand $\left(\int_0^{\Omega} E\frac{h}{l}\,d\omega\right)$ abnimmt, und folglich auch die in Betracht gezogene Fläche. Umgekehrt bei Abnahme von $h_1$ nimmt die Fläche $\int_0^{\Omega} h\,d\omega$ zu. Die neue Linie $(h, \omega)$ wird also die vorhergehende schneiden (Fig. 11), und die zwischen den beiden Linien gelegene Fläche wird $\int_0^{\Omega} dh\,d\omega$ sein.

Fig. 11.

Wenn man nun auf den Punkten



jeder Ordinate dieser unendlich kleinen Fläche eine Ordinate gleich $h$ erhebt, so bekommt man einen unendlich kleinen Körper, dessen Inhalt die

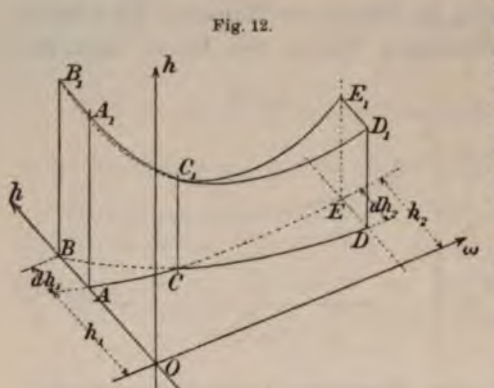


Formel $\int_0^{\Omega} h\,dh\,d\omega$ darstellt (Fig. 12). Der Bruch $\dfrac{\int_0^{\Omega} h\,dh\,d\omega}{\int_0^{\Omega} dh\,d\omega}$ ist dann das

Verhältnis zwischen diesem Raum und der Grundfläche, er ist also eine mittlere Ordinate des Inhaltes nicht in bezug auf $\omega$, sondern auf $\int_0^\Omega d\bar{h}d\omega$.

Die Grundfläche des in Betracht gezogenen Körpers besteht aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Zeichen, deren algebraische Summe ein $dh_1$ entgegengesetztes Zeichen hat. Der Körper selbst hat auch zwei Teile von entgegengesetzten Zeichen, deren algebraische Summe das nämliche Zeichen wie die vorhergehende hat, da ihr Quotient positiv und gleich $h_1$ ist.

Fig. 12.



Im Falle der Figur ($dh_1 > 0$) bekommt man also

$$ABC < CED$$
$$ABCA_1B_1C_1 < CEDC_1E_1D_1.$$

Setzt man voraus, daß die Ordinaten der Linie ($h$, $\omega$) zunehmen, so wird diese mittlere Ordinate $\left(\frac{\text{Inhalt}}{\text{Grundfläche}}\right)$ größer als die kleinste Ordinate $h_1$ sein, während sie nach (2′) gleich $h_1$ sein müßte. Wenn man hingegen annimmt, daß die Ordinaten der Linie ($h$, $\omega$) abnehmen, so wird diese mittlere Ordinate kleiner als die größte $h_1$ sein. Die Linie ($h$, $\omega$), deren Ordinaten weder ab- noch zunehmen können, ist also eine Gerade, deren Ordinaten konstant und gleich $h_1$ sind; und nur in diesem Falle wird der Bruch $\frac{\int_0^\Omega h\,dh\,d\omega}{\int_0^\Omega dh\,d\omega}$ den Wert $h_1$ haben, wie (2′) erfordert. Es sind also in dieser ersten Deformationsperiode, wie vorauszusehen war, und alle zugeben, die Verlängerungen des Betons und des Eisens gleich.

2. Fall. Man nehme nun an, die Zugkraft $F$ habe eine solche Höhe erreicht, daß, wenn die Betonverlängerungen denen des Eisens gleich sind, die elastische Periode beim Beton schon überschritten ist. In diesem Falle ist die Funktion $B$ für alle Betonelemente oder wenig-

stens für die das Eisen berührenden zu $h$ keine lineare, während $A$ eine lineare Funktion zu $h_1$ ist; also

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1 \frac{h_1}{l}$$

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1$$

folglich

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{h_1}{l}$$

Die Formel (2) wird also:

$$\frac{h_1}{l} = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) h'\, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) h\, d\omega}$$

die man auch so schreiben kann

$$\frac{h_1}{l} = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega}$$

$$h_1 = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) \frac{dh}{l}\, d\omega}$$

aber da $B\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega$ das Differential der Arbeit und $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega$ das der Kraft ist, so gleicht die Eisenverlängerung der Derivate der gesamten Betonbewegung zu dem ganzen Betonwiderstand.

Es ist möglich, mit Hilfe dieser Derivate die Art der Deformation zu erkennen. Bezeichnen wir mit $\mu$ das Verhältnis zwischen $B\left(\frac{h}{l}\right)$ und $B'\left(\frac{h}{l}\right)$, (was früher virtuelle Verlängerung genannt wurde), so hat man die Gleichung

$$B\left(\frac{h}{l}\right) = \mu B'\left(\frac{h}{l}\right).$$

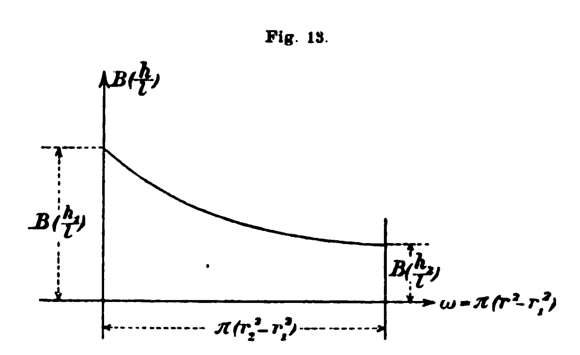
Die Derivate der Arbeit nach der Kraft kann mithin so geschrieben werden:

$$h_1 = \frac{\int_0^\Omega \mu B'\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega}{\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}$$

$$(2'') \qquad h_1 = \frac{\int_0^\Omega \mu l \cdot B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}{\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}$$

Setzen wir nun, wie im vorhergehenden Falle, voraus: 1. daß der Schnitt des Körpers kreisförmig sei und die Armierung, deren Achse die des Körpers sei, auch kreisförmig; 2. daß auf jeder Elementarfläche $2\pi r dr$ die Deformation, daher auch der Widerstand in jeder Flächeneinheit $B\left(\frac{h}{l}\right)$ konstant sei; 3. daß die Deformation in den mit dem Eisen und dem Beton in Berührung kommenden Fibern gleich $h_1$ sei, und sich ferner nach ab- oder zunehmendem Gesetz verändere, mit dem Bestreben in den vom Eisen entferntesten Elementarflächen konstant zu werden: so wird es möglich sein, auf dieser Fläche ein Diagramm der einheitlichen Widerstände zu zeichnen, das von einer Linie begrenzt ist, deren Ordinaten die Werte von $B\left(\frac{h}{l}\right)$ in den folgenden Elementarflächen sind (daher werden auch diese letzteren ab- oder zunehmen mit dem Bestreben konstant zu werden).

Fig. 13.



Gesetzt $h_1$ verändere sich um den Wert $dh_1$, so wird sich jede Ordinate $B\left(\frac{h}{l}\right)$ um den unendlich kleinen Wert $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}$ verändern; es werden jedoch diese Variationen, so wie beim ersten Falle, nicht alle gleiches Zeichen haben, denn bei Abnahme von $h_1$ nimmt der Gesamtwiderstand des Betons $\int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right) d\omega$ (die Diagrammfläche) zu; und bei

Zunahme von $h_1$ tritt das Gegenteil ein. Daher wird sich die gezogene Linie so wie es Fig. 14 zeigt, verändern, und die Fläche, zwischen den beiden Linien und den äußersten Ordinaten wird

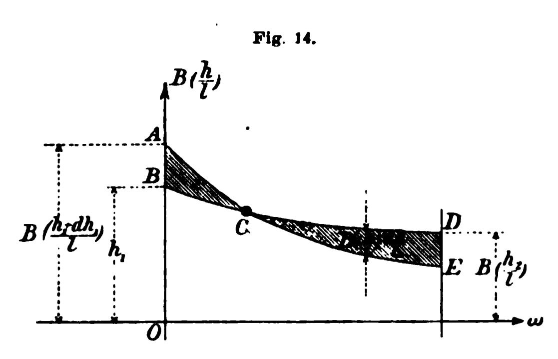



Fig. 14.

$$\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}d\omega,$$ den Nenner des Bruches (2′) darstellen.

Wenn man nun (wie schon beim ersten Fall) auf jeden Punkt einer beliebigen Ordinate dieser Fläche den entsprechenden Wert $\mu l$ aufträgt, so bekommt man einen unendlich kleinen Körper, dessen Inhalt den Zähler des Bruches (2″) darstellt, nämlich

$$\int_0^\Omega \mu l B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}d\omega$$

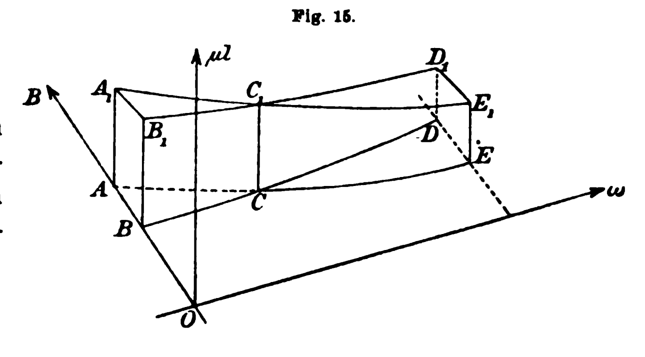



Fig. 15.

Fig. 15 stellt diesen Körper dar, er besteht aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Zeichen

$$ABCA_1B_1C_1$$
$$CDEC_1D_1E_1.$$

Auch die Grundflächen haben entgegengesetzte Zeichen: die Fläche $ABC$ ist als positiv anzusehen, denn in der ihr entsprechenden Fläche $\omega$ verhalten sich die Kräfte $B\left(\frac{h}{l}\right)$ wie $h_1$, sodaß die Differentiale $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}$ positiv sind: der Rauminhalt $ABCA_1B_1C_1$ ist gleichfalls positiv. Die Fläche $CDE$ ist also negativ, sowie der Rauminhalt $CDEC_1D_1E_1$. Als absoluten Wert erhält man

$$CDE > ABC,$$

da die Variation des gesamten Betonwiderstandes, die eben die Fläche $ABCDE$ darstellt, und $dh_1$ entgegengesetzte Zeichen haben.

Es muß auch

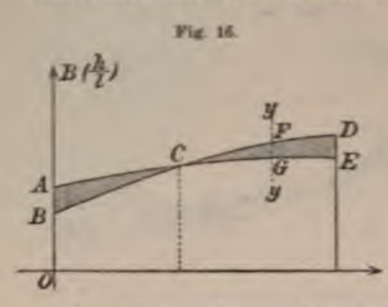
$$CDEC_1D_1E_1 > ABCA_1B_1C_1$$

sein, da die Fläche $ABCDE$ und der Rauminhalt $ABCDEA_1B_1C_1D_1$ gleiches Zeichen haben, weil $h_1$, der Quotient derselben, positiv ist.

Nun ist es möglich verschiedene Hypothesen zu erörtern.

1. Man setze $h_1$ kleiner als irgend ein $h$ voraus, dann muß man das Eisen als vom Beton mit fortgerissen ansehen; das ist eine der Hypothesen von Harel de la Noë. Die Fläche $ABCDE$ wird dann, wie es Fig. 16, und der Körper $ABCDEA_1B_1C_1D_1$, wie es Fig. 17 zeigt, erscheinen. Die Ordinaten $AA_1, BB_1$ werden die kleinsten sein, da der kleinsten Verlängerung ($h_1$) der kleinste einheitliche Widerstand und die kleinste virtuelle Verlängerung $\mu l$ entspricht: diese Ordinaten werden nach und nach zunehmen, bis sie $DD_1EE_1$, den größten Wert, erreichen.

Fig. 16.



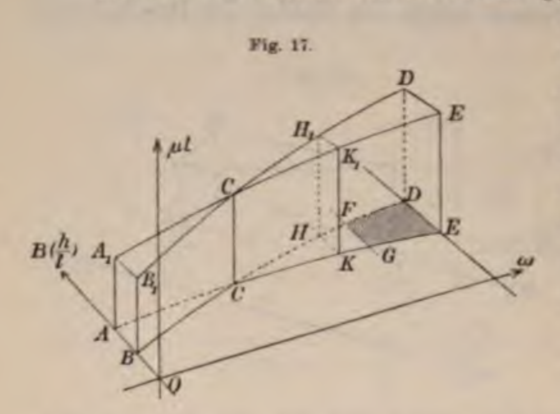

Trennen wir mittelst einer Ordinate $yy$ eine Fläche $CFG$ ab, die der Fläche $ABC$ gleich sei und trennen wir mittelst einer den Geraden $AA_1BB_1$ parallelen senkrechten Ebene einen Raum $CHKC_1H_1K_1$ ab, der gleich $ABCA_1B_1C_1$ sei. Da die Ordinaten dieses Raumes größer als die von $ABCA_1B_1C_1$ sind, so ist

$$CHK < ABC$$

und daher

$$CHK < CFG.$$

Fig. 17.




Das Verhältnis zwischen dem Raume $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und der Fläche $FGDE$ ist der Wert des Bruches

$$\frac{\int_0^{\Omega} \mu l B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}$$

oder von $h_1$, aber dies Verhältnis ist sicher größer als die mittlere Ordinate des Inhaltes $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und daher auch größer als $AA_1BB_1$, die virtuelle Verlängerung, entsprechend einer wirklichen Verlängerung auf der Fiber gleich $h_1$: das ist aber widersinnig, da die wirkliche Verlängerung der virtuellen höchstens gleichkommen, nicht aber sie überschreiten kann. Wenn also die ganze Deformations-

arbeit ein Minimum ist, so kann die Verlängerung $h_1$ des Eisens nicht kleiner als jede Verlängerung $h$ des Betons sein:

2. Man nehme an, $h_1$ sei einer beliebigen Verlängerung des Betons gleich: das ist die gewöhnliche Annahme.

In diesem Falle sind alle Ordinaten des Raumes $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ unter einander gleich, und das Verhältnis zwischen Raum und Grundfläche ist natürlich der Ordinate gleich: aber $h_1$ müßte gleich diesem Verhältnis sein, was unmöglich ist, da dann die Betonelemente eine wirkliche, der virtuellen gleiche, Verlängerung bekämen, was der Voraussetzung, das Beton habe die elastische Periode bereits überschritten, zuwider ist.

Fig. 18.

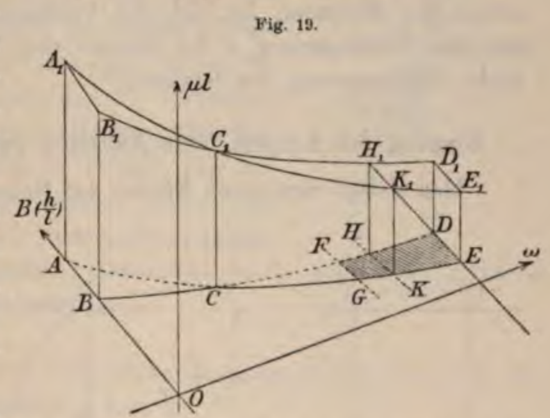
Also wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sich die Betonelemente nicht alle in der Deformationsperiode befinden, kann die Eisenverlängerung nicht einer jeden Betonverlängerung gleich sein.

3. Man nehme also $h_1$ größer als jedes $h$ an, sodaß der Beton als vom Eisen mit fortgerissen zu betrachten ist.

Die Fläche $ABCDE$ wird die in Fig. 18, der Körper $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ die in Fig. 19 angegebene Form haben.

Die Ordinaten $AA_1$, $BB_1$ werden Maxima sein, da der größten Verlängerung ($h_1$) der größte einheitliche Widerstand und die größte virtuelle Verlängerung $\mu l$ entspricht: diese Ordinaten werden nach und nach abnehmen, bis sie in $DD_1$ und $EE_1$ den geringsten Wert erreichen.

Fig. 19.




Trennen wir mittels einer Ordinate $yy$ eine Fläche $CFG$ gleich $ABC$ ab, und mittels einer mit $AA_1$, $BB_1$ parallelen senkrechten Ebene einen Körper $CHKC_1H_1K_1$ der gleich $ABCA_1B_1C_1$ sei. Da die Ordinaten dieses Körpers kleiner als die von $ABCA_1B_1C_1$ sind, ergibt sich:

$$CHK > ABC$$

folglich
$$CHK > CFG,$$
jedoch unmöglich
$$CHK \geq CDE,$$

da der Körper $ABCA_1B_1C_1$ jedenfalls kleiner als $CDEC_1D_1E_1$ ist. Das Verhältnis zwischen $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und der Fläche $FGDE$ ist der Wert des Bruches

$$\frac{\int_0^{\Omega} \mu l \cdot B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}$$

oder der Ordinate $h_1$. Er ist sicher kleiner als die mittlere Ordinate des Körpers $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und könnte auch kleiner als die kleinste Ordinate $DD_1$ oder $EE_1$ sein. Das wäre aber nicht im Widerspruch mit der Hypothese, daß $h_1$ die größte wirkliche Verlängerung sei, da $DD_1$ eine virtuelle Verlängerung ist, die jenseits der elastischen Deformatiosperiode immer größer als die wirkliche ist: höchstens könnte man in diesem Falle sagen, die größte wirkliche Verlängerung sei so wenig von der kleinsten verschieden, daß sie zwischen dieser und der ihr entsprechenden virtuellen Verlängerung enthalten ist.

Also nur bei dieser dritten Hypothese stoßen wir auf keinen Widersinn, sodaß man behaupten kann: „Sobald die Deformationsarbeit ein Minimum ist, ist die Verlängerung $h_1$ des Eisens größer als jede Verlängerung $h$ des Betons und kleiner als die mittlere virtuelle Verlängerung des letzteren.“

## Biegung des Körpers ohne Adhäsion zwischen Beton und Eisen.

Man denke sich einen Körper aus Beton und Eisen von beliebigem Querschnitt (gleichviel ob konstant oder veränderlich) mit ebener Schwerpunktlinie. Fig. 20 stellt eine Schicht des Körpers dar zwischen den so nahe zu einander liegenden Schnitten $AB$ und $CD$, daß man sie als kongruent, parallel und

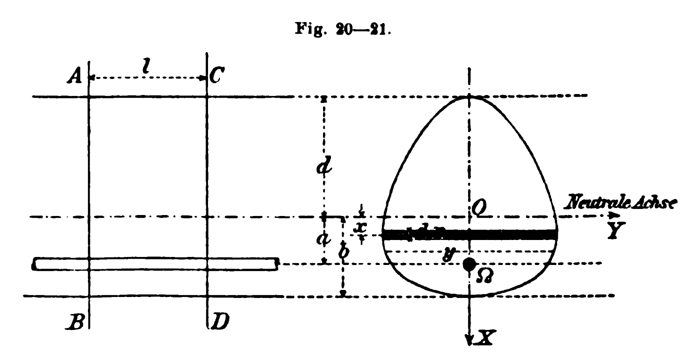


Fig. 20—21.

in gleicher Richtung gelegen betrachten kann. Fig. 21 stellt den senkrechten Querschnitt $AB$ des Körpers dar: sei $\Omega$ der Querschnitt der Armierung, die zu größerer Einfachheit in der Figur mit einem einzigen Rundstab bezeichnet ist, die aber auch aus mehreren Rundstäben oder anders geformten Eisen bestehen kann.

Ich nehme an:

1. Es sei keine Adhäsion zwischen Beton und Eisen vorhanden, sodaß sich die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons ganz unabhängig von einander verlängern können.

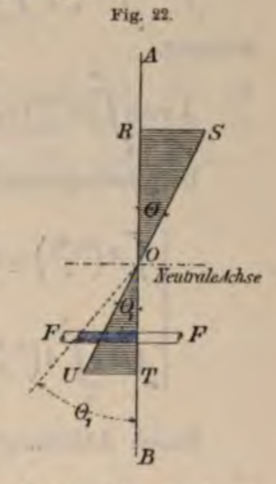
2. Bei den Betonelementen finde die Verteilung der Widerstände dem linearen Gesetze gemäß statt, sodaß sie sich um die neutrale Achse des Schnittes $CD$ um einen gleichen Winkel $\theta$ drehen.

3. Dieselbe Annahme gelte auch für die Eisenelemente, deren gemeinsamer Drehungswinkel $\theta_1$ sei.

Auf Figur 22 stellt die Linie $RSOUT$ das lineare Gesetz der Verlängerungen oder Verkürzungen der Betonfiber $l$ dar.

Nun sei folgende Aufgabe gestellt:

Fig. 22.




Welche gegenseitige Beziehung besteht zwischen den Winkeln $\theta_1$ und $\theta$, sobald ihr gesamtes Widerstandsmoment zur neutralen Achse gleich $M$, und ihre gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist?

Beide Bedingungen können gleichzeitig angenommen werden; die Summe der beiden Widerstandsmomente des Betons und des Eisens ist konstant und gleich $M$: wenn sich $\theta_1$ verändert, so verändert sich das zweite Moment, folglich auch das erste, daher auch $\theta$, $\theta$ kann also als Funktion von $h_1$ betrachtet werden, und es ist möglich die Beziehung zu bestimmen, welche zwischen den beiden Winkeln stattfinden muß, damit die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum sei.

Sei:

$x_1 \theta_1$ = die Deformation eines Eisenelementes $(l d\omega)$, das von der neutralen Achse einen Abstand $x$ hat.

$\frac{x_1 \theta_1}{l}$ = die entsprechende einheitliche Verlängerung oder Verkürzung.

$A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ = der entsprechende einheitliche Widerstand.

$\frac{1}{l} A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ = die Derivate der Funktion $A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ zu $x_1 \theta_1$.

$x\theta$ = die Deformation eines Betonelementes $(l y d y)$, das von der neutralen Achse einen Abstand $x$ hat.

$\frac{x\theta}{l}$ = die entsprechende einheitliche Verlängerung oder Verkürzung.

$B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = der entsprechende einheitliche Widerstand.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = die Derivate der Funktion $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ zu $x\theta$.

$\theta'$ = die Derivate von $\theta$ zu $\theta_1$, wenn bei Veränderung der beiden Drehungen $\theta$ und $\theta_1$ die Summe der Widerstandsmomente gleich $M$ ist.

Dann ist also:

$\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega$ = Widerstandsmoment des Eisens.

$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx$ = das gesamte Widerstandsmoment des Betons.

$\int d\omega \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\theta_1$ = die gesamte Deformationsarbeit der Armierung.

$\int_{-d}^{b} y\,dx \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)x\,d$ = die gesamte Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{cases} \int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega + \int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx = M \\ \int d\omega \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\theta_1 + \int_{-d}^{b} y\,dx \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)x\,d\theta = \text{Minimum.} \end{cases}$$

Durch Ableitung nach $\theta$ bekommt man:

$$\begin{cases} \frac{1}{l}\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega + \frac{\theta'}{l}\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx = 0 \\ \int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega + \theta'\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dy = 0, \end{cases}$$

aus der ersten

$$\theta' = \frac{\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx}$$

und durch Substitution in der zweiten

$$(3) \qquad \frac{\int A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1 \, d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1^2 \, d\omega} = \frac{\int\limits_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y \, dx}{\int\limits_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y \, dx},$$

was die Beziehung zwischen $\theta$ und $\theta_1$ bestimmt, wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

### Erörterung der Formel (3).

Formel (3):

$$\frac{\int A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1 \, d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1^2 \, d\omega} = \frac{\int\limits_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y \, dx}{\int\limits_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y \, dx}.$$

1. Fall: Setzen wir das Moment $M$ so klein voraus, daß die Deformation der einzelnen Eisen- und Betonelemente innerhalb der elastischen Periode bleibt. Dann ergibt sich, sowohl für die gedehnten wie für die zusammengedrückten Fibern:

$$A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) = E_1\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right),$$

$$A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) = E_1,$$

daher

$$\int A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1 \, d\omega = E_1 \frac{\theta_1}{l} \int x_1^2 \, d\omega \; .$$

$$\int A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1^2 \, d\omega = E_1 \int x_1^2 \, d\omega .$$

mithin

$$\frac{\int A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1 \, d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right) x_1^2 \, d\omega} = \frac{E_1 \frac{\theta_1}{l} \int x_1^2 \, d\omega}{E_1 \int x_1^2 \, d\omega},$$

Ferner für die gezogenen Betonelemente (von $-d$ bis 0)

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E' \frac{x\theta}{l} \qquad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E'$$

und für die zusammengedrückten Elemente (von 0 bis $b$)

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E'' \frac{x\theta}{l} \qquad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E''.$$

Man muß die bestimmten Integrale der Formel (3) als von zwei Integralen gebildet betrachten; das eine für den gezogenen Teil, zwischen den Grenzen $-d$ und 0, das andere für den zusammengedrückten Teil, zwischen 0 und $b$.

$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, dx = \int_{-d}^{0} E' \frac{x\theta}{l} x y\, dx + \int_{0}^{b} E'' \frac{x\theta}{l} x y\, dx$$

$$= E' \frac{\theta}{l} \int_{-d}^{0} x^2 y\, dx + E'' \frac{\theta}{l} \int_{0}^{b} x^2 y\, dx$$

$$= \frac{\theta}{l} \left\{ E' \int_{-d}^{b} x^2 y\, dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\, dx \right\}$$

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\, dx = \int_{-d}^{0} E' x^2 y\, dx + \int_{0}^{b} E'' x^2 y\, dx$$

$$= E' \int_{-d}^{b} x^2 y\, dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\, dx\,.$$

Somit wird das zweite Glied der Formel (3)

$$\frac{\dfrac{\theta}{l}\left\{ E' \int_{-d}^{0} x^2 y\, dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\, dx \right\}}{E' \int_{-d}^{0} x^2 y\, dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\, dx} = \frac{\theta}{l}\,,$$

und die Formel (3) wird $\frac{\theta_1}{l} = \frac{\theta}{l}$

$$\theta_1 = \theta,$$

d. h. während der ersten Deformationsphase, solange das ganze Moment so klein ist, daß die Beanspruchungen der Eisen- und Betonelemente innerhalb der elastischen Deformationsgrenze bleiben, ist die Drehung der Eisen- gleich der der Betonelemente."

Setze man das Moment $M$ groß genug voraus, daß ein Teil der Betonelemente über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht werde, während die Hypothese der gleichen Drehungen unverändert bleibt. Es wird also die Funktion $A$ linear zu $\theta_1$ sein, und das erste Glied der Formel (3) $\frac{\theta_1}{l}$ gleich sein, aber die Funktion $B$ wird zu $\theta$ nicht mehr in lineare Formen zerlegbar sein, sodaß das zweite Glied der Formel (3) so wie in der allgemeinen Formel bleibt

Der Zähler dieser zweiten Seite ist die Summe unendlich kleiner Größen $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xydx$, die, da $y$ gleich oder größer als Null ist, und $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ und $x$ gleiches Zeichen haben, alle positiv sind.

Der Nenner desselben Bruches ist ebenfalls die Summe unendlich kleiner Größen $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2ydx$, die alle positiv sind, da $y$ und $x^2$ gleich oder größer als Null sind, und $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ sich dem Nullwerte nähern aber niemals negativ werden kann. Jedem Werte des Zählers entspricht auch ein Wert des Nenners, und ihr Verhältnis kann in einfacher Weise ausgedrückt werden. In der Tat ist $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = \mu\ B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ (wo $\mu$ die einheitliche virtuelle Deformation bedeutet), daher

$$\frac{B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xydx}{B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2ydx} = \frac{\mu}{x} = \frac{\xi}{l},$$

wo $\xi$ der Drehungswinkel des Querschnitts um die neutrale Achse ist, durch den das betrachtete Element eine wirkliche, der virtuellen gleiche Deformation erlangt. Diese Drehung $\xi$ ist, für die der neutralen Achse nahe liegenden Elemente, deren Beanspruchung die elastische Deformation nicht überschreitet, gleich dem Winkel $\theta$; je weiter sich das Element von der neutralen Achse entfernt, desto mehr nimmt die Drehung $\xi$ zu.

Die zweite Seite der Gleichung (3) kann man also so schreiben:

$$\frac{\int_{-d}^{b} \frac{\xi}{l}\, B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2ydx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2ydx},$$

wo jede unendlich kleine Größe gleich oder größer als Null und $\xi \gtrless 0$ ist. Diese beiden Bedingungen erlauben uns die sichere Behauptung, daß der Wert des vorgenannten Bruches in unserem Falle größer als $\frac{\theta}{l}$ ist, und da derselbe gleich $\frac{\theta_1}{l}$, so ist es möglich, in dieser zweiten Deformationsphase

$$\theta_1 > \theta$$

anzusetzen, d. h. die Drehung um die neutrale Achse ist bei den Eisenelementen größer, als bei den Betonelementen. Es ist auch möglich,

durch Versuche das Verhältnis zwischen $\theta$ und $\theta_1$ zu bestimmen. Früher hat man gefunden:

$$\frac{\theta_1}{l}=\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, d x}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\, d x},$$

eine Gleichung, die so geschrieben werden kann:

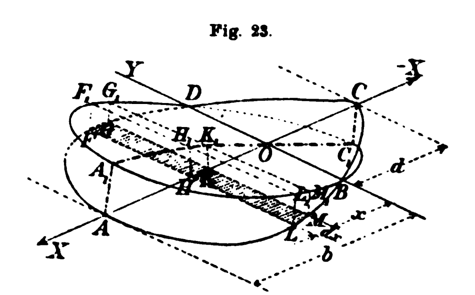
$$\frac{\theta_1}{l}=\frac{\theta}{l}\,\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, d x}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\times\frac{\theta}{l}\, x^2 y\, d x},$$

wo Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, d x}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\times\frac{\theta}{l}\, x^2 y\, d x}$$

Momente von Größen von drei Dimensionen sind, die sich leicht graphisch darstellen lassen. In Fig. 23 stellt $ABCD$ den senkrechten Querschnitt des gebogenen, in der Ebene der Achsen $xx$, $yy$ (der neutralen Achse) enthaltenen Körpers dar. Auf jedem Punkte der Geraden $AOC$ (mit der Abszisse $x$), hat man eine Ordinate erhoben, deren Wert $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ dem einheitlichen Widerstand im betrachteten Punkte entspricht. So erhält man

Fig. 23.




die Linie $A_1OC_1$ welche in der Strecke um den Punkt $O$, wo die Deformation elastisch ist, geradlinig ist; an den anderen Strecken ist dieselbe gekrümmt und stets zur Achse $AOC$ konvex.

Fig. 23 stellt dann den zylindrischen Körper $ABCDA'BC'D$ dar, welcher als Grundfläche den senkrechten Querschnitt $ABCD$, und als Erzeugende eine der Achse $yy$ parallele und die bestimmende Linie

$A_1 O C_1$ berührende Gerade hat. Das Moment dieses Körpers zur Ebene welche die neutrale Achse $yy$ enthält und zur Achse $xx$ senkrecht ist, ist $\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx$. Nehmen wir in der Tat eine unendlich kleine Schicht $FGML$ in Betracht, die der Achse $yy$ parallel, deren Länge $GM = y$, deren Breite $HK = dx$ und deren Abszisse $KO = x$ sei; dieser unendlich kleine Körper hat eine konstante Höhe $KK_1 = B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$, also einen Rauminhalt $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) y\,dx$ und ein Moment zu der vorgenannten Ebene $\left(B\left(\frac{x\theta}{l}\right) y\,dx\right) x = B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx$: das vollständige Moment des geraden Körpers ist also

$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx.$$

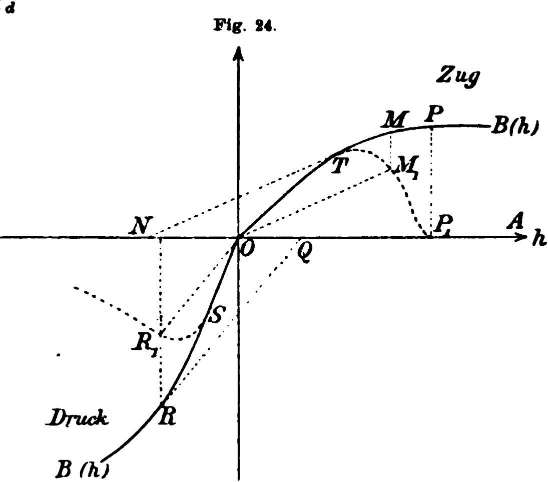
Wenn die Ordinaten statt $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ den Wert $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l}$ hätten, so würde man einen anderen Körper mit derselben Grundfläche $ABCD$ bekommen, dessen Moment zu der schon betrachteten Ebene

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l}\, xy\,dx$$

wäre.

Um das Verhältnis zwischen den beiden Momenten zu bestimmen, dient folgendes Diagramm. (Fig. 24) Man zeichne eine Kurve $RSOTMP$, wo die Abszissen die einheitlichen Deformationen $h$, die Ordinaten die entsprechenden Werte der einheitlichen Widerstände $B(h)$, sind; diese Kurve ist das gewöhnliche Diagramm der einheitlichen Widerstände.

Fig. 24.

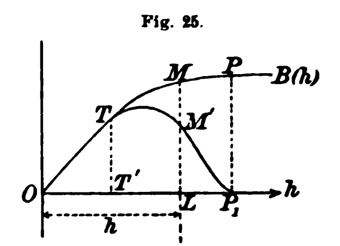



Wenn man nun an jedem Punkte $M$ oder $R$ der beiden Abzweigungen eine Tangente, und vom Punkte $O$ eine parallele Gerade bis zu den entsprechenden Ordinaten bei $M$ oder $R_1$ zieht, so erhält man eine Linie $R_1 S O T M_1 P_1$, deren Ordinaten das Produkt der Abszisse

$h$ und der Tangente $B'(h)$ sind: diese Linie stellt also die Funktion $B'(h)h$ dar, deren Eigenschaften folgende sind: 1. in den geradlinigen Strecken $OS$, $OT$ fällt die Funktion $B'(h)h$ mit der $B(h)$ zusammen. 2. Außerhalb der Strecke $SOT$ ist die Ordinate $B'(h)h$ beständig kleiner als $B(h)$; bei Zunahme der Abszisse wächst $B'(h)h$, bis sie den größten Wert erreicht, dann sinkt dieselbe bis Null, und bleibt so, bis die Widerstandskurve der Achse $OA$ parallel wird.

Betrachten wir jetzt hinsichtlich der Spannungen die beiden Flächen zwischen den vorgenannten Linien, also einer beliebigen Ordinate $MM'L$ (Fig. 25) und der Abszissenachse, und integrieren wir deren elementare Momente zur Achse $OB$; diese beiden Momente sind Funktionen von $h$, die man durch $\alpha_t(h)$ und $\beta_t(h)$ bezeichnen kann; diese Funktionen sind bekannt, sobald die Linie der einheitlichen Widerstände bekannt ist; es ist dann auch ihr Verhältnis $\frac{\alpha_t(h)}{\beta_t(h)} = \gamma_t(h)$ bekannt. Die Funktion $\gamma_t(h)$ ist innerhalb der Grenzen $h = 0$ und $h = OT_1$, nämlich in der Periode der elastischen Deformation, gleich der Einheit, dann wächst sie immer rascher, und wenn die Abszisse den Wert $OP_1$ überschritten hat, wird der Nenner $\beta_t(h)$ konstant. Dasselbe gilt für die Pressung, und so erhält man ähnliche positive Funktionen, die wir mit $\alpha_c'(h)$ $\beta_c'(h)$ $\gamma_c(h)$ bezeichnen wollen.

Fig. 25.




Es sind also:

$$\alpha(h) = \int_0^h B(h)h\,dh$$

$$\beta(h) = \int_0^h B'(h)h \cdot h\,dh$$

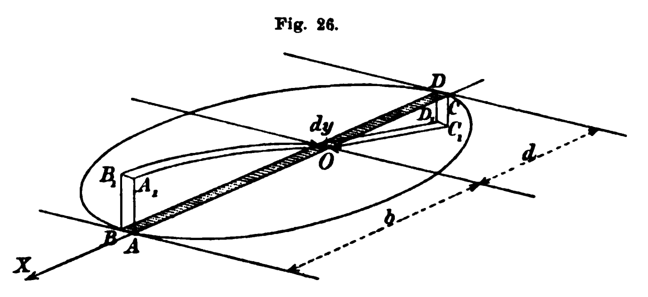
$$\gamma(h) = \frac{\int_0^h B(h)h\,dh}{\int_0^h B'(h)h \cdot h\,dh}.$$

Sei nun in Fig. 26 die unendlich kleine Schicht $ABA_1B_1D_1C_1DC$ gegeben, deren senkrechter Querschnitt das unendlich kleine Streifchen $BADC$, zu der $x$-Achse parallel, mit den Abszissen $-d$ und $b$ und der

Breite $dy$, darstellt. Die äußersten Ordinaten der Kurve $A_1 O C_1$ werden durch die Formeln ausgedrückt

$$AA_1 = B\left(\frac{b\theta}{l}\right) \qquad CC_1 = B\left(\frac{-d\theta}{l}\right),$$

und die Kurve ist der Linie $B(h)$ auf Fig. 24 ähnlich; das Ähnlichkeitsverhältnis entspricht dem Verhältnis zwischen den Abszissen beider Linien, denen gleiche Ordinaten entsprechen. Es ist also der Quotient von $b$ und der einheitlichen Deformation




entsprechend $B\left(\frac{b\theta}{l}\right)$, also $\frac{b\theta}{l}$, das Ähnlichkeitsverhältnis ist demnach $\frac{l}{\theta}$. Das Moment dieser unendlich kleinen Schicht ist mithin:

$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) \times x dy dx = dy \frac{l^2}{\theta^2} \left\{\alpha_t\left(\frac{b\theta}{l}\right) + \alpha_c\left(\frac{-d\theta}{l}\right)\right\}.$$

Dementsprechend, wenn man mit $y_1 y_2$ die äußersten Ordinaten des gespannten Teils des Körpers auf Fig. 23 darstellt, und wenn $y_3 y_4$ die äußersten des gepreßten bezeichnen, so ist das ganze Moment des Körpers:

$$\int_{0}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xydx = \frac{l^2}{\theta^2} \left\{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy\right\}.$$

Ebenso kann man das Moment

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xydy$$

so schreiben:

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xydx = \frac{l^2}{\theta^2} \left\{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy\right\}.$$

Das Verhältnis der beiden Momente gestaltet sich mithin folgendermaßen:

$$\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xydx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xydx} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \beta_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}.$$

Da die Verhältnisse zwischen den Funktionen $\alpha$ und $\beta$ von der Funktion $\gamma$ gegeben sind, deren Wert, wie oben gezeigt, in der elastischen Periode gleich 1 und außerhalb derselben größer als 1 ist, und da auch die Funktion immer positiv ist, so kann man daraus schließen: 1. So lange $\theta$ den Wert hat, bei dem kein Betonelement über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird, ist der betrachtete Bruch gleich 1, so daß man schreiben kann:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\theta}{l} \qquad \theta_1 = \theta,$$

wie im ersten Falle auf andere Art bewiesen wurde. 2. Sobald $\theta$ einen Wert erreicht, bei dem ein noch so kleiner Teil vom Querschnitt des gebogenen Körpers über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird, wird der betrachtete Bruch größer als Eins, so daß man hat:

$$\frac{\theta_1}{l} > \frac{\theta}{l} \qquad \theta_1 > \theta.$$

Je mehr dann die Beanspruchung des gebogenen Körpers zunimmt, desto mehr wächst das Verhältnis zwischen $\theta_1$ und $\theta$, bis zum Werte, wo die Beanspruchung der Betonelemente die Bruchbelastung erreicht. Dieser höchste Wert des Verhältnisses hängt natürlich von der Querschnittform, der Lage der neutralen Achse und der Veränderung der Funktionen $\gamma_t(h)$, $\gamma_c(h)$ ab.

Es besteht also dieser wichtige Unterschied zwischen den gezogenen Körpern, wenn die Adhäsion zwischen Beton und Eisen nicht berücksichtigt wird, und den gebogenen, daß während sich bei ersteren Eisen und Beton gleichzeitig der Bruchgrenze nähern, bei letzteren (keine Adhäsion) rascher der Bruch bei Beton als bei Eisen erfolgt. Der neue Ausdruck des Verhältnisses zwischen $\theta_1$ und $\theta$

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_2}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_1}^{y_4} \beta_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy} = F(\theta)$$

ist für die Rechnung bequemer als der andere. In der Tat enthält er Integrale bekannter Funktionen $\alpha$ und $\beta$ innerhalb einer bekannten Fläche: für jeden bekannten Querschnitt des gebogenen Körpers und für jede Lage der neutralen Achse ist jenes Verhältnis eine Funktion $F(\theta)$, die man näherungsweise leicht bestimmen kann, womit eine der Gleichungen bestimmt wird, welche die Werte von $\theta$ und $\theta_1$ gibt.

Im allgemeinen sind die Unbekannten drei: $\theta$, $\theta_1$ und der Parameter (die Lage der neutralen Achse bestimmend), und drei sind auch die Gleichungen: 1) die Gleichung der Momente, 2) die, welche die Gleichheit zwischen der Druck- und Zugresultante bestimmt, 3) die Gleichung $\frac{\theta_1}{\theta} = F(\theta)$.

Obwohl die vorhergehende Erörterung für die Entwicklung meiner Theorie genügt, so will ich doch eine neue Form für obigen Beweis und für das Verhältnis zwischen $\theta$ und $\theta_1$ geben, da sie Funktionen enthält, die in einigen Fällen leichtere Anwendung finden können. Jedoch ist es vorher nötig einige einfache Eigenschaften der Momente besonderer geometrischer Formen darzutun.

1. $ABCD$ sei ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$; das Moment des Rechteckes zur Geraden $AB$ ist

Fig. 27.

$$ab \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a^2b,$$

das Moment des Dreieckes $ABD$ zu derselben Geraden ist

$$\tfrac{1}{2}ab \cdot \tfrac{2}{3}a = \tfrac{1}{3}a^2b,$$

das Moment des Dreieckes $ABD$ ist

$$\tfrac{1}{2}ab \cdot \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{6}a^2b.$$

Zwischen den drei Momenten besteht die Gleichung

$$\text{Mom}\,(ABCD) - \text{Mom}\,(BCD) = \text{Mom}\,(ABD)$$

die man auch so schreiben kann

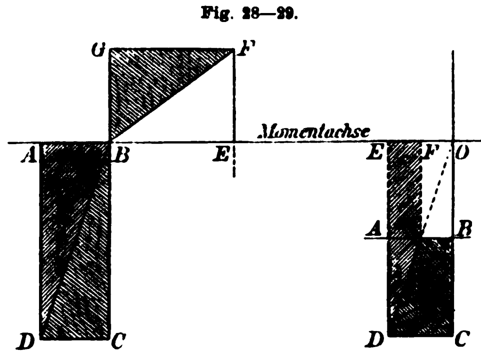
$$2\,\{(\text{Mom}\,ABCD - \text{Mom}\,BCD)\} = \text{Mom}\,(BCD)$$

daher

$$\frac{\text{Mom}\,(BCD)}{2\,\{(\text{Mom}\,ABCD) - \text{Mom}\,(BCD)\}} = 1.$$

2. Dieselben Eigenschaften lassen sich auf ähnliche Art beweisen für Figuren, die man in Summen oder Differenzen von Rechtecken zer-

Fig. 28—29.



legen kann, deren Base auf der Achse der Momente liegt. So ergibt Fig. 28

$$\text{Mom}\,(ABCDEFG) - \text{Mom}\,(DCBGF) = \text{Mom}\,(ADBFE)$$
$$\text{Mom}\,(DCBFG) = 2\,\text{Mom}\,(ADBFE)$$
$$\frac{\text{Mom}\,(DCBFG)}{2\,\text{Mom}\,(ADBFE)} = 1$$

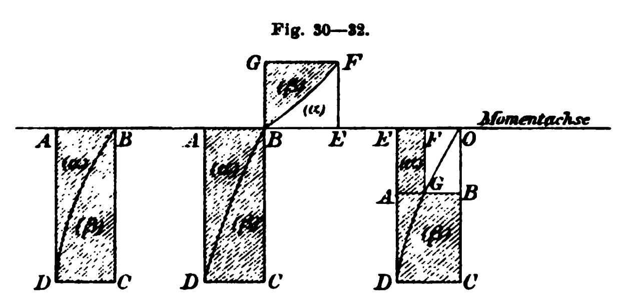
und Fig. 29

$$\text{Mom}\,(EDCBGF) - \text{Mom}\,(GDCB) = \text{Mom}\,(EDGF)$$
$$\text{Mom}\,(GDCB) = 2\,\text{Mom}\,(EDGF)$$
$$\frac{\text{Mom}\,(GDCB)}{2\,\text{Mom}\,(EDGF)} = 1.$$

3. Seien nun die Rechtecke durch Kurven, welche die entgegengesetzten Winkel verbinden und zur Momentachse konvex sind, geteilt, wie es die Figuren 30, 31, 32 darstellen. In diesem Falle werden sich die Momente ändern, so daß

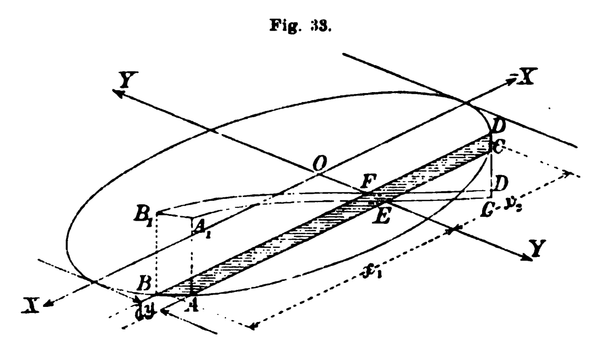
$$\frac{\text{Mom}\,(\beta)}{2\,\text{Mom}\,(\alpha)} > 1.$$

Fig. 30—32.




4. Nun nehme man an, es werden auf den Punkten der vorhergehenden Figuren Ordinaten von konstanter Höhe errichtet, sodaß gerade Prismen entstehen. Dann erhalten wir statt der Momentachse eine Momentebene, und die Kurven, welche früher die Rechtecke teilten, werden zylindrische Oberflächen. Aber es bestehen die schon erwähnten Eigenschaften fort, so daß man für die beiden ersten Fälle schreiben kann:

Fig. 33.



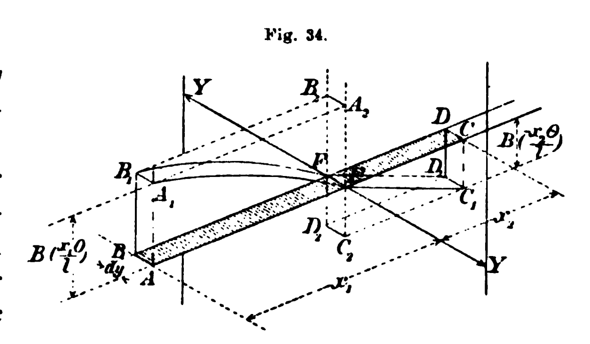

$$\frac{\text{Mom Prisma}\,(\beta)}{2\,\text{Mom Prisma}\,(\alpha)} = 1$$

und für den dritten Fall:

$$\frac{\text{Mom Prisma}\,(\beta)}{2\,\text{Mom Prisma}\,(\alpha)} > 1.$$

Nehmen wir wieder den in Fig. 23 dargestellten Körper in Betracht und beschränken wir wieder unsere Untersuchung auf eine unendlich kleine Schicht des Körpers (Fig. 33), dessen Grundfläche ein beliebiges Streifchen sei, das zur neutralen Achse $yy$ senkrecht ist, die Breite $dy$ und die äußersten Abszissen $x_1 x_2$ hat.

Fig. 34.



Wie schon früher bewiesen, wird das Moment dieses unendlich kleinen Körpers, das zur Ebene der Achse $ox$ senkrecht ist und die neutrale Achse $yy$ enthält, durch $dy\int_{-x_2}^{x_1} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx$ analytisch ausgedrückt. Wenn man die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf die Momentfläche projektiert (Fig. 34), so erhält man, so zu sagen, den Ergänzungskörper für diese Schicht, indem man das Moment der vorgenannten Schicht (Fig. 33) von dem der Parallelipede $ABA_1B_1A_2B_2EFC_2D_2C_1D_1CD$ subtrahiert. Man erhält somit:

$$\text{Mom}\,(A_1B_1A_2B_2EFC_2D_2C_1D_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}x_1^2 B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) dy - dy\int_0^{x_1} B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) x dx - \tfrac{1}{2}x_2^2 B\left(\frac{-x_2\theta}{l}\right) dy$$

$$- dy\int_{-x_2}^{0} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx = \tfrac{1}{2}dy\left[x_1^2 B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) - 2\int_0^{x_1} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}dy\left[- x_2^2 B\left(-\frac{x_2\theta}{l}\right) - 2\int_{-x_2}^{0} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}dy\int_0^{x_1} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{\theta}{l}x^2 dx + \tfrac{1}{2}dx\int_{-x_2}^{0} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{\theta}{l}x^2 dx\,^{1)}$$

$$= \tfrac{1}{2}dy\int_{-x_2}^{x_1} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l} x dx.$$

---

1) Bei $\int B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{\theta}{l}x^2 dx$ setze man: $v' = B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{\theta}{l}$, $u = x^2$ daher $v = B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$, $u' = 2x$, daher

$$\int B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{\theta}{l}x^2 dx = x^2 B\left(\frac{x\theta}{l}\right) - 2\int B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx.$$

Nach den vorhergehenden Ausführungen ist das Verhältnis zwischen dem Moment der Schicht $ABA_1B_1EFC_1D_1CD$ und dem doppelten Moment der Ergänzungsschicht $AB_1A_2B_2EFC_1D_1C_2D_2$, wenn die Linien $A_1E$, $EC_1$ gerade sind (elastische Deformation), gleich eins, und es ist größer als eins, wenn ein Teil dieser Linien Kurven sind (und die Konvexität nach der Momentfläche gerichtet ist), wie eben in unserem Falle.

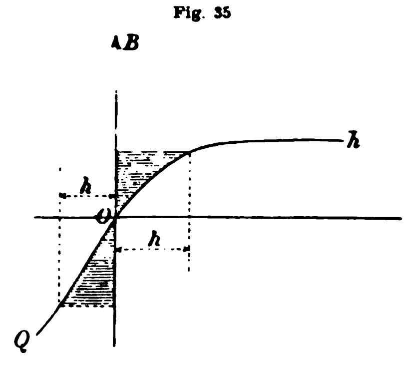
Für die verschiedenen Streifchen, in welche der Querschnitt eines gebogenen Körpers zerlegt werden kann, sind keine andern Fälle denkbar als die von den Figuren 30, 31, 32 dargestellten. Man darf also auf alle die vorhergehenden Ausführungen anwenden.

$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx$ ist aber die Summe der Momente aller Schichten, in welche man den Körper der Fig. 23 zerlegen kann; ebenso ist $\int_{-d}^{d} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l} xy\,dx$ die doppelte Summe der Momente der betreffenden Ergänzungsschichten. Da nun alle Posten positiv sind, so erhält man durch Übertragung auf die Summen dessen, was für die einzelnen Posten bewiesen wurde:

$$\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l} xy\,dx} > 1 \left[\text{nämlich } \frac{\theta_1}{\theta} > 1\right];\ \theta_1 > \theta.$$

Aus dieser neuen Ausführung geht hervor, daß von den beiden Gliedern des Verhältnisses das eine das Moment, das andere das doppelte Moment zweier Körper ist, deren ersterer, in Fig. 23 dargestellt, nichts anders als das Diagramm der einheitlichen Widerstände der Querschnittselemente bildet, und deren anderer durch Projektion der Linie $BA$, $BC$ (Fig. 23) auf die Momentfläche erhalten wird. Diese beiden Körper und ihre Momente hängen von der Form des senkrechten Querschnittes des gebogenen Körpers, von der Lage der neutralen Achse und von Funktionen der bekannten einheitlichen Defor-

Fig. 35



mationen $h$ ab; eine derselben ist die, welche früher mit $\alpha_t(h)$ und $\alpha_c(h)$ bezeichnet wurde; die andere, welche wir nun mit $\delta_t(h)$ (Zug) und $\delta_c(h)$ (Pressung) bezeichnen, ist das Moment zu der Achse $OB$ der in Fig. 35 schraffierten Fläche, wo $EOP$ die Linie der einheitlichen Widerstände ist. Es ist also leicht, für jede Querschnittform eines gebogenen Körpers die Veränderungen der Größen $\theta_1$ und $\theta$, im Verhältnisse $\frac{\theta_1}{\theta}$, als Funktion des Drehungswinkels $\frac{\theta}{l}$ zu berechnen.



Es ist hier nötig zu bemerken, daß, wenn man statt $\theta =$ konstant, $\xi =$ konstant angenommen hätte, $\theta_1 = \xi$ wäre.

In der Tat: da für die elastisch beanspruchten Elemente $\xi = 0$ ist, so besteht für jedes Betonelement die Gleichung:

$$\theta_1 B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y dx = \theta' \frac{\xi}{l} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y dx,$$

und die Formel (3) wird:

$$\frac{1}{l} = \frac{\xi}{l} \frac{\int\limits_{-d}^{b} \theta' B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y \, dx}{\int\limits_{-d}^{b} \theta' B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y \, dx} = \frac{\xi}{l},$$

nämlich $\theta_1 = \xi$, also „die wirkliche Drehung des Eisens gleicht der konstanten und virtuellen des Betons". Dieses Resultat hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem, was bei gezogenen Körpern gefunden wurde, wenn die Adhäsion zwischen den beiden Materialien nicht berücksichtigt wird.

### Gebogener Körper, falls Adhäsion zwischen Beton und Eisen stattfindet.

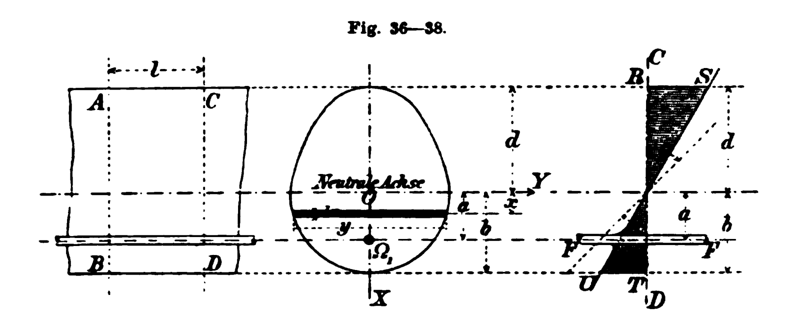
Es sei ein Körper aus Eisen und Beton von beliebigem Querschnitt (konstant oder veränderlich) gegeben, bei dem die Schwerpunktlinie in einer Ebene liegt. Nehmen wir eine Schicht des Körpers zwischen zwei so nahe aneinander liegenden Schnitten in Betracht, daß man dieselben als gleich, parallel und gleich gelegen ansehen kann (Fig. 36). Fig. 37 stellt den senkrechten Querschnitt $AB$, und $\Omega$ den Querschnitt der Eisenarmierung dar, den man kreisförmig gewählt hat, obwohl die Form keinen Einfluß hat. Es werden folgende Hypothesen angenommen:

1. Die Fläche $AB$ schneidet, nach der Deformation, den Schnitt $AB$ in der gegenwärtigen Lage, unabhängig vom Verteilungsgesetz der Widerstände, nach der Geraden $oy$ (von uns neutrale Achse der Sektion genannt), die zur Biegungsebene senkrecht ist.

2. Der Drehungswinkel um die neutrale Achse sei für jedes Eisenelement derselbe und gleich $\theta_1$; der jedes Betonelementes $d\omega$ sei vom Winkel $\theta$ dargestellt.

Auf Fig. 38 stellt die Linie $RSOUT$ das Gesetz der Verlängerungen oder Verkürzungen $h$ der Betonfiber dar, über welches Gesetz hier keine anderen Hypothesen aufgestellt werden.

Fig. 36—38.




Jetzt können wir folgende Aufgabe stellen:

„Was für eine Beziehung hat zwischen den Winkeln $\theta$ und $\theta_1$ stattzufinden, wenn das Widerstandsmoment zur neutralen Achse $= M$ und die Deformationsarbeit ein Minimum ist?"

Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig annehmen: die Summe der zwei Widerstandsmomente des Eisens und des Betons ist konstant und gleich $M$, sobald sich $\theta_1$, und daher das erste Moment, verändert, muß sich auch das zweite verändern, so daß, wenn die Drehungen $\theta$ von Element zu Element nach einem bestimmten, obzwar uns unbekannten Gesetze verschieden sind, jedem Werte des Widerstandsmomentes des Betons für die verschiedenen Betonelemente ein besonderer Wert des Winkels $\theta$ entspricht; $\theta$ ist also nicht nur als Funktion der Koordinaten des Elementes $d\omega$, sondern auch als Funktion zu $\theta_1$ zu betrachten, und es ist möglich den Zusammenhang zu bestimmen, welcher zwischen dem $\theta$-System und dem Winkel $\theta_1$ besteht, damit, während die Momentsumme gleich $M$ ist, die ganze Deformationsarbeit ein Minimum sei.

Bezeichnen wir mit:

$x_1\theta_1$ — die Deformation eines Eisenelementes $(l d\omega_1)$, dessen Abstand von der neutralen Achse gleich $x_1$ ist.

$A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)$ den einheitlichen Widerstand eines Eisenelementes $l d\omega_1$, dessen Deformation gleich $\theta_1 x_1$ sei.

$\frac{1}{l} B'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right] =$ die Derivate zu $x_1\theta_1$ der Funktion $B\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)$.

$\theta =$ die Drehung eines Betonelementes $l d\omega$, dessen Abstand von der neutralen Achse gleich $x$ ist.

$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) =$ den einheitlichen Widerstand, $\frac{x\theta}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) =$ die Derivate zu $x\theta$ der Funktion $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$.

$\theta' =$ die Derivate zu $\theta_1$ einer besonderen Drehung $\theta$.

Es wird also sein:

$\int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1 =$ das ganze Widerstandsmoment des Eisens.

$\int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\omega =$ das ganze Widerstandsmoment des Betons.

$\int_0^{\Omega_1} d\omega_1 \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\theta_1 =$ die ganze Deformationsarbeit der Eisenarmierung.

$\int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta =$ die gesamte Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1 + \int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\omega = M, \\ \int_0^{\Omega_1} d\omega_1 \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\theta_1 + \int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta = \text{Minimum.} \end{cases}$$

Durch Ableitung nach $\theta_1$ erhält man folgende zwei derivierte Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{1}{l}\int_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2 d\omega_1 + \frac{1}{l}\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 \theta' d\omega = 0, \\ \int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1 + \int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x\theta' d\omega = 0, \end{cases}$$

aus denen sich folgendes Verhältnis zwischen der Drehung $\theta_1$ und dem Drehungssystem $\theta$ ergibt:

$$(4)\qquad \frac{\int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1}{\int_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1} = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2\theta'\, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2\theta'\, d\omega}.$$

## Erörterung der Formel (4).

1. Fall. Das Drehungssystem $\theta$ und die Drehung $\theta_1$ sind so beschaffen, daß, wenn das Moment $M$ Null wird, auch $\theta$ und $\theta_1$ Null werden, und ferner, wenn $M$ allmählich zunimmt, auch das Drehungssystem $\theta$ und die Drehung $\theta_1$ (nach einem bestimmten Gesetze) allmählich zunehmen.

In diesem ersten Falle nehmen wir $M$ so klein an, daß kein Eisen- oder Betonelement über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird.

Es ergibt sich dann, sowohl für die gezogenen, als auch für die gepreßten Eisenfibern:

$$A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1\frac{x_1\theta_1}{l},$$

$$A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1,$$

folglich:

$$\int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1 = E_1\frac{\theta_1}{l}\int_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1,$$

$$\int_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1 = E_1\int_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1,$$

daher:

$$\frac{\int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1}{\int_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1} = \frac{E_1\frac{\theta_1}{l}\int_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1}{E_1\int_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1} = \frac{\theta_1}{l}.$$

Ebenso kann man für die gezogenen Betonelemente (von 0 bis $\Omega_1$) schreiben:

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_t\frac{x\theta}{l},\quad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_t$$

und für die gepreßten (von $-\Omega_c$ bis $\theta$):

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_c\frac{x\theta}{l}, \quad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_c.$$

Jedes Integral des zweiten Gliedes der Formel (4) zerfällt in zwei Teile, von denen einer innerhalb der Grenzen 0 und $\Omega_t$ (Pressung), der andere innerhalb der Grenzen $-\Omega_c$ und 0 (Zug) bleibt.

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x\theta'\,d\omega = \int_{-\Omega_c}^{0} E_c\frac{x\theta}{l}x\theta'\,d\omega + \int_{0}^{\Omega_t} E_t\frac{x\theta}{l}x\theta'\,d\omega =$$

$$= E_c\frac{1}{l}\int x^2\theta\theta'\,d\omega + \frac{E_t}{l}\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega,$$

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2\theta'\,d\omega = \int_{-\Omega_c}^{0} E_c x^2\theta'\,d\omega + \int_{0}^{\Omega_t} E_t x^2\theta'\,d\omega =$$

$$= E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega,$$

und das zweite Glied der Formel (4) wird

$$\frac{1}{l}\,\frac{E_c\int_{-\Omega_t}^{0} x^2\theta\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega}{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega},$$

so daß die Formel (4) geschrieben werden kann:

$$(4') \qquad \theta_1 = \frac{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega}{E\int_{-\Omega_t}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_c\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega},$$

und da $\theta'$ die Derivate von $\theta$ zu $\theta_1$ ist, so darf man noch weiter vereinfachen:

$$\theta_1 = \frac{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta\,d\theta\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\,d\theta\,d\omega}{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x\,d\theta\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\,d\theta\,d\omega}.$$

Auch in diesem Falle dürfen unserer Meinung nach nur drei Hypothesen aufgestellt werden: 1. Es sei $\theta_1$ die größte Drehung der betrachteten Eisen- oder Betonelemente, so daß die Drehung $\theta$ um so kleiner werde, je weiter sich die Betonelemente $d\omega$ vom Eisenschnitt entfernen; 2. es sei $\theta_1$ die kleinste Drehung, so daß die Werte von $\theta$ um so größer werden, je weiter sich die Betonelemente $d\omega$ vom Eisenschnitt entfernen; 3. es seien die Drehungen $\theta_1$ und $\theta$ gleich.

Die Erörterung dieser drei Hypothesen ist nicht wesentlich verschieden von dem, was über die gezogenen Körper ausgeführt wurde. Sie ist aber schwerer zu begreifen, da die Integrale des Zählers in der Formel (4') geometrisch nur mit Körpern von vier Dimensionen sich darstellen lassen. Man kann sich auf dem Betonschnitt Linien, welche die Punkte gleicher Drehung ($\theta$ = konstant) verbinden, gezogen denken; bei den beiden ersten Hypothesen bilden dieselben so viele Systeme als Eisen der Armierung sind, jedes Eisen liegt in der Mitte des entsprechenden Systems; man kann sich diese Linien so nahe aneinander gelegen denken, daß die dazwischen befindlichen Streifchen $d\omega$ beliebig klein sind. Nehme man nun an, daß, während $M$ konstant bleibt, $\theta_1$ die unendlich kleine Veränderung $d\theta_1$ erfahre; alsdann werden sich auch alle $\theta$ der verschiedenen Streifchen verändern, die einen, den Eisenelementen anliegend, im gleichen Sinne wie $\theta_1$, die anderen im entgegengesetzten Sinne, so daß die Veränderung des Betonwiderstandsmoments gleich und entgegengesetzt zu der des Eisens ist. Diese Veränderung ist:

$$E_c \int_{-\Omega_c}^{0} x \cdot x d\theta \cdot d\omega + E_t \int_{0}^{\Omega_t} x \cdot x d\theta \cdot d\omega,$$

d. h. der Nenner der Formel (4'): dieser Nenner hat also ein $d\theta_1$ entgegengesetztes Zeichen, ebenso wie der Zähler, da ja ihr Quotient gleich $\theta_1$, also positiv ist.

Man denke sich auf jedem Streifen Ordinaten errichtet, eine, deren Länge $E_c d\theta$ für die gepreßten, $E_t d\theta$ für die gezogenen Flächen sei. Man erhält so einen Körper, dessen Elemente $E d\theta d\omega$ sind; das Trägheitsmoment dieses Körpers zur neutralen Achse wird vom Nenner der Formel (4') ausgedrückt. Wie schon vorher gezeigt, ist der betreffende Rauminhalt teils positiv (von demselben Zeichen als $d\theta_1$), teils negativ: ebenso verhält es sich mit seinem Trägheitsmoment, dessen negativer Teil als absoluter Wert der größere ist, da dessen Zeichen dem von $d\theta_1$ entgegengesetzt ist. Es ist also möglich von dem negativen Teil des Körpers ein Trägheitsmoment gleich dem des positiven abzutrennen, dann gleicht das Trägheitsmoment des übrigen Körpers dem Nenner

der Formel (4'). Bilden wir nun auf jedem Element $Ed\theta d\omega$ mittels der neuen Dimension $\theta$, das Element $E\theta d\theta d\omega$ eines Körpers mit vier Dimensionen, dessen Base, sozusagen, der vorhergehende Rauminhalt ist. Dieser neue Körper besteht auch aus zwei Teilen von entgegengesetzten Zeichen: das Trägheitsmoment desselben, analytisch durch den Zähler der Formel (4') ausgedrückt, hat auch zwei Teile, von welchen der negative (als absoluter Wert) größer als der positive ist: Auch hier kann man von dem negativen Körper einen Teil abtrennen, dessen Trägheitsmoment dem des positiven gleicht. Der Zähler der Formel (4') wird daher das Trägheitsmoment des übrigbleibenden Körpers $(T)$ sein: dieser hat als Base einen Teil der negativen Elemente $Ed\theta d\omega$, deren Gesamtheit wir mit $W$ bezeichnen. Bei der ersten Annahme sind die Werte von $\theta$, für die Streifen, in denen $d\theta$ positiv ist, größer als die der übrigen; folglich ist $W$ ein Teil von $V$. Bei der zweiten Annahme findet das Gegenteil statt, und $V$ ist ein Teil von $W$. Daher hat im ersten Falle der Bruch $\frac{\text{Trägheitsmoment } (T)}{\text{Trägheitsmoment } (V)}$ einen Wert, der jedenfalls kleiner als das größte der $\theta$ ist, die den Streifen der Base $W$ entsprechen, also natürlich auch kleiner als $\theta_1$ und nicht etwa gleich, wie es nach Formel (4') scheinen könnte: im zweiten Falle ist derselbe Bruch größer als das kleinste dieser verschiedenen $\theta$ und natürlich größer als $\theta_1$ und nicht etwa gleich, wie Formel (4') angibt. Da nun die erste und die zweite Annahme zu einer Unmöglichkeit führen, so bleibt nur die dritte übrig, infolge deren, da $\theta$ konstant ist, $W$ gleich $V$, und das Verhältnis der Trägheitsmomente $T$ und $V$ gleich $\theta$ ist; daher

$$\theta_1 = \theta,$$

wie es die Annahme verlangt.

Man kann also folgern, daß während der elastischen Deformationsperiode jedes Eisen- oder Betonelement sich in einem konstanten Winkel um die neutrale Achse dreht und die Fläche eines Querschnittes eben bleibt.

2. Fall. In diesem zweiten Falle setzen wir $\theta = \theta_1$ und das Moment groß genug an, damit an einem, wenn auch noch so kleinen Teile des Schnittes, die Längenveränderung die elastische Deformation übersteigt. Dann ist nicht mehr, wie beim ersten Falle $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ eine lineare Funktion als $E\frac{x\theta}{l}$, und die betreffenden Ausführungen haben für diesen Fall keine Geltung mehr.

Die Funktion $B$ ist (wie schon erwähnt) derartig, daß man jeden Wert derselben als das Produkt von $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ und einer gleichartigen

Größe (der virtuellen Deformation), betrachten kann, die aber der wirklichen Deformation $\frac{x\theta}{l}$ gleich, oder größer als diese ist.

Die Funktion $B$ gleicht der erwähnten Deformation eines Elementes für eine Drehung $\xi$ (virtuelle Drehung), die gleich $\theta$, oder größer als $\theta$ ist. Mithin ist

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\xi}{l},$$

wo $\xi > 0$ für die über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Elemente ist, und gleich $\theta$ bei denen, deren Beanspruchung sich innerhalb der Elastizitätsgrenze hält.

Das erste Glied der Formel (4) ist wieder, wie im vorhergehenden Falle, gleich $\frac{\theta_1}{l}$, sodaß man es auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\xi}{l}x\theta' d\omega}{\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2\theta' d\omega},$$

oder noch einfacher

$$(4'') \qquad \theta_1 = \frac{\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\xi d\theta\, d\omega\right)}{\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)d\theta\, d\omega\right)}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der (4') nur in folgenden Punkten: 1. Statt der Koeffizienten $E_c$, $E_t$ hat man die Funktion $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ mit $\theta$ veränderlich und gleich $E_c$ oder $E_t$ nur in den elastisch deformierten Elementen; 2. $\theta_1$ bei dem Integral des Zählers wird durch $\xi$, gleich oder größer als das entsprechende $\theta$, ersetzt.

Man darf auch hier die drei Hypothesen des ersten Falles aufstellen; 1. $\theta_1$ ist gleich dem $\theta$ Maximum, und je größer der Abstand des betrachteten Punktes von der Eisenarmierung wird, desto kleiner wird $\theta$. 2. $\theta_1$ ist gleich $\theta$ Minimum, das um so kleiner wird, je weiter sich das Element $d\omega$ von der Eisenarmierung entfernt. 3. $\theta$ ist konstant und gleich $\theta_1$. Denken wir uns nun auf der Schnittfläche Linien gezogen, welche die Punkte gleicher Drehung verbinden, sodaß der Beton-

schnitt in Streifen $d\omega$ geteilt wird und für jeden einzelnen derselben $\theta$ als konstant betrachtet werden kann.

Man nehme nun an, daß $M$ konstant bleibt, aber $\theta_1$ sich um den unendlich kleinen Wert $d\theta_1$ vergrößert; dann werden sich auch alle $\theta$ der verschiedenen Streifen verändern, einige, die den Eisenelementen anliegen, im gleichen Sinne wie $\theta_1$, die anderen im entgegengesetzten Sinne, sodaß die Veränderung des Betonwiderstandsmoments der des Eisens gleich und entgegengesetzt ist. Diese Veränderung wird ausgedrückt durch:

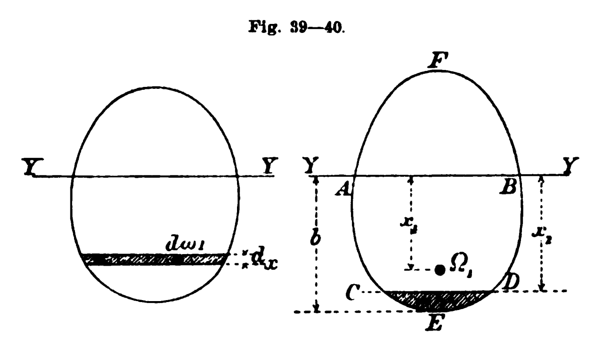
$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta \cdot d\omega$$

d. h. durch den Nenner der (4″): dieser Nenner hat also ein $d\theta_1$ entgegengesetztes Zeichen. Dasselbe gilt für den Zähler, da ihr Quotient gleich $\theta_1$, also positiv ist.

Es ist aber hier nicht möglich, einen dem vorigen ähnlichen Beweis zu führen, da die Drehungen $\xi$ für einige Elemente größer als die entsprechenden $\theta$ sind, und im voraus die Elemente zu bestimmen, bei denen das der Fall ist, auch unmöglich ist.

Die vorigen Ausführungen haben also für diesen Fall keine Geltung, aber es ist dennoch möglich, durch Folgerungen aus den für gezogene Körper geltenden Darlegungen und durch Prüfung einzelner besonderer Fälle zu einem bestimmten Ergebnis zu gelangen. Betrachten wir z. B. einen beliebigen der neutralen Achse $yy$ parallelen Streifen (Fig. 39), dessen Breite $dx$ beliebig klein sei, und der, außer Betonelementen, wenigstens ein Eisenelement $d\omega_1$ enthalte. Da sämtliche Elemente dieses Streifens denselben Abstand von der neutralen Achse haben, so wird man wohl diesen Streifen als einen einfach gezogenen Körper aus armiertem Beton betrachten dürfen, sodaß die für gezogene Körper gefundenen Ergebnisse hier zur Anwendung gelangen können, nämlich: Solange die elastische Deformation nicht überschritten ist, drehen sich alle Elemente um die neutrale Achse in gleichem Winkel, und die Deformation ist gleichförmig. Ist aber diese Grenze erreicht

Fig. 39—40.



oder überschritten, so wird das Eisen die größte lineare Deformation und somit auch die größte Drehung erfahren, welche der der anliegenden Betonelemente gleich sein wird, während die Drehung der übrigen Betonelemente um so kleiner wird, je weiter sich dieselben vom Eisenschnitt entfernen. Nehmen wir nun an, daß bei der Hypothese der gleichförmigen Deformation aller Schnittelemente die Elastizitätsgrenze nur von denjenigen Elementen überschritten werde, welche den größten Abstand von der neutralen Achse irgend eines Elementes der Armierung haben. Der Einfachheit wegen haben wir auf Fig. 40 die Armierung mittels eines einzigen Kreises $\Omega_1$ (mit der Abszisse $x$), die Fläche, wo die Elastizitätsgrenze überschritten wird, mit $CDE$ (deren kleinste Abszisse $x_2 > x_1$, und äußerste $b$ ist) dargestellt. Wir nehmen an, nach den vorigen Ausführungen, aber nicht auf Grund sicheren Beweises, daß in der Fläche $ACDBF$ die Drehung gleichförmig sei; berechnen wir sie mit $\theta_1$, und jede beliebige Drehung eines Elementes der Fläche $CDE$ mit $\theta$, endlich mit $\xi$ die entsprechende virtuelle Drehung, welche in der Fläche $CDE$ konstant sein kann oder veränderlich (zu- oder abnehmend bezüglich $\theta_1$, da längs der Geraden $CD$ $\theta_1 = \theta = \xi$).

Durch Anwendung der vorhergehenden Methode findet man folgende Beziehung zwischen $\theta_1$ und dem $\xi$-System:

$$\theta_1 = \frac{\int\limits_{x_2}^{b} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\xi\, d\theta\, d\omega\right)}{\int\limits_{x_2}^{b} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) d\theta\, d\omega\right)},$$

worin $d\theta$ die Veränderung von $\theta$ ist, wenn das ganze Moment $M$ konstant bleibt.

Es ist leicht, wie bei dem ersten Falle zu beweisen, daß $\xi$ konstant und gleich $\theta_1$ ist, sodaß die wirkliche Drehung $\theta$ um so kleiner wird, je größer die Abszisse des Elementes $d\omega$ von $x_2$ bis $b$ wird; denn da die virtuelle Deformation $\frac{x\xi}{l}$ immer zunimmt, wächst das Verhältnis zwischen derselben und der wirklichen Deformation $\frac{x\theta}{l}$, also der Quotient $\frac{\xi}{\theta}$. Diese Lösung (virtuelle Drehung konstant) genügt also der Gleichung der kleinsten Arbeit, und da man, um dieselbe zu erhalten (durch Annahme gleichförmiger Drehung der Fläche $AFBDC$) zwischen den verschiedenen Elementen Adhäsion vorausgesetzt hat, so halten wir sie für der Wirklichkeit entsprechend. In der Tat kann eine Auf-

gabe betreffend die kleinste Arbeit, in ihrer Allgemeinheit aufgefaßt, unmöglich zwei Lösungen haben.

Nach diesen beiden einfachen Fällen erscheint nun die Art der möglichen Auflösungen (im allgemeinen Falle, wo die Elastizitätsgrenze auch in den eiserne Elemente enthaltenden Flächen überschritten wird) in drei Fällen, die wir graphisch erklären werden, völlig bestimmt. Man errichte (Fig. 41) auf jedem Betonelement des Schnittes eine zur Schnittebene senkrechte Ordinate, die die wirkliche Drehung $\theta$ des Elementes mißt, falls die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, aber im andern Falle die virtuelle Drehung $\xi$ mißt. — Wenn man den so entstandenen Körper mittels einer zur obigen Schnittoberfläche senkrechten Ebene schneidet, die den Mittelpunkt einer der Elemente $F$ der Eisenarmierung enthält, so sind für den Schnitt folgende, denen der gezogenen Körper ähnliche Fälle möglich: 1. Der Schnitt ist eine Gerade mit konstanter Ordinate. 2. Er ist eine Linie nach $F$ steigend, deren zwei Teile eine Gerade $bb$ mit konstanter Ordinate als Asymptote haben. 3. Er ist eine Kurve mit einem Minimum oder einem Rückkehrpunkt, deren Zweige eine Gerade mit konstanter Ordinate als Asymptote haben.

Fig. 41.




Die Erörterung kann auf dieselbe Weise, wie schon für die gezogenen Körper geführt werden, mit dem Unterschied, daß die Verhältnisse zwischen Rauminhalt und Flächen durch die Verhältnisse ihrer Trägheitsmomente zu ersetzen sind.

Die Ergebnisse sind ganz ähnliche, nämlich: der dritte Fall führt zu der Unmöglichkeit, daß die Drehung des Eisens einen Wert ergibt, der größer als sie selbst ist. Der erste Fall tritt nur dann ein, wenn die Betonelemente bei $F$ die Elastizitätsgrenze nicht überschritten haben, sonst führt er ebenfalls zu dem Widersinn, daß die Drehung des Eisens bei $F$ einen größeren Wert, als sie selbst annimmt. Der zweite Fall ist der einzige, der zu keinem Widersinn führt, wenn die Lösung des ersten die Überschreitung der Elastizitätsgrenze durch die $F$ anliegenden Betonelemente ergibt. Dann ist die Eisendrehung kleiner als der mittlere Wert der wirklichen und virtuellen Drehungen der Beton-

elemente und vielleicht auch kleiner als das Minimum beider. Dies ist keineswegs unmöglich, denn da jede virtuelle größer als die entsprechende wirkliche Drehung ist, so kann die Eisendrehung zwischen der kleinsten Ordinate und der kleinsten wirklichen Drehung enthalten sein; es kann daher das Eisenelement die anliegenden Betonelemente mit sich fortreißen.

## Schlußfolgerungen.

Wir wollen nun die Ergebnisse vorstehender Untersuchungen zusammenfassen und mit den in der Einleitung erwähnten Theorien vergleichen.

Beginnen wir mit den einfach gezogenen Körpern, und nehmen wir an, daß der gesamte Zug von Null ab allmählich zunehme und in den beiden Materialien allmählich zunehmende einheitliche Widerstände hervorrufe.

In der ersten Deformationsperiode stimmen die beiden ersten Theorien und die Resultate unserer Untersuchung überein, nämlich: Die Querschnitte des gezogenen Körpers bleiben eben und die Verlängerungen der Eisen- und der Betonelemente sind gleich.

Der einheitliche Widerstand, den die Betonelemente entwickeln, ist gleichförmig und der einheitlichen Verlängerung proportional, ihr Verhältnis ist der gewöhnliche Zugelastizitätsmodul. Dasselbe gilt auch für die Eisenelemente; das Verhältnis zwischen den beiden Widerständen, von den Verlängerungen unabhängig, gleicht dem der Elastizitätsmoduln beider Materialien. Aber bei Zunahme des Gesamtwiderstandes, der Verlängerung der Betonelemente, mithin auch ihres einheitlichen Widerstandes, erreicht dieser letztere die Elastizitätsgrenze, über welche hinaus das Verhältnis zwischen Widerstand und Deformation nicht mehr konstant bleibt. Hier tritt eine neue Periode der Veränderungstätigkeit ein, wo sich die beiden Theorien unter einander und von dem, was bewiesen wurde, unterscheiden: was die Deformation anbetrifft, so lassen beide Theorien das, was bei der ersten Phase gesagt wurde, bestehen; für die einheitlichen Widerstände bleibt bei der ersten Hypothese ebenfalls das schon Gesagte in Kraft, sodaß beim Beton sogar Zugwiderstände von 2 kg oder mehr auf das Quadratcentimeter angenommen werden.

Das ist aber offenbar undenkbar, da in diesem Falle das bloße Vorhandensein des Eisens bei beliebigem Abstande das Wesen des Betons dermaßen verändern würde, daß sich die elastische Deformationsperiode über die gewöhnliche Bruchgrenze hinaus erstreckt. Man könnte allenfalls vermuten, daß durch eine etwaige chemische Wirkung oder einen physikalischen Vorgang dies beim Eisen in sehr beschränktem Maße

stattfinde; doch kann dies selbstverständlich nicht für jeden beliebigen Abstand Geltung haben. Die Unmöglichkeit dieser Annahme wird jetzt, unserer Meinung nach, von den meisten Verfassern zugegeben, welche die zweite Theorie oder Hennebiques Methode anwenden. Canevazzi gibt das in seinem wertvollen Werke klar zu verstehen, und Résal wagt es überhaupt nicht, irgend eine Berechnungsmethode bei dieser zweiten Periode der Veränderungstätigkeit zu empfehlen. Die zweite Theorie entspricht besser der Logik. Denn wenn sie auch die Verlängerungen beider Materialien als gleich ansieht, nimmt sie für den Beton keine größeren einheitlichen Widerstände an, als die, welche bei nicht armiertem Beton entstanden wären. Daher nimmt der Elastizitätsmodul des Betons ab, sobald die Verlängerung zunimmt; wenn diese letztere ebenso groß oder größer als die gewöhnliche Bruchdeformation ist, wächst der einheitliche Widerstand nicht weiter und bleibt stets der gewöhnlichen den Bruch bewirkenden Ziehung gleich.

Wir meinen, daß diese Theorie fehlgeht, wenn sie für beide Materialien dieselbe Verlängerung bei jedem beliebigen Abstande vom Eisen annimmt, so daß in jedem Punkte des Schnittes auch die gewöhnliche Bruchverlängerung überschritten werden kann, während uns diese Annahme in beschränktem Maße in der Nähe des Eisens zulässig dünkt.

Das eben glauben wir bewiesen zu haben, nämlich: die Verlängerungen der Eisen- und der anliegenden Betonelemente sind gleich, und, je weiter sich die Beton- von den Eisenelementen entfernen, desto kleiner wird die Verlängerung der ersteren. Diese Abnahme in der Verlängerung der Betonelemente hat eine Grenze, die wir nicht bestimmen konnten, doch glauben wir ein absolutes Minimum derselben gefunden zu haben bei der Untersuchung betreffs der gezogenen Körper, wo die Adhäsion zwischen Eisen und Beton nicht berücksichtigt wurde.

Und so bestimmt nach unserer Meinung die zweite Theorie ein absolutes Maximum für die Deformation des Betons, während unsere Untersuchungen deren Minimum festsetzen. Mithin werden die auf der zweiten Theorie fußenden Berechnungen für das Beton zu große, für das Eisen zu kleine Widerstände ergeben, während das Gegenteil bei Anwendung unser Untersuchungen stattfindet. Zwischen diesen beiden Resultaten muß die Wahrheit liegen, und das Gebiet, auf welches sie nunmehr beschränkt ist, ist viel kleiner als vorher.

Ein Gebiet, worin der Widerstand beider Materialien enthalten ist, bestimmen zu können, ist alles, was man für die Baufestigkeit von der Theorie verlangen kann. Die Annäherung ist für die Praxis genügend, wenn man bedenkt, daß auch bei Annahme des kleinsten Betonwiderstandes gleich Null (Hennebiquesche Methode) die Differenzen mit

den Resultaten der zweiten Theorie 10% in den gewöhnlichen Fällen nicht überschreiten. Jedenfalls ist es das Höchste, was bis jetzt zu erreichen ist. Unsere Berechnungsmethode ist ganz besonders nützlich, sobald das Verhältnis zwischen den Flächen des Eisen- und des Betonschnittes sehr klein ist.

Da wir beabsichtigen unsere Untersuchungen auf die inneren Verschiebungen beider Materialien auszudehnen, so haben wir hier keine numerischen Beispiele gegeben. Wir haben die Hoffnung nicht aufgegeben, noch genauere Ergebnisse erreichen zu können.

* * *

Die Vergleichung zwischen den beiden Theorien und den Resultaten unserer Untersuchungen betreffs der gebogenen Körper führt zu ähnlichen Folgerungen. Man muß jedoch in diesem Falle von dem Beginne der Beanspruchung bis zur Bruchbelastung drei Perioden unterscheiden.

In der ersten Periode stimmen (wie bei den gezogenen Körpern) die beiden Theorien und was wir bewiesen haben, vollkommen überein, nämlich:

Jeder Querschnitt des gebogenen Körpers bleibt nach der Deformation eben, und die Eisenelemente bleiben auf der Schnittebene; die Elemente beider Materialien drehen sich in gleichem Winkel um die neutrale Achse. Der einheitliche Widerstand jedes Betonelementes ist der entsprechenden einheitlichen Verlängerung proportional, ihr konstantes Verhältnis ist der gewöhnliche Modul der Zug- oder Pressungselastizität; dasselbe gilt auch für die Eisenelemente, so daß das Verhältnis der einheitlichen Widerstände zweier Elemente der beiden Materialien bei gleichem Abstand von der neutralen Achse dem Quotienten der bezüglichen Elastizitätsmoduln gleicht.

Sobald aber die Beanspruchung der der neutralen Achse am fernsten gelegenen Elemente die Elastizitätsgrenze erreicht, endigt die erste Bewegungsphase und beginnt die zweite. Hier stellt die erste Theorie die schon erwähnten Postulate auf, von welchen besonders das zweite sich so weit von der Wahrheit entfernt, wie bei den gezogenen Körpern auseinandergesetzt wurde, daß eine Vergleichung hier nutzlos wäre. Wir wollen diese auf die zweite Hypothese und auf die Hennebiquesche Methode beschränken.

Die zweite Theorie hält das erste Postulat aufrecht, verändert aber das zweite folgendermaßen:

Der einheitliche Widerstand jedes Betonelementes ist gleich dem, welcher bei derselben Deformation von dem Element entwickelt worden wäre, wäre der Körper nicht armiert. Also für die Elemente, welche,

infolge ihres Abstandes von der neutralen Achse Längenveränderungen erfahren, die größer als die Elastizitätsgrenze sind, wächst der einheitliche Widerstand nicht der Deformation proportional, sondern mit abnehmendem Modul, bis die gewöhnliche Bruchgrenze erreicht ist, jenseits deren der Widerstand konstant und von der Längenveränderung unabhängig bleibt.

Die Hennebiquesche Methode läßt, wie schon gesagt, jeden Zugwiderstand des Betons unberücksichtigt und nimmt an, daß sich die gesamte derartige Beanspruchung nur im Eisen vereinigt.

Aus unserer Untersuchung geht dagegen Folgendes hervor:

Sobald das der neutralen Achse entfernteste Betonelement die Elastizitätsgrenze erreicht hat, dreht es sich nicht mehr in gleichem Winkel wie die andern Elemente um die neutrale Achse, sondern verlangsamt seine Drehung, so daß es eine virtuelle Drehung annimmt, die deren wirklicher Drehung gleichkommt. Bei Zunahme der Beanspruchung geschieht dasselbe nach und nach auch mit den der neutralen Achse näheren Elementen, während in der übrigen Schnittfläche die Drehung gleichförmig ist und die Elemente in einer einzigen Ebene bleiben. Und da ein beständiger Übergang von den wirklichen zu den virtuellen Deformationen stattfindet, so verändert sich auch beständig die Fläche des deformierten Schnittes. Da ferner in einem nicht über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Körper die virtuelle der wirklichen Deformation gleich ist, so haben die Elemente des Schnittes (die Eisenflächen eingeschlossen) gleiche Drehung um die gemeinsame neutrale Achse.

Die zweite Phase der Veränderungstätigkeit dauert so lange, als (bei Zunahme der Beanspruchung) die Elastizitätsgrenze auch in den Betonelementen, deren Abstand von der neutralen Achse dem der am fernsten gelegenen Eisenelemente gleicht, erreicht ist: hier fängt die dritte Bewegungs- oder Arbeitsperiode an. Was den Wert der einheitlichen Elementwiderstände als Funktion ihrer Deformationen anbetrifft, so behält natürlich das gewöhnliche Widerstandsgesetz des Betons seine Geltung. Es erhellt also, bei Vergleichung unserer Ausführungen mit der zweiten Theorie, daß diese letztere für den Beton größere Deformationen annimmt als die, welche in der zweiten Periode der Veränderungstätigkeit tatsächlich stattfinden. Daher ergibt bei gleicher Beanspruchung die Berechnung der Armierung zu kleine Resultate, während dagegen die Hennebiquesche Methode zu große ergibt, da die Zugarbeit des Betons unberücksichtigt bleibt. Wir meinen also, daß sowohl die Methoden der zweiten Theorie als auch die von Hennebique durch eine Berechnung nach unserem Prinzip der virtuellen konstanten Drehung zu ersetzen sind.

In der dritten Phase der Veränderungstätigkeit hält die zweite Theorie die nämlichen Postulate aufrecht, die für die zweite aufgestellt wurden. Alle darauf beruhenden Berechnungen ergeben daher stets für die Betonelemente die größte Deformation (als absoluten Wert), und umgekehrt wird die Veränderungstätigkeit beim Eisen ein Minimum sein.

Das Resultat der vierten Untersuchung, wo bei gezogenen Körpern die Adhäsion zwischen Eisen und Beton in Betracht gezogen wird, zeigt uns: Während der Betonschnitt zur Armierung vollständige Adhäsion hat, so daß die Eisen- und die anliegenden Betonelemente gleiche Deformation erfahren, hat der Schnitt an den entfernten Punkten eine Form, welche einer konstanten virtuellen Drehung entspricht. Wenn ferner die Adhäsion zwischen Eisen und Beton unberücksichtigt bleibt, und man annimmt, daß in der dritten Phase der Veränderungstätigkeit das Deformationsgesetz der zweiten fortbesteht, so findet man, daß die wirkliche Eisendrehung der virtuellen des Betons gleichkommen müßte. Offenbar erhält man hier, indem die Adhäsion unberücksichtigt bleibt, die absolut kleinste Veränderungstätigkeit beim Beton, während die des Eisens größer als die wirkliche ist.

In dieser dritten Periode der Veränderungstätigkeit kann also die wirkliche Deformation jedes Beton- oder Eisenelements nicht bestimmt werden. Doch ist es möglich, dieselbe auf einen Bereich zu beschränken, dessen Grenzen einerseits von den Berechnungen nach der zweiten Theorie gegeben werden, andererseits von der Methode, die auf folgendem Prinzip beruht: „die virtuelle Drehung der verschiedenen Betonelemente ist konstant und gleich der wirklichen der Eisenelemente", und so sind die Grenzen unseres Gebietes viel enger geworden, doch meinen wir, es sei möglich dieselben noch enger zu ziehen durch neue Untersuchungen über die Verschiebungen der beiden Materialien unter Beibehaltung unserer Methode.

* * *

Wir haben keine endgültige Formeln und numerische Beispiele gegeben, da dies nicht der Zweck unserer Arbeit war; es gibt hier noch zu viel zu untersuchen, besonders über die Wirkungen der Verschiebungskräfte, als daß irgend eine Formel als endgültig zu betrachten wäre. Dagegen halten wir es für angebracht, darauf hinzuweisen, wie man größere Genauigkeit in der Praxis erreichen kann. Es wäre für uns eine große Genugtuung, wenn unsere bescheidene Arbeit bei Fachmännern die Überzeugung erwecken könnte, daß auch auf diesem Gebiet des armierten Betons Wahrheit erreicht werden kann. Wir meinen

auch, daß Hypothesen nicht aufgestellt werden dürfen, wenn sie nicht vorher durch Berechnungen, die auf bewährten Prinzipien beruhen — wie dem der kleinsten Veränderungstätigkeit — geprüft wurden. Obwohl nach der Berechnung die deformierten Querschnitte nicht eben sind, so steht das mit den Erfahrungsresultaten und dem, was man sieht, nicht im Widerspruch. Denn diese Erscheinung zeigt sich erstens augenscheinlich auch in den homogenen Systemen, wo die Elastizitätsgrenze überschritten wird (in diesem Falle sind die über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Teile als Materialien verschiedener Art zu betrachten); zweitens wären bei den Versuchen von Considère diese Erscheinungen nicht wahrnehmbar gewesen.

---

# Neuer Beweis einer Grunertschen Formel aus der Kartenentwurfslehre.

Von E. HAENTZSCHEL in Berlin.

Im 38. Jahrgang dieser Zeitschrift (1893) hat Hr. E. Roedel auf S. 56—60 unter dem Titel: Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids den folgenden Ausdruck für den Flächeninhalt einer von der Breite $\varphi_1$ bis zur Breite $\varphi$ sich erstreckenden Zone gefunden:

$$\begin{aligned} Z = \frac{4\pi a^2}{1-n^2}\Big[&(1-n)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &-\tfrac{n}{3}(2-3n+n^3)\sin\tfrac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{3}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &+\tfrac{n^2}{5}(3-4n-n^2+2n^3)\sin\tfrac{5}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &-\tfrac{n^3}{7}(4-5n-2n^2+3n^3)\sin\tfrac{7}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &+\tfrac{n^4}{9}(5-6n-3n^2+4n^3)\sin\tfrac{9}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{9}{2}(\varphi+\varphi_1)\mp\cdots\Big]. \end{aligned}$$

Hätte Hr. Roedel bemerkt, daß in der eckigen Klammer die Größe $(1-n)^2$ ein allen Gliedern gemeinsamer Faktor ist, hätte er alsdann beachtet, daß

$$\frac{a(1-n)^2}{1-n^2} = \frac{a(1-n)}{1+n} = b \tag{1}$$

ist, so hätte er es gewiß nicht unterlassen, seiner Formel die Gestalt zu geben:

$$
\begin{aligned}
Z = 2\pi ab\{&(\sin\varphi - \sin\varphi_1) - \tfrac{1}{3}n(n+2)\cdot(\sin 3\varphi - \sin 3\varphi_1) \\
(\mathrm{I}) \quad &+ \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\cdot(\sin 5\varphi - \sin 5\varphi_1) - \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\cdot(\sin 7\varphi - \sin 7\varphi_1) \\
&+ \tfrac{1}{9}n^4(4n+5)\cdot(\sin 9\varphi - \sin 9\varphi_1) \mp \cdots\}.
\end{aligned}
$$

Damit hört aber unsere Formel auf neu zu sein. Grunert hat sie bereits in seinem Buche „Sphäroidische Trigonometrie" (G. Reimer, Berlin 1833, 4°) gegeben. Ein sehr beschwerlicher Beweis führt ihn auf sieben Seiten Groß-Quart (S. 39—46) nach mühsamen Rechnungen zu dem erstrebten Ziele.

Nach Feststellung dieser Tatsache bleibt für uns nur die Frage zu erledigen übrig, ob der von Herrn Roedel gegebene Beweis nicht durchsichtiger und ein wenig kürzer gestaltet werden kann. In der Tat gelingt dies, wenn man sich des Symbols $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Gaußschen hypergeometrischen Reihe bedient, und eine der bekanntesten Eigenschaften desselben, die schon von Euler gefunden wurde, anwendet.

Schreibt man nämlich, wie Herr Roedel, das Flächenelement der Zone in der Form:

$$(2) \quad dZ = 2a^2\pi(1-n^2)^2\cdot\cos\varphi\cdot(1+ne^{2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2}d\varphi,$$

verwandelt man die hierin enthaltenen Binome in die bekannten Potenzreihen, und führt man die Multiplikation beider aus, so findet man, unter Berücksichtigung von

$$\cos r\varphi = \frac{e^{+ir\varphi} + e^{-ir\varphi}}{2},$$

$$
\begin{aligned}
(1+ne^{+2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2} &= A - 2B\cos 2\varphi + 2C\cos 4\varphi \\
&- 2D\cos 6\varphi + 2E\cos 8\varphi \mp \cdots,
\end{aligned}
$$

wo die $A, B, C, D\ldots$ die von Herrn Roedel im Gleichungssystem (3) explizite angegebene Gestalt haben, sich aber mit dem Gaußschen Symbol schreiben lassen:

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
A &= F(2,\ 2,\ 1,\ n^2), \\
B &= 2n\cdot F(2,\ 3,\ 2,\ n^2), \\
C &= 3n^2\cdot F(2,\ 4,\ 3,\ n^2), \\
D &= 4n^3\cdot F(2,\ 5,\ 4,\ n^2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Nun ist aber schon von Euler die Relation bemerkt worden — Gauß gibt sie als Formel [82] im Artikel 40 seiner „Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe" —

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x),$$

wonach

$$\begin{aligned}
A &= \phantom{2n}(1-n^2)^{-3} F(-1,\ -1,\ 1,\ n^2) = \phantom{2n}(1-n^2)^{-3}(1+n^2),\\
B &= 2n\,(1-n^2)^{-3} F(\phantom{-}0,\ -1,\ 2,\ n^2) = 2n\,(1-n^2)^{-3}\cdot 1,\\
C &= 3n^2(1-n^2)^{-3} F(\phantom{-}1,\ -1,\ 3,\ n^2) = 3n^2(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{1}{3}n^2),\\
D &= 4n^3(1-n^2)^{-3} F(\phantom{-}2,\ -1,\ 4,\ n^2) = 4n^3(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{1}{2}n^2),\\
(4)\ E &= 5n^4(1-n^2)^{-3} F(\phantom{-}3,\ -1,\ 5,\ n^2) = 5n^4(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{3}{5}n^2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
L &= (k+1)n^k(1-n^2)^{-3} F(k-1,\ -1,\ k+1,\ n^2)\\
&= (k+1)n^k(1-n^2)^{-3}\left(1-\frac{k-1}{k+1}n^2\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ist, so daß also jeder der genannten Koeffizienten ein geschlossener Ausdruck ist.

Daher ist denn

$$\begin{aligned}
dZ &= 2ab\pi\left(\frac{a}{b}\right)(1-n^2)^{-1} d\varphi\,\{(1+n^2)\cos\varphi - 4n\cos 2\varphi\cos\varphi\\
&\quad + 6n^2(1-\tfrac{1}{3}n^2)\cos 4\varphi\cos\varphi - 8n^3(1-\tfrac{1}{2}n^2)\cos 6\varphi\cos\varphi\\
&\quad + 10n^4(1-\tfrac{3}{5}n^2)\cos 8\varphi\cos\varphi \mp \cdots\},\\
&\frac{2\pi ab}{1-n)^2}\cdot d\varphi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(-n)^k\left(1-\frac{k-1}{k+1}n^2\right)(\cos(2k+1)\varphi+\cos(2k-1)\varphi)\right\},
\end{aligned}$$

wo der Koeffizient des sich für $k = 0$ ergebenden Gliedes nur halb zu nehmen ist. Faßt man hier die beiden Glieder zu einem einzigen zusammen, die mit $\cos(2k+1)\varphi$ behaftet sind, und beachtet, daß der entstehende Koeffizient durch $(1-n)^2$ teilbar ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
dZ &= 2\pi ab\cdot d\varphi\{\cos\varphi - n(n+2)\cos 3\varphi + n^2(2n+3)\cos 5\varphi\\
&\quad - n^3(3n+4)\cos 7\varphi \pm \cdots\},
\end{aligned}$$

woraus durch Integration in den Grenzen $\varphi$ und $\varphi_1$ die Formel (I) hervorgeht.

Die Grunertsche Formel darf wohl als die beste für die numerische Rechnung bezeichnet werden. Sie ist bisher, wie es scheint, der Aufmerksamkeit der Geodäten entgangen; zieht doch Jordan in seinem Handbuch der Vermessungskunde (Bd. III, S. 223; 1896) seine eigenen, auf sehr umständliche Weise gefundenen und mit

viel Zeitverlust zu berechnenden Reihen für die Koeffizienten sogar den Roedelschen Ausdrücken vor. Unsere Formel findet praktische Anwendung bei der Berechnung der Größe des Teiles der Oberfläche des Erdsphäroids, der in einer Sektion der Generalstabskarte des Deutschen Reiches (Maßstab 1 : 100000) und ferner desjenigen, der in einem Meßtischblatt der Kgl. Preußischen Landesaufnahme (Maßstab 1 : 25000) dargestellt wird. Eine ganz elementare Herleitung der Grunertschen Formel nebst einigen erläuternden Rechnungsbeispielen habe ich in meiner Monographie: Das Erdsphäroid und seine Abbildung, Leipzig, B. G. Teubner, 1903, S. 53—57, gegeben.

---

# Kleinere Mitteilungen.

## Nachtrag zu der Mitteilung:

„Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten, für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist."

(Diese Zeitschrift, Bd. 50, S. 156.)

Durch eine Angabe in dem von Herrn Voß bearbeiteten Abschnitt über die Prinzipien der rationellen Mechanik in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV 1, S. 86, habe ich Kenntnis davon erhalten, daß der in der oben genannten Mitteilung Herrn Finsterwalder zugeschriebene Satz (und seine Umkehrung) sich bereits in dem Lehrbuch der Statik von Möbius (1837) auf S. 350 findet.

Stuttgart. R. Mehmke.

---

# Bücherschau.

**C. H. Müller**, Oberl. am kgl. Kaiser Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M. und **O. Presler**, Oberl. an der städt. Oberrealschule zu Hannover. **Leitfaden der Projektionslehre.** Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A: Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren im Text. [VIII und 320 S.] gr. 8. In Leinwand geb. M. 4. Ausgabe B: Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren im Text. [VI und 138 S.]. gr. 8. In Leinwand geb. M. 2. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1903.

Mit Vergnügen unterzieht sich der Referent der Aufgabe, über dies ausgezeichnete, inhaltsreiche, sowohl von großer Belesenheit der Verfasser als auch von ihrer praktischen Erfahrung und Sachkenntnis zeugende Schulbuch Bericht zu erstatten. Erscheint es doch auch im richtigen Augenblick. Auf dem Kongreß deutscher Mathematiker in Gießen (1901) wurde durch die mit großer Mehrheit erfolgte Annahme einer ganzen Reihe von Thesen dem Wunsche Ausdruck gegeben, daß die Elemente der darstellenden Geometrie an allen Mittelschulen wenigstens soweit Gegenstand des Unterrichtes werden sollen, daß die in der Stereometrie nötigen Figuren korrekt hergestellt werden können. Gleichzeitig soll das Buch den Lehrern und Schülern die Durchführung der neuen Lehrpläne erleichtern, die in Preußen im Jahre 1901 erschienen und gleichfalls das konstruierende Element im stereometrischen Unterricht betonen.

Die Ausgabe A enthält im ersten Teile eine ausführliche, von der Darstellung des Würfels ausgehende Entwickelung der schrägen Parallelprojektion. Die Schrägbilder ebener Vielecke, des Kreises und Zylinders werden besprochen. Daran schließen sich die Schnitte von Körpern, von Zylinder, Kegel und Kugel, Schattenkonstruktionen, sowie einfache Körperdurchdringungen und sehr zahlreiche Anwendungen aus der Kristallographie. Weiter folgen Aufgaben aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde (Darstellung der Revolution der Erde um die Sonne, Sonnenuhr), aus der Botanik (Blattstellungsspiralen), aus der Zoologie (Bienenzelle), aus der Physik (scharfes Schraubengewinde, Lochkamera, magnetisches Kraftfeld) und aus der Chemie (Kohlenstoffatom). Einige theoretische Betrachtungen über die Parallelprojektion beschließen diesen ersten Teil. Der zweite Teil enthält die Normalprojektion. Es werden die Risse des Punktes, der Strecke, ebener Vielecke, des Kreises und von Polyedern in einfacher Lage ermittelt, wobei nun mittels der im ersten Teile erlernten schiefen Projektion Figuren angelegt werden, welche die Vorstellung der im Grund- und Aufriß zu

zeichnenden Gebilde erleichtern. Bei den Normalbildern krummflächiger Körper wird auch die Normalprojektion einer Kugel und im Anschluß daran die orthographische Äquatorial- und Polarkarte konstruiert, ferner führen die Verfasser eine näherungsweise Konstruktion der Kugelloxodromen im Riß durch und gelangen zu einer angenäherten Konstruktion einer Merkatorkarte. Erst jetzt folgt ein mehr theoretischer Abschnitt über unbegrenzte Gerade und Ebenen, sodann kommen ebene Körperschnitte, Durchdringungen und Schattenkonstruktionen zur Behandlung. Den Schluß bildet ein Abschnitt über Zentralprojektion im Zusammenhange mit der Normalprojektion. Im Anschluß daran werden die zentralen und damit verwandten Kartenprojektionen erörtert.

Die Ausgabe B zeigt die gleiche Einteilung des Stoffes, doch sind die Anwendungen beschränkt. Es fehlen die theoretischen Betrachtungen über die Parallelprojektion, sowie die Körperdurchdringungen und zentralen Kartenentwürfe; die Schattenkonstruktionen werden bloß im Schrägbild ausgeführt.

In beiden Ausgaben bilden den Schluß ein erster Anhang mit Erklärungen und Lehrsätzen aus der systematischen Stereometrie, sowie ein zweiter Anhang „Anmerkungen", in dem sich, namentlich bei der Ausgabe A, zahlreiche Literaturnachweise, historische Notizen und analytische Ergänzungen finden.

Was die Darstellung betrifft, so ist dieselbe klar, einfach und ausführlich. Die gewöhnlichen, hergebrachten Fehler werden nicht nur vermieden, sondern ausdrücklich besprochen. Die zahlreichen Figuren zeigen eine vorzügliche, plastische Durchführnng. Alle Schrägbilder sind exakt unter Angabe der betreffenden Konstanten konstruiert. Als verbesserungsbedürftig fielen dem Referenten auf Figur 67 auf S. 60 und Figur 187 auf S. 224[1]), bei denen die Konturpunkte mangelhaft konstruiert erscheinen. Da beide Bücher für die Schule bestimmt sind, so ist die systematische Darstellung zugunsten einer anschaulichen unterdrückt, und es wird das Prinzipielle, mathematisch Wichtige nicht hervorgehoben. Vielleicht gehen die Verfasser dabei aber doch weiter als nötig. Aufgaben wie die Schnittlinie zweier Ebenen oder den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu zeichnen, bieten in rein mathematischer Hinsicht soviel Instruktives, daß sie in jedem Leitfaden der Projektionslehre zuerst eine lediglich mathematische Behandlung finden und nicht als Aufgabe aus der Markscheider-Praxis (S. 191) eingeführt werden sollten. Denn diese technische Einkleidung wirkt störend auf den mathematischen Gedanken. Auch die Ausdrucksweise könnte an manchen Stellen, auch auf dieser Stufe des Unterrichtes, mathematisch strenger gehalten sein. So wird z. B. beim parabolischen Schnitt eines Kegels S. 49 und 209 die schneidende Ebene dadurch definiert, daß sie zu *einer* Mantellinie des Kegels parallel sein soll. Um aber eine solche Ebene wirklich zu finden, muß man sie doch parallel einer Tangentialebene des Kegels wählen, also wäre dies wohl gleich in die ursprüngliche Fassung mit aufzunehmen. Der Begriff des Tangentialebene muß ja ohnehin erörtert werden.

Auf S. 254 heißt es ferner: „Das Zentralbild eines Kreises ist im *allgemeinen* eine Ellipse ..., die *Ausnahmen* (Parabel, Hyperbel) sind ohne

1) Die Angaben beziehen sich auf Ausgabe A.

Schwierigkeiten zu erkennen.“ Mathematisch sind aber alle 3 Schnitte gleichberechtigt. Vielleicht wäre es auch möglich, eine geometrische Rektifikation des Kreises in das Buch anfzunehmen, außer der durch $\pi = \frac{22}{7}$ gegebenen. Gewiß ist der Hinweis am Platze, daß die Irrationalität von $\pi$ keine geometrisch genaue Konstruktion zuläßt (S. 157), aber in einem Leitfaden der Projektionslehre, in dem überdies so zahlreiche Näherungskonstruktionen durchgeführt werden, verdient dann auch die Bemerkung einen Platz, wie auf geometrischem Wege die Rektifikation des Kreises *praktisch* ebenso genau durchgeführt werden kann wie jede andere Konstruktion der Geometrie, z. B. wie die Halbierung einer Strecke.

Weniger gelungen als die übrigen Teile des Buches erscheint dem Berichterstatter der letzte Paragraph über die Zentralprojektion. Die Verfasser verlassen hier merkwürdigerweise ihre bewährte Methode, immer zuerst einfache *Körperformen* zur Darstellung zu bringen. Statt der ermüdenden Aufgaben über die Konstruktion des Bildes eines Punktes S. 245—250 sollten einfache Raumobjekte und Maßstäbe konstruiert werden. Dadurch wird das Auge für die der Perspektive eigentümliche Bild- und Tiefenwirkung besser ausgebildet. Der Fluchtpunktsatz ließe sich wohl in *allgemeiner* Fassung behandeln.

Einen Hauptvorzug des Buches bilden die sehr reichhaltigen Anwendungen nicht bloß in der Stereometrie, sondern auch auf andere Gebiete. Hierher gehören auch die zahlreichen, in dem Buche behandelten Kartenentwürfe. Wenn bei diesen auch für die Zwecke der Projektionslehre nicht allzuviel gewonnen wird, da rein geometrisch ableitbare Kartenentwürfe nur in seltenen Fällen benutzt werden, so dürfte die Erörterung dieser Dinge doch für den *geographischen* Unterricht von großem Werte sein. Der Berichterstatter aber würde sich freuen, wenn er einen kleinen Beitrag zur etwaigen weiteren Durcharbeitung dieses guten Buches geliefert hätte, das den Sinn und das Verständnis für korrekte Darstellung auch in weiteren Kreisen zu verbreiten geeignet ist.

München, Febr. 1904. KARL DOEHLEMANN.

---

**Astronomischer Kalender für 1904.** Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. 8°, 141 S. Wien, K. Gerold Sohn. Preis kart. Mk. 2.40.

Dieser astronomische Kalender, der nun schon in seinen 66. Jahrgang tritt, eignet sich besonders zum Gebrauche für die zahlreichen astronomischen Amateure, denen es um eine knappe und einfache Orientierung am Sternhimmel zu tun ist. Überdies bietet der engere Ephemeridenabschnitt für jeden Tag soviel Angaben über den Sonnenlauf, daß eine Zeitbestimmung, wie sie der Liebhaber der Himmelskunde mit Hilfe eines kleinen Instrumentchens, z. B. eines Ebleschen Sextanten, eines Dipleidoskops, Passagenprismas oder Chronodeiks anzustellen pflegt, hinlänglich scharf berechnet werden kann.

Unter den „Beilagen“, von denen die meisten (Verzeichnisse von Sternen, interessanten schon kleinen Refraktoren zugänglichen Objekten, Übersicht über das Sonnensystem, geographische Koordinaten) in jedem Jahrgange

[illegible]

[illegible] Handbuch [illegible] Besonders gilt dies vom II. Bande [illegible] und in der

Verwertung der reichen Erfahrungen des Verfassers den andern beiden Bänden des Handbuchs wohl voran steht. Jetzt da bereits nach 6 Jahren Zwischenzeit eine neue Auflage desselben nötig geworden ist, konnte Jordan selbst nicht mehr bessernd und fördernd Hand anlegen, jedoch hat es der Bearbeiter des Bandes, Prof. Reinhertz, verstanden, im Sinne des Verstorbenen die Arbeit fortzuführen. Reinhertz hat mit Benutzung der neueren Literatur eine große Anzahl von Zusätzen hinzugefügt, verschiedentlich Umstellungen und auch einige Weglassungen vorgenommen, in manchen Fällen eine andere Einteilung getroffen, auch einige Male durch Änderung der Überschriften den Inhalt deutlicher hervorgehoben. Außerdem ist eine Reihe von alten Instrumentabbildungen durch neuere und bessere ersetzt worden. Um den ohnehin erheblichen Umfang des Buches nicht allzusehr zu vergrößern, wurde noch häufiger als bisher kleiner Druck benutzt.

Für einige Zusätze ließen sich spätere Arbeiten Jordans selbst verwenden, so z. B. die geometrische Betrachtung zur Erläuterung des Prytzschen Stangenplanimeters beim Kapitel Mechanische Hilfsmittel für Berechnungen, und die Behandlung des Falles, bei dem die Bildfläche nicht vertikal zum Hauptstrahl ist, im Kapitel Photogrammetrie.

Von den vielen Zusätzen des Herausgebers seien hier folgende hervorgehoben. In der Einleitung sind Erklärungen des Geoids sowie der Grundbegriffe der Horizontal- und Vertikalwinkelmessung hinzugekommen. Das I. Kapitel, das einen kurzen Abriß der einfachsten Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gibt, um den Band für den Anfänger zu einem selbständigen Ganzen zu machen, ist durch die Ausgleichung beobachteter Größen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, vermehrt worden. Späterhin bei den Nivellementsausgleichungen sind auch mehrere Bedingungsgleichungen in Betracht gezogen, ebenso wie bei der Behandlung eines Höhennetzes die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen für mehrere Unbekannte erfolgt. Das II. Kapitel, die Arbeiten, Aufnahmen und Instrumente des Feldmessers besprechend, bringt außer der Prüfung von Meßbändern einen größern und interessanten Zusatz über die Fehler der Längenmessung mit einer besonderen Untersuchung über die Messung der Bonner Basis mit Meßstäben und Meßband. Eine Reihe kleiner Ergänzungen und Umstellungen haben das III. Kapitel, Berechnung und Teilung der Flächen, das V. Kapitel, welches die Grundlagen der geodätischen Instrumentenkunde, Libelle, Linse, Lupe, Fernrohr, behandelt, und das die Konstruktion des Theodoliten und seine Fehlertheorie enthaltende VI. Kapitel erfahren. Dem letztern sind auch mehrere neue Theodolitabbildungen und -Beschreibungen und einige kleinere Beispiele über das Anstellen von Winkelmessungen zugefügt worden. Im IV. Kapitel, das die bei den Berechnungen benutzten Hilfsmittel, Planimeter, Rechenschieber und Rechenmaschine beschreibt, ist jetzt zu dem Scheiben-Rollplanimeter von Coradi auch dessen Kugel-Rollplanimeter hinzugetreten, ferner wird eine Beschreibung und Abbildung des zweiteiligen bei den polygonometrischen Rechnungen für die französischen Katastermessungen benutzten Rechenschiebers von Lallemand sowie der neuen Multiplikationsrechenmaschine von Steiger und Egli gegeben. Der ausgedehnte Gebrauch, der neuerdings von Rechenmaschinen gemacht wird, ist Veranlassung geworden, die folgenden 3 Kapitel über Koordinatenberechnung, über Triangulierung der Dreiecke niederer Ordnung und über polygonale Zugberechnung

durch Beispiele für eine Kleinpunktsrechnung, für die wichtigen Aufgaben des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens und für eine Polygonzugberechnung unter Anwendung der Rechenmaschine zu vervollständigen. Bemerkt sei, daß in den beiden letzten dieser Kapitel auch immer Rücksicht auf die Vorschriften der amtlichen preußischen Anweisung IX genommen ist.

In den Kapiteln X—XII, welche die nivellitische, trigonometrische und barometrische Höhenmessung betreffen, hat besonders das erste, entsprechend seiner Wichtigkeit für den Bauingenieur, eine Reihe von Ergänzungen erhalten. Es werden die Bestimmungen des Zentraldirektoriums des preußischen Vermessungswesens für den Nivellementsanschluß an den Landeshorizont mitgeteilt, ferner die bei der Landesaufnahme gebräuchliche Rechnung mit dekadischen Ergänzungen erläutert. Auch das neueste Verfahren derselben, das Einstellen eines Doppelfadens auf eine Strichskala, wird erwähnt, wie auch das Verfahren von Vogler mit seinem mit Schiebefernrohr versehenen Nivellierinstrument. Etwas mehr Raum als früher ist dem Verfahren des Büreaus für die Hauptnivellements des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten gewidmet worden, doch wäre hier noch eine größere Ausführlichkeit, schon wegen der großen Ausdehnung dieser Nivellements, wohl am Platze gewesen. Es hätte auch eine Abbildung des dabei benutzten Seibt-Breithauptschen Nivellirinstruments wie der Seibtschen Reversionslatte, die auch bei den späteren Nivellements des geodätischen Instituts benutzt wurde, gegeben werden können. Bei der trigonometrischen Höhenbestimmung sei besonders auf die einfache Jordansche Refraktionstheorie hingewiesen. Von den zu Höhenbestimmungen dienenden Quecksilberbarometern werden verschiedene neue Formen beschrieben und abgebildet, auch einige neue Beispiele zur Bestimmung von Höhenunterschieden mittels des Federbarometers sind eingefügt worden. Im Anschluß an die Literaturangaben beim Siedethermometer hätte vielleicht auch kurz das Prinzip der Schwerkraftsbestimmungen auf dem Ozean erörtert werden können.

In einem der Zusätze zum Kapitel XIII, Distanzmesser, wird darauf aufmerksam gemacht, wie Winkel-Spiegel und -Prisma zum Distanzmesser verwendet werden können und dabei der Grundgedanke des Telemeters von Paschwitz erläutert. Das Kapitel Tachymetrie ist durch Beschreibung und Abbildung mehrerer Instrumente vermehrt worden, besonders erwähnt sei der selbstreduzierende nach Hammers Angaben von Fennel konstruierte Theodolit, dessen Theorie auch kurz gegeben wird. Kleinere Einschaltungen haben bei den folgenden Kapiteln, Meßtischaufnahmen und Photogrammetrie, stattgefunden; bei letzterem ist der Phototheodolith von Koppe hinzugekommen. Das XVII. Kapitel, Vorarbeiten für den Eisenbahnbau, erhielt verschiedene Zusätze, die sich auf das Abstecken von Kreisbogen beziehen. Bei den Ausführungen über Tunnelabsteckungen ist bereits des Simplon-Tunnels und der Tunnel der Albulabahn gedacht worden. Die Übersicht über die Kataster- und Stadtvermessungen in Deutschland, die das Schlußkapitel bringt, ist bis auf die neueste Zeit fortgeführt worden.

Ungeändert blieben die dem Bande beigegebenen zahlreichen Hilfstafeln für trigonometrische und barometrische Höhenmessungen, Tachymetrie und Kreisbogenabsteckungen. Nur die Tabelle für die Mißweisung der Magnetnadel ist durch eine neuere für das Jahr 1905 nach Messerschmitt ersetzt worden.

Hervorgehoben sei noch, daß der Herausgeber große Sorgfalt darauf verwendet hat, die den einzelnen Kapiteln zugefügten Literaturangaben zu vervollständigen und bis auf die jüngste Zeit zu ergänzen.

Potsdam. L. Krüger.

---

# Neue Bücher.

### Analysis.

1. Nernst, W., u. Schönflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung m. besond. Berücksicht. der Chemie. 4. Aufl. München, Oldenbourg. M. 11; geb. M. 12.50.

### Astronomie, Geodäsie, Nautik.

2. Hohenner, Heinrich, Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte. Mit 16 Fig., 1 Zahlentabelle u. 2 graphischen Tafeln. Stuttgart, Wittwer. M. 2.80.
3. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 5. Aufl., hrsg. v. C. Reinhertz. Stuttgart, Metzler. M. 13.60.

S. auch Nr. 37.

### Biologie und Statistik.

4. Davenport, C. B., Statistical methods, with special reference to biological variation. 2nd, revised edition. New York, Wiley & Sons (London, Chapman & Hall). Morocco $ 1.50.

### Darstellende Geometrie, Photogrammetrie.

5. Berniolle, P., Cours de géométrie descriptive. Préparation à l'École militaire de Saint-Cyr. Avec 204 fig. Paris, Paulin. Cart Frs. 4.
6. Lafarga, P., Tratado de sombras y perspectiva, con arreglo à los programas de las escuelas de ingenieros civiles, academias militares y escuelas superiores de industrias. Alicante. Frs. 15.
7. Lambot, Oscar, Traité de perspective linéaire. Avec un atlas de 31 pl. Bruxelles, Castaigne. Frs. 4.
8. Opderbecke, Adf., Angewandte darstellende Geometrie f. Hochbau- u. Steinmetz-Techniker, umfassend geometrische Projektionen, die Bestimmung der Schnitte v. Körpern u. Ebenen u. unter sich, das Austragen von Treppenkrümmlingen u. der Anfängersteine bei Rippengewölben, die Schattenkonstruktionen u. die Zentralperspektive. Für den Schulgebrauch u. die Baupraxis. 32 Taf. m. erläut. Text. Leipzig, Voigt. M. 6.75.
9. Schell, Ant., Die stereophotogrammetrische Bestimmung der Lage e. Punktes im Raume. M. 3 Taf. Wien, Seidel & Sohn. M. 1.60.

### Geschichte, Biographien.

10. Poggendorff, I. C., Handwörterbuch. 4. Bd. v. Ad. v. Oettingen. 18. u. 19. Lfg. Leipzig, Barth. Je M. 3.

### Mechanik.

11. Andrews, E. S., On the the theory of stresses in crane and coupling hooks, with experimental comparision with existing theory. With 13 diagrams. London, Dulau. 3 s.

12. Bannings, Rud., Zur Theorie des Segelns. Progr. Hamburg, Herold. M. 2.50.
13. Fischer, Otto, Der Gang des Menschen. VI. Über den Einfluß der Schwere u. der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beins. (Abh. Sächs. Ges. Wiss. Bd. 28 Nr. 7.) Mit 3 Doppeltaf. u. 7 Textfig. Leipzig, Teubner. M. 4.
14. Haesen, Edm., Cours de balistique intérieure. Bruxelles, Castaigne. Frs. 6.
15. Heinzerling, Frdr., Dreieck u. Kraftübertragung in Baukonstruktionslehre u. Bauwesen. Grundzüge einer Dynamo-Statik der Baugefüge. Mit 156 Textfig. u. 3 Taf. Leipzig, Scholtze. M. 5.50; geb. M. 6.50
16. Morel, Marie-Auguste, La Balistique graphique et son application dans le calcul des tables de tir. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.
17. Perry, John, Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association“ in Leeds. Übersetzt von August Walzel. Mit 58 Abb. im Text u. einem Titelbild. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.80.
18. Stephan, P., Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere machinentechnische Fachschulen mit Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. I. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 7.
19. Tratado de mecánica. Principios fundamentales Vol. I. (Enciclopedia española.) Barcelona, Roviro y Chiques. Fr. 1.
20. Zucchetti, F., Nozioni teoriche ed applicazioni pratiche di statica grafica. 2ª ediz. riveduta ed ampliata da G. Allava. Torino. Con 39 tavole. L. 10.

### Physik, Chemie.

21. Bakhuis Roozeboom, H. W., Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. 2. Heft, Systeme aus zwei Komponenten, I. Tl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.50.
22. Beckmann, Herm., Abhängigkeit der Strahlungsintensität des „schwarzen Körpers“ von der Temperatur, untersucht f. einen bestimmten Strahlenkomplex. Diss. Tübingen, Fues. M. 1.40.
23. Chree, C., An inquiry into the nature of the relationship between sun-spot frequency and terrestrial magnetism. London, Dulau. 1 s. 6 d.
24. Detels, Frdr., Über stigmatische Brechung dünner Strahlenbündel im oblongen Rotationsellipsoid. Progr. Hamburg, Herold. M. 2.50.
25. Dorr, R., Mikroskopische Faltungsformen. Ein physikalisches Experiment. Mif 4 Taf. u. 31 Textfig. Danzig, Kafemann. M. 5.
26. Duddell, W., On the resistance of electromotive forces of the electric arc. London, Dulau. 4 s.
27. Encyklopädie d. math. Wiss. V. Bd. Physik. 2. Tl. 1. Heft. Leipzig, Teubner. M. 8.
28. Fortschritte, die, der Physik im J. 1903. Dargestellt v. der deutschen physik. Gesellsch. 59. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikalische Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 26.
29. Frick, J., Physikalische Technik, oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. 7., vollkommen umgearb. u. stark verm. Aufl. v. Otto Lehmann. I. Bd. 1. Abteilg. Mit 2003 Abb. u. einem Bildnis des Verf. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 16; geb. in Halbfrz. M. 18.
30. Kepler, Johannes, Dioptrik, oder Schilderung der Folgen, die sich aus der unlängst gemachten Erfindung der Fernrohre für das Sehen u. die sichtbaren Gegenstände ergeben (1611). Übersetzt u. hrsg. v. Ferdinand Plehn. (Ostwalds Klassiker Nr. 144.) Leipzig, Engelmann. geb. M. 2.
31. Kübler, J., Woher kommen die Weltgesetze? Mit 3 Fig. Leipzig, Teubner. M. 1.

**32.** Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 2. Bd. Technische Wärmelehre. München Oldenburg. M. 13; geb. M. 14.
**33.** Mie, Gustav, Moleküle, Atome, Weltäther. (Aus Natur u. Geisteswelt, Nr. 58.) Mit 27 Fig. Leipzig, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.
**34.** Myrian, A., Physique astronomique. Tulle, Crauffon. Frs. 3.50.
**35.** Preston, Thomas, The theory of heat. 2nd ed., revised by J. Rogerson Cotter. London, Macmillan. 18 s.
**36.** Tildan, W. A., The specific heats of metals and the relation of specific heat to atomic weight. Part 3. London, Dulau. 1 s.

### Tafeln, Rechenapparate.

**37.** Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1907 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1.50.
**38.** Kinkel, Md., Profilrechenstab. Große Ausg. (1 Bl.) 24 × 34 cm. Benrath bei Düsseldorf, Selbstverlag. M. 2.50.
—, dasselbe. Kleine Ausg. (1 Bl.) 15 × 25 cm. Ebd. M. 1.50.
**39.** Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. 4. Aufl. Gotha, Thienemann. brosch. M. —.80.
S. auch Nr. 2.

### Verschiedenes.

**40.** Encyklopädie, die, der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. I. Bd. Arithmetik u. Algebra. 8. (Schluß-)Heft. Leipzig, Teubner. M. 3.60.
**41.** —, dasselbe. II. Bd. Analysis. I. Tl. 5. Heft. Ebd. M. 6.
**42.** Matriculation Mathematics Papers. Being the examination papers set at London University from January 1891, to June 1904. (University Tutorial Series.) London, Clive. 1 s 6 d.
**43.** d'Ocagne, Maurice, Les instruments de précision en France. Avec 22 fig. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.
**44.** Poincaré, Henri, Wissenschaft u. Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 4.80.
**45.** Sylvester, James Joseph, Collected Mathematical Papers. Vol. I (1837—1853). Cambridge, University Press. 18 s.
**46.** Woolwich Mathematical Papers. For admission into the Royal Military Academy for the years 1894—1903. Edit. by J. E. Brooksmith. London, Macmillan. 6 s.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Bakhuis Roozeboom, H. W.. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre, 2. Heft, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 21.
Bischoff, C. A., Materialien der Stereochemie, in Form von Jahresberichten. I. Bd., 1894—1898, m. system. Inhaltsverzeichnis für 1894—1902. II. Bd., 1899—1902, m. alphabet. Sachregister für 1894—1902. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Zusammen M. 90.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1903. Vol. I. Cambridge, Mass., U. S. A.

Davenport, C. B., Statistical methods. s. N. B. 4.

Dorr, R., Mikroskopische Faltungsformen, s. N. B. 25.

Erményi, Nachträgliches über Petzval. (Photogr. Rundschau, 18. Jahrg. Heft 18, 15. Sept. 1904). Halle a. S., Knapp.

Fischer, O.. Der Gang des Menschen, VI, s. N. B. 13.

Frick, I., Physikalische Technik. I 1, s. N. B. 29.

Grassmann, Hermann, Gesammelte mathematische u. physikalische Werke. II. Bd. 1. Tl. Die Abhandlungen zur Geometrie u. Analysis. Leipzig, Teubner. M. 16.

Hohenner, H., Graphisch-mechanische Ausgleichung, s. N. B. 2.

Humbert, G., Cours d'Analyse, professé à l'École Polytechnique. II. Compléments du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde, I. 5. Aufl. s. N. B. 3.

Kepler, I., Dioptrik, s. N. B. 30.

Kübler, I., Woher kommen die Weltgesetze?, s. N. B. 31.

Lejeune-Dirichlet, G., Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, hrsg. v. G. Arendt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12—; geb. in Leinw. M. 13.

Marti, C. Die Wetterkräfte der strahlenden Planetenatmosphären. Nidau, Buchdruckerei E. Weber.

Nagl, Alfred, Der griechische Abakus. Eine Entgegnung. Sonderabdruck aus der Wiener Numismatischen Zeitschrift, 35. Bd., 1903.

Perry, J., Drehkreisel, s. N. B. 17.

Poincaré, H., Wissenschaft u. Hypothese, s. N. B. 44.

Riefler, S., Projekt einer Uhrenanlage für die Kgl. Belgische Sternwarte in Uccle. München, Ackermann.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 39.

Stephan, P., Technische Mechanik, I, s. N. B. 18.

Schumann, E., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts an höheren Schulen. Mit 87 Textfig. Stuttgart u. Berlin, Grub., geb. in Leinw. M. 2.20.

Sturm, C., Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen (1835). Aus dem Französischen übersetzt u. hrsg. v. Alfred Loewy. (Ostwalds Klassiker Nr. 143.) Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.20.

Sylvester, J. J., Mathematical papers, I., s. N. B. 45.

Vivanti, G., Leçons élémentaires sur la théorie des Groupes de Transformations, professées à l'université de Messine, traduites par A. Boulanger. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 8.

Wellisch, S., Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme. (Sonderabdruck aus: Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 2. Jahrg.) Wien, Della Torre.

Zahm, A. F., Atmospheric friction with special reference to Aeronautics. (Philos Soc. Washington Bull., vol. 14). Washington.

# Abhandlungsregister 1903.

Von ERNST WÖLFFING.

## Abkürzungen.

**A.A.E.I.** Atti dell' Associazione elettrica italiana 7.
**A.A.N.Y.** Annals of the Academy of Science, New York 15.
**A.A.P.M.** Atti dell' Accademia Peloritana, Messina 17.
**A.A.S.** Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 26.
**A.A.T.** Atti della R. Accademia di Torino 39.
**A.A.U.** Atti dell' Accademia, Udine 3. serie 10.
**A.A.W.** Anzeiger der K. K. Akademie, Wien 1903—04.
**A.C.P.** Annales de Chimie et de Physique, Paris 7. séries 30; 8. séries 1.
**A.D M.** Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3. serie 9—10.
**A.D.S.** Aus der Schule — für die Schule, Leipzig 13.
**A.E.** American Electrician 17.
**A.E.N.** Annales de l'École normale supérieure, Paris 3. séries 19—21.
**A.F.** Association française pour l'Avancement des Sciences, Paris 1903.
**A.F.G.P.** Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 5.
**A.G.C.** Atti dell' Accademia Gioënia di Scienze Naturali, Catania 4. serie 15.
**A.G.P.** Annales de géographie, Paris 13.
**A.Gr.** Archiv der Math. u. Physik. 3. Reihe 6—7.
**A.H.** Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 31.
**A.I.V.** Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 62.
**A.J.C.** Astrophysical Journal, Chicago 18—19.
**A.J.M.** American Journal of Mathematics, Baltimore 26.
**A.J.S.** American Journal of Science, New Haven 4. series 17.
**A.M.A.P.** Atti e Memorie delle R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Padova 16.
**A.M.T.** Archives du Musée Teyler, Haarlem 2. séries 8.
**A.N.** Archives néerlandaises, Haarlem 2. séries 8—9.
**A.N.K.** Astronomische Nachrichten, Kiel 164.
**A.ofM.** Annals of Mathematics, Cambridge Mass. 2. series 5.
**A.P.B.** Bulletin der K. K. Akademie der Wiss. Petersburg 5. Serie 17—19.
**A.P.L.** Annalen der Physik, Leipzig 4. Reihe 12—14.
**A.P.M.** Mémoires der K. K. Akademie der Wiss., Petersburg 8. Série 12.
**A.P.T.R.** Wissensch. Abhandlungen der Physikal. Techn. Reichsanstalt Berlin 4.
**A.S.A.** Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 56.
**A.S.C.** K. Videnskabs-Selskabets Forhandlinger, Christiania 1902.
**A.S.G.** Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève 4. séries 16—18.
**A.S.M.F.** Annales de la Société météorologique de France, Paris 51—52.
**A.S.P.** Annali della Scuola Normale Superiore, Pisa 9.
**A.S.U.J.** Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 2.
**A.U.J.** Acta et Commentationes Imp. Universitatis Jurievensis, Jurjew 1903 bis 1904.
**A.U.L.** Universitets Årskrift, Lund 38.
**B.A.** Bulletin astronomique, Paris 20—21.
**B.A.B.** Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 1903—04.
**B.A.Co.** Oversigt der K. Vedenskabs Selskab, Kjöbenhavn 1903.

**B.A.I.E.** Bulletin de l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'institut électrotechnique Montefiore, Liège 1901.
**B.D.M.** Bolletino di Matematica, Bologna 3.
**B.F.** Boltzmann-Festschrift.
**B.G.L.** Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. Leipzig 55.
**B.I.C.** Bulletin international, Krakau 1903.
**B.I.T.** Boletin del Inst. Cientifico y Literario „Porfirio Diaz", Tocula 6.
**B.M.** Bibliotheca mathematica, Leipzig 3. Reihe 4.
**B.M.B.** Der Baumeister, Berlin 1.
**B.M.E.** Bulletin des Sciences math. et phys. élémentaires, Paris 9.
**B.M.N.** Mathematische und Naturwissensch. Berichte aus Ungarn, Budapest 19.
**B.S.B.A.** Bulletin de la Société Belge d'Astronomie, Bruxelles 8.
**B.S.C.P.** Bulletin de la Société Chimique, Paris 3. séries 31.
**B.S.I.E.** Bulletin de la Société Internationale des Electriciens, Paris 2. séries 3.
**B.S.M.F.** Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 25.
**B.S.N.N.** Bolletino della Società di Scienze Naturali, Napoli 16—17.
**B.S.V.** Bulletin de la Société Vaudoise, Lausanne 4. séries 39.
**B.U.K.** Nachrichten der K. K. Universität, Kiev 1903—04.
**C.A.A.** Verslagen der zittingen der K. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 12.
**C.A.C.** Berichte der K. K. Akademie der Wissenschaften, Krakau 43.
**C.B.** Chemische Berichte 36.
**C.C.S.** Colorado College Studies, Colorado Springs 1.
**C.C.S.G.P.** Communicaçoes de comisão do serviço geologico de Portugal, Lisboa 5.
**C.M.G.** Zentralblatt für Mineralogie und Geologie, Stuttgart 1903.
**C.N.** The Chemical News, New York 88.
**C.P.L.** Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden 90; Suppl. 6—7.
**C.R.** Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris 137—138.
**C.T.L.** Czasopismo techniczne, Lemberg 21.
**D.A.W.** Denkschriften der K. K. Akademie Wien 72.
**D.M.** Der Mechaniker, Berlin 11—12.
**D.U.Z.** Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 27.
**D.V.M.** Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 12 bis 13.
**D.V.N.** Verhandlungen der Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig 75.
**D.W.B.** Das Weltall, Berlin 3—4.
**E.C.I.** Electrochemical Industry 1.
**E.C.M.** The Electrochemist and Metallurgist 3.
**E.K.B.** Eis- und Kälteindustrie, Berlin 2—3.
**E.M.** L'enseignement Mathématique, Paris 5—6.
**E.P.** Električestvo, Petersburg 1903.
**E.R.** Electrical Review, London 43.
**E.T.A.** Elektrotechnischer Anzeiger 20.
**E.W.** The Electrical World, New York 41.
**F.T.** Mémoires de l'Académie des Sciences, Toulouse 10. séries 3.
**G.B.** Giornale di Matematiche, Napoli 41.
**G.C.I.** Gazzetta chimica Italiana 33.
**G.J.G.** Geographisches Jahrbuch, Gotha 25.
**G.L.** Gäa, Leipzig 39.
**G.M.T.** Gasmotorentechnik, Berlin 2—3.
**H.B.** Helios, Berlin 19.
**H.V.C.** Handlinger van Vlaamsch Natuur- en Geneeskund. Congres 6.
**I.A.M.** Illustrierte aëronautische Mitteilungen, Straßburg 7.
**J.A.C.S.** Journal of the American Chemical Society, Easton 25.
**J.C.P.** Journal de Chimie et de Physique, Paris 1—2.
**J.E.P.** Journal de l'École Polytechnique, Paris 2. séries 8.
**J.E.S.T.** Journal of the Electrical Society, Tokyo 1901.
**J.F.I.** Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 151; 155—156.
**J.H.W.A.** Jahrbuch der Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten, Hamburg 20.
**J.M.** Journal de Math. pures et appliquées, Paris 5. séries 10.
**J.P.** Journal de Physique théorique et appliquée, Paris 4. séries 2—3.
**J.P.C.** The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 7—8.
**J.R.P.C.G.** Journal der Russ. Physikal.-Chem. Gesellschaft, Petersburg 35.
**J.S.B.G.** Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft Berlin 4.
**J.U.T.** Journal of the College of Science, Imperial University, Tokyo 19.
**J.V.N.S.** Jahreshefte des Vereins für vaterländ. Naturkunde, Stuttgart 59.
**J.V.O.** Jahreshefte des naturwiss. Vereins Osnabrück 15.

J.V.U. Jahreshefte des Vereins für Math. u. Naturwissenschaften, Ulm 11.
K.B. Kraft, Berlin 19.
K.L. Kosmos, Lemberg 8.
K.L.D. Kraft und Licht, Düsseldorf 7.
K.T. Der Kulturtechniker, Breslau 5.
L.E. L'Elettricistà, Roma 12.
L.E.M. L'Elettricistà, Milano 20.
L.G. La Géographie, Paris 8.
L.N. La Nature, Paris 31.
M. Mathesis, Gand 3. séries 4.
M.A. Mathematische Annalen, Leipzig 58.
M.A.Ly. Mémoires de l'Académie des Sciences, Lyon 3. séries 7.
M.A.M. Memorie delle R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Modena 3. serie 4.
M.A.P. Mémoires de l'Academie des Sciences, Paris 46.
M.A.T. Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino 2. serie 53.
M.A.T.P. Mémoires de l'Ac. impér. tchèque, Prag 1902.
M.B. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Mitteilungen, Stuttgart 2. Serie 6.
M.C.K. Memoirs of College of Science and Engineering, Imperial University, Kyoto 1.
M.E. Mechanical Engineer 10.
M.E.P. Messager électrotechnique, Petersburg 1901.
M.F.I. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 11; 13.
M.F.L. Mitteilung Finsens medizinischem „Lysinstitut" Kjöbenhavn 2.
M.G. Metallographist 6
M.G.S. Mathematical Gazette, Stroud 2.
M.G.W.S. Monatshefte der Gesellsch. der Wissenschaften, Straßburg 37.
M.H. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 15.
M.I.B. Memorie della R. Acc. di Scienze dell' Istituto di Bologna 5. serie 10.
M.M. The Messenger of Mathematics, London 2. series 23.
M.M.F. The American Math. Monthly, Springfield 10—11.
M.N.A.S. Monthly Notices of the Astronomical Society, London 63—64.
Mon. Monist, New York 14.
M.P.D.B. Mitteilungen aus der Praxis des Dampfkessel- und Dampfmaschinenbetriebs. Berlin 24—25.
M.P.G.Z. Mitteilungen der physikalischen Gesellschaft, Zürich 5—6.
M.P.L. Mathematikai és physikai lapok, Budapest 11—13.
M.P.M. Natur-en Geneeskundig Congres, Amsterdam 9.
M.P.O. Messager de la physique expérimentale et des mathématiques élémentaires, Odessa 30.
M.R.B. Marine-Rundschau, Berlin 13—14.
M.S.C. Videnskabs-Selskabets-Skrifter, Christiania 1902.
M.S.It. Memorie della Società Italiana (detta dei XL) Roma 3. serie 12.
M.S.P.A.O. Miscell. Scientific papers of the Alleghany Observatory, Alleghany 2. series 13; 15—16.
M.S.S.I. Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani, Catania 33.
M.T.E. Mathematikai és természettudományi Értesitö, Budapest 19; 21.
M.U.O. Denkschriften der K. K. Neuruss. Universität Odessa 89; 95.
M.V.A.P. Mitteilungen des Vereins der Freunde der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 13.
M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 31—32.
M.Z. Meteorologische Zeitschrift Wien 19—21.
N. Nature, London 68—69.
N.A. Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris 4. séries 3—4.
N.A.H. Nova Acta der K. K. Leopoldo-Carolinischen Akademie, Halle 81.
N.A.W. Nieuw Archief voor Wiskunde Amsterdam 2. Reeks 6.
N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa 5. serie 5—7.
N.F.W. Der Naturfreund, Witten 1—2.
N.G.G. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1903—04.
N.L.M. Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 17.
N.O. Natur und Offenbarung, Münster 48—49.
N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 18—19.
N.T.M. Nyt Tidskrift for Mathematik, Kjöbenhavn 14—15.
P. Prometheus, Berlin 14—15.
P.A.B. Veröffentlichungen (Glas) der K. Serb. Akademie, Belgrad 67.
P.A.Bo. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 39.
P.C.F. Proceedings of the California Academy of Science, San Francisco 3. series 1.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 12.
P.I.F.P. Publicazioni dell' Istituto di Fisica dell' Università, Pisa 6.
P.L.M.S. Proceedings of the London Math. Society, London 2. series 1.
P.M. Philosophical Magazine, London 6. series 6—7.
P.M.B. Photographische Mitteilungen, Berlin 38.

**P.M.R.** Periodico di Matematica, Livorno 3. serie 1.
**Pol.M.** Il Politecnico, Milano 1901; 1903.
**P.P.** Przeglad polski 147.
**P.P.S.** Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 42.
**P.P.S.G.** Proceedings of the Philosophical Society, Glasgow 34.
**P.P.S.L.** Proceedings of the Physikal Society, London 18—19.
**P.R.** The Physical Review, New York 17—18.
**P.R.I.A.** Procedings of the Royal Irish Academy, Dublin 3. series 8.
**P.R.S.L.** Proceedings of the Royal Society, London 72.
**P.S.D.** Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin 2. series 10.
**P.T.R.S.C.** Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal 2. series 8.
**P.T.W.** Przeglad technicki, Warszawa 41.
**P.Z.** Physikalische Zeitschrift, Göttingen 4—5.
**Q.J.** Quarterly Journal of Mathematics London 34—35.
**Q.J.M.S.** Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 59.
**R.A.G.** Revista di artigleria e genio, Roma 1903.
**R.A.R.L.** Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, Roma 5 serie 12—13.
**R.C.L.** Revista de Ciencias, Lima 7.
**R.C.M.P.** Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 18.
**R.F.M.** Rivista di fisica, matematica e scienze naturali, Pavia 4—5.
**R.G.O.** Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris 14.
**R.I.L.** Rendiconti del R. Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere, Milano 2. serie 36.
**R.M.I.** Rivista musicale italiana, Roma 10.
**R.M.M.** Revue de métaphysique et de morale, Paris 11.
**R.M.S.** Revue de mathématiques spéciales, Paris 13.
**R.P.W.** Revue de physique, Warschau 2.
**R.S.** Revue Scientifique, Paris 4. séries 18; 21; 5. séries 1.
**R.S.A.A.** Reports of the South African Association for the Advancement of Science, Capetown 1.
**R.S.B.** Revue Scientifique du Bourbonnais, Moulins 14.
**R.S.M.** Sammelschrift der Sewtschenkogesellschaft, Lemberg 9.
**R.T.E.B.** Rivista tecnica emiliana, Bologna 1901.
**R.T.I.** Rivista tecnica italiana, Roma 2.
**R.T.M.** Revista trimestral de matematica Valencia 3—4.
**R.T.T.** Rivista tecnica Torino 1.
**S.** Science, New York 2. series 18—19.
**S.A.B.** Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. Berlin 1903—04.
**S.A.M.** Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der K. Ak. der Wiss., München 1903—04.
**S.A.W.** Sitzungsberichte der Math. Naturw. Klasse der K. K. Akademie der Wiss. Wien 112—113.
**S.G.B.** Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellsch. der Wiss. Prag 1903.
**S.G.M.** Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften, Marburg 1903.
**S.I.D.** Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, Dresden 1903.
**S.L.** Sirius, Leipzig 35—36.
**S.L.P.** Sitzungsber. des deutschen naturwiss. medizin. Vereins für Böhmen „Lotos", Prag 2. Reihe 23.
**S.M.** Bulletin de la Société Math. de France, Paris 32.
**S.M.B.** Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, Berlin 3.
**S.M.Ka.** Bulletin der Physikomathematischen Gesellschaft, Kasan 2. Serie 13.
**S.M.Kh.** Mitteilungen der math. Gesellschaft, Charkow 2. Serie 28.
**S.N.G.L.** Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft, Leipzig 28 bis 29.
**S.N.M.** Bulletin de la Société impériale des naturalistes, Moskau 1902.
**S.P.M.** Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 48.
**S.U.E.** Stahl und Eisen 23.
**S.V.N.W.** Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwiss. Kenntnisse, Wien 43.
**T.A.E.S.** Transactions of the American Electrochemical Society 4.
**T.M.L.** Travaux et Mémoires des facultés des Sciences, Lille (2) series 1.
**T.M.W.** Terrestrial Magnetism, Washington 8.
**T.Q.** Technological Quarterly, Boston 14.
**T.R.I.A.** Transactions of the R. Irish Academy, Dublin 32.
**T.R.S.L.** Philosophical Transactions of the Royal Society, London 201.
**T.S.A.** Rad Jugoslavenske Akademie, Agram 154.
**T.S.D.** Scientific Transactions of the Royal Society Dublin 2. series 8.
**T.S.M.Am.** Transactions of the American Mathematical Society, New York 4.

**T.S.U.R.** Travaux Scientifiques de l'Université, Rennes 2.
**U.I.** Union des ingénieurs, Louvain 1901.
**U.M.N.** Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft, Berlin 10.
**V.G.H.** Verhandlungen des naturwissenschaftl.-medizinischen Vereins 2. Reihe 7.
**V.N.V.B.** Verhandlungen des naturhistorischen Vereins, Bonn 60.
**V.P.G.** Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Berlin 5 bis 6.
**V.P.G.B.** Verhandlungen der polytechnischen Gesellschaft, Berlin 63.
**V.P.L.** Vierteljahrschrift für Philosophie Leipzig 26.
**V.V.F.U.W.** Vierteljahrschrift des Vereins zur Förderung des Unterrichts Wien 8—9.
**W.M.** Wiadomosci matematyczne, Warschau 7.
**Z.A.C.** Zeitschr. für anorganische Chemie, Hamburg 36.
**Z.F.A.C.** Zeitschrift für angewandte Chemie 16.
**Z.F.M.** Zentralblatt für Mineralogie 1903.
**Z.F.N.** Zeitschr. f. Naturwissenschaften, Stuttgart 76.
**Z.G.U.** Zeitschrift für gewerblichen Unterricht, Leipzig 15—17.
**Z.G.V.** Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 4.
**Z.H.** Zeitschr. für mathemat. und naturwiss. Unterricht, Leipzig 34—35.
**Z.H.H.** Zeitschrift für Heizungstechnik. Halle 7.
**Z.K.I.** Zeitschrift für Kohlensäureindusdrie, Berlin 9.
**Z.K.M.** Zeitschr. f. Kristallographie und Mineralogie, Leipzig 38—39.
**Z.P.** Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin 16—17.
**Z.P.K.** Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Leipzig 118; 120.
**Z.P.P.** Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 33.
**Z.R.W.L.** Zeitschr. des Rhein.-Westphäl. Landmesservereins, Kassel 23.
**Z.S.** Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 49—50.
**Z.W.M.** Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie, Leipzig 19.
**Z.W.P.** Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1.

---

### Angewandte Mathematik im allgemeinen.

**1.** *C. A. Waldo.* The relation of mathematics to engineering. N. 69. 500.

### Philosophie der angewandten Mathematik.

**2.** **E. Mach.* Space and geometry from the point of view of physical inquiry. Mon. 14. 1.

Siehe auch 331; 1108.

### Pädagogik der angewandten Mathematik.

**3.** *P. Stäckel.* Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. D.V.M. 13. 313.

**4.** *H. Lorenz.* Der Unterricht in angewandter Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. D.V.M. 12. 565.

Siehe auch 69.

### Logikkalkul.

**5.** *K. Mac Coll.* La logique symbolique. E.M. 5. 415.

**6.** *P. Poretzky.* Théorie des non-égalités logiques. S.M.Ka. (2) 13. 80.

**7.** *C. Burali-Forti.* Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri. A.A.T. 39. 256.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**8.** **J. Lilienfeld.* Versuch einer strengen Fassung des Begriffes der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Z.P.K. 120. 58.

**9.** *H. Brömse* u. *E. Grimschl.* Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre. Z.P.K. 118. 145. — *Marbe.* V.P.L. 26. 339.

**10.** *P. Mansion.* Sur la portée objective du calcul des probabilités. M. (3) 4 Suppl. B.A.B. 1903. 1235.

**11.** **W. Voß.* Falsche Wahrscheinkeitsrechnung und Zufall. G.L. 39. 65.

**12.** **S. H. Burbury.* On certain theorems in probability. B.F. 542.

**13.** *P. Mansion.* Sur la loi des grands nombres de Poisson. M. (3) 4 Suppl.

**14.** *C. Cailler.* A propos d'un article sur le calcul des probabilités. E.M. 5. 299.

Siehe auch 26; 112.

### Fehlerrechnung.

**15.** **A. Sommerfeld.* Eine besonders anschauliche Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes. B.F. 848.

16. *Zachariae. Sur l'erreur moyenne de la mesure relative de pendules avec l'appareil Schneider Nr. 14. B.A.Co. 1903 Nr. 3. 349.

17. *S. S. Hough. On the determination of the division errors of a graduated circle M.N.A.S. 64. 461.

Siehe auch 103; 601.

**Methode der kleinsten Quadrate.**

18. *R. d'Emilio. Illustrazioni geometriche e meccaniche del principio dei minimi quadrati. A.I.V. 62. 363.

**Kaufmännische Arithmetik.**

19. S. Johnson. Middelforfaldstid. N.T.M. 14 A. 106.

**Rentenrechnung.**

20. J. F. Steffensen og N. P. Bertelsen. Forelöbig meddelse om bestemmelse af rentefoden i en annuitet. N.T.M. 14. B. 82.

**Statistik.**

21. Lexis. Über die Messung der menschlichen Fruchtbarkeit. Z.G.V. 4. 155.

**Biometrie.**

22. F. Ludwig. Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. Z.S. 50. 163.

Siehe auch 1195.

**Sterblichkeit.**

23. Czuber. Zum Problem der Sterblichkeitsmessung. Z.G.V. 4. 160.

**Versicherungsmathematik.**

24. Eggenberger. Über die Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen in der Invalidenversicherung. Z.G.V. 4. 129. — Meyer 131.

25. Ziegel. Zur Bewertung der reduzierten Police in der Lebensversicherung. Z.G.V. 4. 241.

**Spiel.**

26. *F. d'Arçais. Un problema di calcolo di probabilità. A.M.A.P. 16. 219.

**Numerisches Rechnen.**

27. T. Meyer. Über die zyklometrischen Formeln zur Berechnung von $\pi$ und über eine abgekürzte Bezeichnung der zyklometrischen Funktionen. Z.H. 35. 1.

28. H. Schubert. Elementare Berechnung der Logarithmen. Z.H. 34. 497; 551.

29. *E. Kohlschütter. 4- oder 5stellige Logarithmen für nautische Tafeln. M.R.B. 13. 1330; 14. 347. — Bolte 14. 219. — R. Kühne 350.

**Analytische Näherungsmethoden.**

30. S. Pincherle. Sur l'approximation des fonctions par les irrationnelles quadratiques. C.R. 137. 734.

31. *—. Note sur le calcul du nombre $\pi$. R.M.S. 13. 193.

**Numerische Gleichungen.**

32. Rabut. Sur la résolution pratique des équations. C.R. 137. 641.

33. F. Giudice. Separazione delle radici reali d'equazione a coefficienti numerici reali. G.B. 41. 190.

34. E. Eckhardt. Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der biquadratischen Gleichungen. A.Gr. (3) 7. 87.

35. *G. H. Hardy. The asymptotic solution of certain transscendental equations. Q.J. 35. 261.

36. T. Levi-Civitä. Sopra l'equazione di Kepler. R.A.L.R. (5) 13. A. 260.

Siehe auch 44.

**Interpolation.**

37. *G. Zemplén. Über graphisches Interpolieren. M.P.L. 13. 96.

**Harmonische Analyse.**

38. *E. Grimschl. Analyse und Synthese von Schwingungen. V.P.G. 5. 303.

Siehe auch 1046.

**Mathematische Tafeln.**

39. J. Schnöckel. Tafel der Antilogarithmen für die Basis 2. Z.S. 49. 465.

**Nomographie.**

40. M. d'Ocagne. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie. J.E.P. (4) 8. 97.

41. *M. d'Ocagne. Coup d'œil sur la théorie la plus générale de la nomographie. A.F. 1903. 180.

42. M. d'Ocagne. Sur la résolution nomographique des triangles sphériques. C.R. 138. 70.

**Graphischer Kalkül.**

43. R. Mehmke. Zur graphischen Kinematik und Dynamik. D.V.M. 12. 561.

44. A. Padoa. Esposizione elementare

del metodo di Steiner per la resoluzione grafica delle equazioni di 2. grado. B.D.M. 3. 1.

**45.** *F. Wittenbauer.* Graphische Dynamik der Getriebe. Z.S. 50. 57.

**46.** **F. Merl.* Graphische Bestimmung von Grabenprofilen und Rohrweiten. K.T. 5. 20.

Siehe auch 37; 660; 780; 950; 1008.

### Geometrische Näherungsmethoden.

**47.** *K. Bochow.* Das reguläre Achtzehneck als Beispiel für ein Näherungsverfahren zur Konstruktion und Berechnung von regelmäßigen Vielecken und von Winkelfunktionen. U.M.N. 10. 12.

**48.** *E. Eckhardt.* Neue Ableitung und geometrische Darstellung von Kreisumfang und -Inhalt. Z.H. 34. 233.

**49.** **Ceretti.* Il $\pi$ presso i Cinesi. A.A.U. (3) 10.

**50.** *G. Bonfantini.* Un metodo per calcolare la misure dell' area della superficie piana racchiusa da un' elisse. B.D M. 3. 48.

**51.** *E. Puller.* Minimumsaufgaben bei zweifachen Korbbögen. Z.R.W.L. 23. 130.

### Winkelteilung.

**52.** *J. D. Everett.* Note on Borgnets method of dividing an angle in an arbitrary ratio. P.M. (6) 7. 75.

**53.** *B. Carrara.* I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 5. A. 19; 228; 309.

**54.** *F. Villareal.* Trisección del ángulo. Refutacion. R.C.L. 7. 29.

**55.** *O. Schneider.* Planimetrische Ableitung der kubischen Gleichung für die Winkeltrisektion. U.M.N. 10. 17.

### Inhalte.

**56.** **H. Rebenstorff.* Bestimmung des Rauminhalts von Gefäßen. Z.P. 16. 349.

**57.** **Kober.* Ableitung und Anwendung der Simpsonschen Formel. Z.G.U. 15. 197.

**58.** **Gräber.* Ausmessung des Pyramidenstumpfes. Z.G.U. 16. 2.

**59.** **Gräber.* Ausmessung des regelmäßigen Kloster- und Kreuzkappengewölbes. Z.G.U. 16. 77.

Siehe auch 998.

### Planimeter.

**60.** **J. Barvék.* Studie über Polarplanimeter (tschech.). M.A.T.P. 1903 No. 34.

**61.** **A. Camacho.* Puede applicarse el planimetro en los observatorios meteorologicos a la determinacion de las medias diarias y mensuales. B.I.T. 6. 135.

### Rechenapparate.

**62.** **A. Wolff.* Kann die russische Rechenmaschine ihren alten Platz in der Schule behaupten oder ist ihr der Posner-Langersche Rechenkasten vorzuziehen. A.F.S.P. 5. 488; 506; 527.

**63.** **F. L. O. Wadsworth.* On convergents and arithmetical series, the ratio of whose terms approximate successively the value of $\pi$ and on their application to the construction of computing machines. J.F.I. 156. 131.

**64.** *M.* Auskunft. Z.S. 50. 334.

### Rechenschieber.

**65.** *—. Note sur la règle à calculs. R.M.S. 13. 196.

### Geometrischer Kalkul.

**66.** *B. O. Peirce.* On generalised space differentiation of the second order. P.A.Bo. 39. 377.

### Vektorenrechnung.

**67.** *R. Schimmak.* Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition. N.G.G. 1903. 317.

**68.** *R. Mehmke.* Vergleich zwischen der Vektorenrechnung amerikanischer Richtung und derjenigen deutsch-italienischer Richtung. D.V.M. 13. 217.

**69.** *L. Prandtl.* Über eine einheitliche Bezeichnung der Vektorenrechnuug im technischen und physikalischen Unterricht. D.V.M. 13. 36.

**70.** *A. Macfarlane.* The notation and fundamental principles of vector analysis. D.V.M. 13. 228.

**71.** **J. H. Maclagan-Wedderburn.* On the general scalar function of a vector. P.R.S.E. 24. 409.

**72.** **C. H. Hinton.* The geometrical meaning of Cayleys formulae of orthogonal transformation. P.R.I.A. (3) 8. 59.

**73.** **A. Thue.* On en pseudomekanisk methode i geometrien. A.S.C. 1902 No. 4.

Siehe auch 144; 805.

### Quaternionen.

**74.** *C. J. Joly.* A method of establishing the principles of the calculus of quaternions. P.M. (6) 6. 653.

**75.** *C. J. Joly.* Quaternion arrays. T.R.I.A. 32.

**76.** *C. J. Joly.* The multilinear quaternion function. P.R.I.A. (3) 8. 47.
**77.** *C. J. Joly.* The interpretation of a quaternion as a point symbol. T.R.I.A. 32.
**78.** *H. E. Hawkes.* Enumeration of non-quaternion number systems. M.A. 58. 361.
**79.** **C. J. Joly.* Integrals depending on a single quaternion variable. P.R.I.A. (3) 8. 6.
**80.** **P. A. Mac Mahon.* On the application of quaternions to the orthogonal transformation and invariant theory. P.L.M.S. (2) 1. 210.
**81.** **O. J. Ferguson.* Quaternions in electrical calculations. P.R. 17. 378.

### Geometrisches Zeichnen.

**82.** *O. Schneider.* Teilung einer Strecke ohne Verwendung von Parallelen. U.M.N. 10. 39.

### Zeichenwerkzeuge.

**83.** **E. A. Partridge.* On the mathematical theory of the geometric chuck. G.F.I. 155. 139; 195.
**84.** *B.* Nuevo útil de dibujo. A.S.A. 56. 92.
**85.** **A. Baur.* Der Campylograph. N.O. 48. 229.
**86.** *J. J. Quinn.* A linkage for describing the conic section by continuous motion. M.M.F. 11. 12.
**87.** *J. R. Cotter.* An instrument for drawing conics. P.M. (6) 7. 274.
**88.** *K. Pearson.* On a novel instrument for drawing parabolas. P.M. (6) 7. 200.
**89.** *E. Estanave.* Un hyperpolographe à liquide. R.S. (5) 1. 596.
**90.** *E. Estanave.* Sur un hyperbolographe à liquide. S.M. 32. 58.
**91.** *F. Schrader* et *C. Sauerwein.* Sur l'emploi du tachéographe Schrader pour les travaux d'hydrographie. C.R. 137. 781.

### Darstellende Geometrie.

**92.** *C. Heumann.* Zur Thorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie. A.Gr. (3) 6. 283.
**93.** *R. Mehmke.* Konstruktion der Krümmungsachse und des Mittelpunkts der Schmiegungskugel einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve. Z.S. 49. 464.
**94.** **G. Loria.* Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva. P.M.R. (3) 1. 143.
**95.** *F. P. Paterno.* Un teorema sulle proiezioni ortogonali di due segmenti rettangolari e la sua applicazione in geometria descrittiva. R.C.M.P. 18. 111.

### Projektion.

**96.** **H. Schmidt.* Stereoskopische Projektion. P.M.B. 38. 265.

Siehe auch 95.

### Schattenkonstruktionen.

**97.** **G. Feldhaus.* Ein kleiner Beitrag zur Lehre von der Schattenkonstruktion. Z.G.U. 16. 101.
**98.** **G. Feldhaus.* Noch einmal der Schatten in Hohlkugeln. Z.G.U. 16. 185.
**99.** **H. Hertzer.* Schlagschatten eines Kugelkreises in die Kugel. Z.G.U. 16. 169.

### Beleuchtungskunde.

**100.** **Meisel.* Über die wahre Bedeutung der Kurven gleicher Helligkeit auf krummen Flächen. Z.G.U. 15. 183.

### Photogrammetrie.

**101.** *P. Caubet.* Remarques sur la calcul des coordonnées photographiques. B.A. 21. 81.
**102.** *S. Finsterwalder.* Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. S.A.M. 1904. 103.
**103.** *S. Finsterwalder.* Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik. S.A.M. 1903. 683.
**104.** *F. Faccin.* I calcoli di riduzione delle fotografie stellari. R.F.M. 5 A 242.
**105.** *G. Boccardi.* Sulla precisione delle posizioni stellari ottenute col metodo fotografico. R.A.L.R. (5) 13 A 392.

Siehe auch 992.

### Kristallographie.

**106.** *A. Chevalier.* Übungen in der Kristallographie (russ). A.U.J. 1903. No 1 u. 2.
**107.** **E. v. Fedorow.* Allgemeinste Kristallisationsgesetze und die darauf fußende eindeutige Aufstellung der Kristalle. Z.K.M. 38. 321.
**108.** *A. J. Moses* und *A. F. Rogers.* Nachtrag zu dem Aufsatze: Formeln und graphische Methoden zur Bestimmung von Kristallen. Z.K.M. 38. 506.
**109.** **G. F. H. Smith.* Über die Vorgänge der gnomonischen Projektionen und über ihre Anwendung beim Kristallzeichnen. Z.K.M. 39. 142
**110.** **E. Sommerfeld.* Kettenbruchähnliche Entwicklungen in der Kristallographie. C.M.G. 1903. 537.

**111.** *H. Baumhauer.* Über die Aufeinanderfolge und die gegenseitigen Beziehungen der Kristallformen in flächenreichen Zonen. S.A.B. 1904. 543.

**112.** **E. Sommerfeld.* Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurteilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Kristallen. Z.F.M. 1903. 537.

**113.** **H. Baumhauer.* Untersuchungen über die Entwicklung der Kristallflächen im Zonenverbande. Z.K.M. 38. 628.

**114.** **F. Haag.* Notiz zu dem Aufsatze von C. Lippitsch, Stereometrie der einfachen isoachsialen Formeln des regulären Systems. Z.K.U. 38. 507.

### Modelle.

**115.** **Gauger.* Ein mechanisches Modell zur Demonstration des Dopplerschen Prinzips. Z.P. 16. 329.

**116.** **Adami.* Ein Drehstrommodell zur Selbstanfertigung. Z.P. 17. 29.

Siehe auch 722.

### Mechanik im allgemeinen.

**117.** **P. Dahem.* Die Entwicklung der Mechanik (poln). W.M. 7. 113; 244.

**118.** **Juppont.* Critique de la mécanique classique et essai de mécanique naturelle. F.T. (10) 3. 177.

**119.** **G. Sorel.* Sur divers aspects de la mécanique. R.M.M. 11. 716.

**120.** *A. Gouilly.* Sur l'enseignement élémentaire de la mécanique. E.M. 6. 12; R.S. (5) 1. 379.

**121.** **K. Fuchs.* Kleine Beiträge zur Mechanik. Z.P. 16. 342.

**122.** *J. Ruiz-Castizo Ariza.* Algunas fórmulas para el empleo de ejes coordenados oblicuos en la mecánica analitica. R.T.M. 3. 75; 120.

### Prinzipien der Mechanik.

**123.** *A. Müller.* Einige Bemerkungen über den Wesensbegriff der Bewegung und sein Verhältnis zum Begriff der absoluten Bewegung. N.O. 48. 233.

**124.** *C. Neumann.* Über die sogenannte absolute Bewegung. B.F. 252.

**125.** **E. de Caucas.* Explanation of forces at a distance. R.S. (4) 18. 744.

**126.** *J. Joly.* On the conservation of mass. T.S.D. (2) 8. 23.

**127.** **G. Zemplén.* Anwendung der mechanischen Prinzipien auf Bewegungen mit Reibung. M.P.L. 11. 162; 12. 275.

**128.** *G. Zemplén.* Berichtigungen zur Arbeit: Über die Anwendung der mechanischen Prinzipien auf reibende Bewegungen. (A.P.L. 12. 356). A.P.L. (4) 13. 216.

**129.** **G. Zemplén.* Über das Prinzip des größten Energieumsatzes. M.P.L. 12. 372.

**130.** *H. Januschke.* Über den Energieumsatz in der Mechanik. Berichtigung. A.P.L. (4) 12. 1175.

**131.** *G. Zemplén.* Über den Energieumsatz in der Mechanik. A.P.L. (4) 13. 840.

**132.** **M. Réthy.* Ostwalds Prinzip über den Energieumsatz (ung). M.T.E. 21. 459; M.P.L. 13. 111.

**133.** *F. Lindemann.* Über das d'Alembertsche Prinzip. S.A.M. 1904. 77.

**134.** **J. Larmor.* On the mathematical expression of the principle of Huygens. P.L.M.S. (2) 1. 1.

**135.** *M. Merriman.* The principle of least work in mechanics and its use in investigations regarding the ether of space. P.P.S. 42. 162.

**136.** *M. Réthy.* Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört. M.A. 58. 169.

**137.** **M. Réthy.* Über die Verallgemeinerung des Prinzips der Aktion (ung). M.T.E. 21. 146.

**138.** *Manno.* Das Prinzip der Gegenwirkung (actio par reactioni) als Grundlage der Krafttheorie. D.V.N. 75. 31.

**139.** *G. H. Bryan.* Dynamical and granular media. N. 69. 250.

**140.** **O. Chvolson.* Perpetuum mobile (russ). R.F.W. 2. 105.

Siehe auch 178; 329; 951.

### Kinematik.

**141.** **R. Magini.* Sulle accelerazioni d'ordine superiore. A.I.V. 62. 1063.

**142.** **Chatelain.* Sur la représentation du mouvement. R.S. (4) 21. 664.

**143.** **H. Wilda.* Umdrehungszähler und Geschwindigkeitsmesser. K.B. 19. 293.

**144.** *G. K. Suslov.* Über die Verträglichkeitsbedingungen von Hadamard (russ). B.U.K. 1903. c 6.

**145.** *J. von der Griend jr.* Rectifieerende Krommen. C.A.A. 12. 414.

**146.** *J. Ruiz Castizo-Ariza.* Algunas fórmulas para el empleo de ejes coordenados en la mecánica analítica. R.T.M. 4. 20.

**147.** **F. J. Vaes.* Opmerkingen omtrent bewegingsleer en theorie der oppervlakken. M.P.M. 9. 185.

**148.** *E. v. Weber.* Die komplexen Bewegungen. B.G.L. 55. 384.

**149.** *L. E. J. Broower.* Over een splitsing van de continue beweging om een vast punt $O$ van $R_4$ in twee continue bewegingen om $O$ van $R_3$'s. C.A.A. 12. 819; 941. — *E. Jahnke* 940.

**150.** **S. L. van Oss.* Beweging in een ruimte van 4 afmetingen. M.P.M. 9. 178.

**151.** **R. de Saussure.* La répresentation des objets en mouvement. R.S. (4) 21. 257.

**152.** *J. Gehrke.* Om en anvendelse af ligningen $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ paa et uforanderligt, plant punktsystems bevaegelse. N.T.M. 15. B. 5.

**153.** *N. J. Sonin.* Über die aus 3 Elementen bestehenden in bezug auf 1 Achse symmetrischen Parallelogramme (russ). A.P.B. (5) 18. 117.

**154.** *F. Kraft.* Équivalence du mouvement d'un système invariable à 3 dimensions $\Sigma$ qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée $\Sigma_1$ à une autre position donnée $\Sigma_2$. E.M. 5. 178.

**155.** *M. Grübler.* Über die Kriterien der Zwangläufigkeit kinematischer Ketten. S.I.D. 1903. 10.

**156.** *A. Bienaymé.* Essai sur le déplacement d'un madrier sur 2 rouleaux non parallèles. N.A. (4) 3. 485.

**157.** **J. J. Browne.* A particular method in centroids. C.C.S. 1. 219.

**158.** **J. Finger.* Über die einer allbekannten Kapillarerscheinung analogen Resultate eines bestimmten Problems der Kinematik starrer Körper. B.G. 752.

**159.** *L. Waelsch.* Über Binäranalyse. S.A.W. 113. 645; 1091.

Siehe auch 43.

### Kinematische Geometrie.

**160.** **A. Mannheim.* Note de géométrie cinématique. A.F. 1903. 128.

**161.** **R. Bérard.* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. B.M.E. 9. 166.

**162.** *C. E. Wasteels.* Sur le volume engendré par une figure invariable. M. (3) 4. 5; 86.

**163.** *R. Bricard.* Sur le déplacement d'une figure de grandeur invariable assujettie à 3 conditions. N.A. (4) 3. 448.

**164.** *O. Mohr.* Beitrag zur Geometrie ebener Getriebe. Z.S. 49. 393.

### Mechanismen.

**165.** *G. Fontené.* Sur un système articulé gauche. N.A. (4) 4. 105.

**166.** *G. Fontené.* Sur le système articulé de M. Kempe. N.A. (4) 3. 529; 4. 8.

**167.** *F. J. Vaes.* Een vraagstuk bebetreffende stangenvierhoeken. N.A.W. (2) 6. 178.

**168.** *E. Emch.* Somes special algebraic transformations realized by linkages. C.C.S. 1. 210.

**169.** *A. Mesnager.* Sur les articulations à lame flexible. C.R. 137. 908.

**170.** *F. Ebner.* Die Schubkurbel. U.M.N. 10. 6.

Siehe auch 45; 164.

### Zahnräder.

**171.** **W. Wolfrom.* Eine falsche Konstruktion der Evolventenverzahnung. Z.G.U. 17. 23. — *P. Köppe* 66.

### Schraubenrechnung.

**172.** **R. S. Ball.* Some extensions of the theory of screws. T.R.I.A. 32. 299.

**173.** **C. J. Joly.* The quadratic screw system; a study on a family of quadratic complexes. T.R.I.A 32. 155.

**174.** **C. J. Joly.* Representation of screws by weighted points. T.R.I.A. 32.

**175.** **R. S. Ball.* On the reflection of screw-systems and allied questions. T.R.I.A. 32. 101.

**176.** **C. J. Joly.* The geometry of a three system of screws. T.R.I.A. 32. 239.

### Statik.

**177.** **J. Slowikowski.* Sur certains problèmes de mécanique et de géométrie. Le système de zéro. P.T.W. 41. 351. 388.

**178.** **J. Frischauf.* Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen eines starren Punktsystems aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und aus der Starrheit. B.F. 1

**179.** *A. Mehmke.* Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten, für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist. Z.S. 50. 156.

**180.** **E. Grimsehl.* Apparat zur Demonstration der Zug- und Druckspannungen in einem festen Körper sowie zur experimentellen Ableitung des Momentensatzes. Z.P. 16. 260.

**181.** **H. Keferstein.* Über die Ableitung des Hebelgesetzes nach Grimsehl. Z.P. 16. 268.

**182.** **E. Grimsehl.* Die mechanische Kraftübertragung durch schiefe Ebene, Keil und Schraube. Z.P. 17. 129.

**183.** **Claussen.* Über die statische Berechnung von Schornsteinen. M.P.D.B. 24. 612.

**184.** **O. Jäcker.* Schornsteinstabilität. M.P.D.B. 24. 245; 265.

**185.** *O. Jäcker.* Mauerwerksfestigkeit und Schornsteinstandsicherheit. M. P.D.B. 25. 896; 914; 935; 956; 974; 992.

**186.** *A. Schoenflies.* Über Plückers wissenschaftlichen Nachlaß. M.A. 58. 385.

Siehe auch 103; 371; 373.

### Graphische Statik.

**187.** *M. Panetti.* Una risoluzione diretta del problema della sezione reagente. A.A.T. 39. 247.

### Zusammensetzung von Kräften.

**188.** *P. Duhem.* Léonard de Vinci et la composition des forces concurrentes. B.M. (3) 4. 338.

**189.** **P. Czermak.* Eine Vorrichtung zur Darstellung des Kräfteparallelogramms. Z.P. 17. 89.

### Massengeometrie.

**190.** *N. N. Schiller.* Über den möglichen Aufbau der Mechanik der Massen ohne Voraussetzung der Hilfsbegriffsbestimmung der Kraft. russ. B.U.K. c 7.

### Schwerpunkte.

**191.** *S. Dautheville.* Sur quelques sommations que l'on rencontre en mécanique. E.M. 5. 437.

**192.** **F. Castellano.* Baricentro di un sistema piano di punti con masse imaginarie. P.M.R. (3) 1. 163.

**193.** *A. Miller.* Konstruktive Bestimmung des Schwerpunktes des Dreiecksumfangs. Z.H. 34. 407.

### Momente.

**194.** **C. Spelta.* Alcune formole e proprietà relative ai momenti d'inerzia. G. B. 41. 62.

**195.** **W. H. Derriman.* On an oscillating table for determining moments of inertia. P.P.S.L. 18. 420.

**196.** *S. Dautheville.* Sur quelques sommations qu'on rencontre en mécanique. E.M. 5. 437.

**197.** *E. Rehfeld.* Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen. A.Gr. (3) 6. 237.

**198.** *K. Zindler.* Über die liniengeometrische Darstellung der Trägheitsmomente eines starren Körpers. B.F. 34.

Siehe auch 180; 191; 204; 385; 386.

### Kettenlinien.

**199.** *C. Neumann.* Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreislinie. B.G.L. 55. 13.

**200.** **A. Goldberg.* Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point. M.S.C. 1902 No. 9.

### Dynamik.

Siehe 43; 45

### Differentialgleichungen der Dynamik.

**201.** *G. Hamel.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen in der Mechanik. Z. S. 50. 1.

**202.** **W. F. Meyer.* Zur Theorie der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. B.F. 386.

**203.** *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Hamilton. A.A.T. 39. 342.

**204.** **H. Föttinger.* Effektive Maschinenleistung und effektives Drehmoment und deren experimentelle Bestimmung. J.S.G.B. 4. 441.

Siehe auch 951.

### Dynamik des Punktes.

**205.** **Orlando.* Trajettoria d'une grave. A.A.P.M. 17.

**206.** *A. Witting.* Über den Fall im wiederstehenden Mittel. S.I.D. 1903. 11.

**207.** *F. Schuh.* Over de beweging van een materieel deeltje in een vlak, eenparig roteerend Krachtenveld. N.A.W. (2) 6. 123.

**208.** *R. Mehmke.* Über eine Mechanikaufgabe. M.B. (2) 6. 28.

Siehe auch 152; 200.

### Zentralbewegung.

**209.** *V. Jamet.* Sur le théorie des forces centrales. N.A. (4) 3. 216

**210.** **E. Lampe.* Der schiefe Wurf im luftleeren Raume als Zentralbewegung. B.F. 215.

### Gezwungene Bewegung.

**211.** *L. Lecornu.* Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide. S.M. 32. 50.

**212.** *C. Bourlet.* Sur le mouvement d'un point pesant sur une courbe avec une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. N.A. (4) 3. 175.

**213.** **G. Pennachietti.* Sugl' integrali comuni a più problemi del moto d' un punto materiale sopra una superficie. A.G.C. (4) 15 No. 8.

### Brachistochronen.

**214.** *C. Formenti.* Su alcuni classi di linee brachistocrone. R.I.L. (2) 36. 1079.

### Pendel.

**215.** **E. Weiß.* Elementare Entwicklung der Pendelformel für kleine Winkel. Z.P. 17. 87.

**216.** *A. G. Greenhill.* Le pendule simple sans approximations. N.A. (4) 4. 97.

**217.** **A. J. Stodólkiewicz.* Einige Bemerkungen betreffend das Pendel (poln.). P.T.W. 41. 510.

**218.** **R. R. Tatnall.* On the theory of te compound pendulum. P.R. 17. 460; 18. 187.

Siehe auch 16; 1192.

### Dynamik des Körpers.

**219.** *F. Jung.* Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. A.Gr. (3) 6. 206.

**220.** **P. V. Voronetz.* Die Bewegungsgleichungen des Körpers, der auf der invariabeln Ebene ohne zu gleiten rollt (russ.). B.U.K. 1903 b4.

**221.** *H. Andoyer.* Problème de mécanique rationnelle. N.A. (4) 3. 241.

**222.** *J. H. M. Falkenhagen.* Die rollende Bewegung eines beliebigen schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene. N.A.W. (2) 6. 104.

**223.** *A. Hérisson.* Procédé simple permettant d'obtenir sur la paroi d'un cylindre qui tourne de grandes pressions avec de faibles efforts. C.R. 137. 1035.

**224.** *A. Schoenflies.* Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers. M.A. 58. 385.

### Dynamik des Systems.

**225.** *M. Contarini.* Sul moto d' un systema olonomo di corpi rigidi. R.A.L.R. (5) 12 B. 609.

**226.** *G. Hamel.* Über eine Anwendung der Lagrangeschen Transitivitätsgleichungen in der Mechanik. D.V.N. 75. 12; D.V.M. 13. 132.

**227.** *L. Boltzmann.* Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. D.V.N. 75. 13; D.V.M. 13. 132.

**228.** *E. Hasenöhrl.* Über die Anwendbarkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung in der Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen. B.F. 642.

**229.** *H. C. Pocklington.* On the kinetic theory of matter. P.C.P.S. 12. 283.

Siehe auch 45; 567; 568.

### Drehung.

**230.** *de Sparre.* Remarque au sujet de la question de mécanique posée au concours d'agrégation en 1903. N.A. (4) 4. 38; 82.

**231.** *H. Padé.* Sur l'herpolhodie. N.A. (4) 3. 289.

**232.** *E. Cotton.* Application de la géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du déplacement d'un solide autour d'un point fixe. A.E.N. (3) 20. 155.

### Kreisel.

**233.** *A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top II. A.of M. (2) 5. 67.

**234.** *C. Alasia.* Alcune osservazioni sul politropio di Sire e sul giroscopio di Foucault. R.F.M. 4 B. 528.

**235.** *H. du Bois.* Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel. A.P.L. (4) 13. 289.

**236.** *H. E. J. G. du Bois.* Hysteretische orientatie-verschijnselen. C.A.A. 12. 753.

**237.** **A. Schmidt.* Eine Dreifingerregel für den Kreisel und den Präzessionsapparat. Z.P. 77. 32.

**238.** *A. Föppl.* Über einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. S.A.M. 1904. 5.

**239.** *H. Lorenz.* Die Wirkung eines Kreisels auf die Rollbewegung von Schiffen. P.Z. 5. 27.

### Schwingungen.

**240.** *A. Korn.* Le problème mathématique des vibrations universelles. S.M.Kh. (2) 8. 68.

**241.** **E. Grimsehl.* Analyse und Synthese von Schwingungen. V.P.G. 5. 303.

**242.** *R. Amberg.* Dämpfung von Schwingungen. Z.P. 17. 32.

**243.** *W. Elsässer.* Über erzwung[illegible]ne Schwingungen von Stäben. A.P.L. (4) 13. 791.

**244.** *F. A. Schulze.* Über drehe[illegible]de Schwingungen von dünnen Stäben [illegible]it rechteckigem Querschnitt und ihre V[illegible]erwendung zur Messung der Elastizit[illegible]ts-konstanten. A.P.L. (4) 13. 583.

**245.** **P. E. Kappert.* Apparat für Transversalschwingungen elastisc[illegible]her Stäbe. Z.P. 16. 318.

**246.** *C. Chree.* The whirting [illegible]nd

transverse vibrations of rotating shafts. P.M. (6) 7. 504.

**247.** *S. Guggenheimer.* Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes. S.A.M. 1904. 41.

**248.** *G. Alfani.* Sui movimenti vibratori di una torre. R.F.M. 5 A. 146; 193.

**249.** **H. J. Oosting.* Elementare Behandlung des Gesetzes von Biot und Savart. Z.P. 17. 27.

**250.** **A. Korn.* Les vibrations universelles de la matière. Théorie mécanique de la gravitation, du frottement dans les masses continues et des phénomènes électriques. A.E.N. (2) 19. 133.

Siehe auch 38; 766; 981.

### Stoß.

**251.** *T. Schwartze.* Zur Formulierung des Stoßgesetzes. Z.H. 34. 415.

**252.** *Ringelmann.* Détermination expérimentale de la pression momentanée résultant du choc. C.R. 137. 644.

**253.** *K. v. Szily.* Der Stoß rauher Körper bei ebener Bewegung. B.M.N. 19. 283.

Siehe auch 956.

### Reibung.

**254.** **E. Daniele.* Sulla teoria meccanica dell' attrito. N.C.P. (5) 7. 109.

**255.** *A. Sommerfeld.* Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z.S. 50. 97.

**256.** *L. Lecornu.* Sur le frottement de pivotement. C.R. 138. 554.

Siehe auch 127; 128; 250.

### Perpetuum mobile.

**257.** *C. Lagrange.* La machine à mouvement perpétuel et la question du radium. Sur la rotation indéfectible d'un système et la production indéfinie d'un travail utilisable sous la seule action d'un potentiel newtonien fine. B.A.B. 1903. 987.

Siehe auch 140.

### Potentialtheorie.

**258.** *E. Daniele.* Sulla teoria dei potenziali di ordine superiore. R.A.L.R. (5) 12; B. 453.

**259.** **A. C. Dixon.* On many-valued Newtonian potentials. P.L.M.S. (2) 1. 415.

**260.** *J. Plemelj.* Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. M. H. 15. 93.

**261.** *D. Hilbert.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. N.G.G. 1904. 49.

**262.** **H. du Bois.* Hysteretische Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Verteilungsfunktion. B.F. 809.

**263.** *L. Fejér.* Über 2 Randwertaufgaben. B.M.N. 19. 329.

**264.** *A. de St. Germain.* Généralisation de la propriété fondamentale du potentiel. C.R. 137. 736.

**265.** **K. Stojanovitch.* Widerstandspotential (serb.). P.A.B. 67. 32.

**266.** **P. Alibrandi.* Il problema di Dirichlet per un parallelepipedo rettangolo. G.B. 41. 230.

**267.** *B. O. Peirce.* On the lines of certain classes of solenoidal or lamellar vectors, symmetrical with respect to an axis. P.A.Bo. 39. 295.

Siehe auch 207; 257.

### Attraktion.

**268.** *G. W. Walker, A. Gray.* Attraction between concentric hemispherical shells. N. 69. 560.

**269.** *G. Morera.* Sull' attrazione di un ellissoide eterogeneo. A.A.T. 39. 252; 258; 332; 338.

### Gravitation.

**270.** **Peck.* Corpuscular theories of gravitation. P.P.S.G. 34.

**271.** *A. Korn.* Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. S.A.M. 33. 383; 563.

**272.** **C. Davis.* A suggestive relation between the gravitational constant and the constants of the ether. S. (2) 19. 928.

**273.** **J. J. Gilles.* Die Energetik von Ostwald und die Gravitation. G.L. 39. 193.

**274.** *L. d'Auria.* A relation between the mean speed of stellar motion and the velocity of wave propagation in a universal gaseous medium bearing upon the nature of the ether. J.F.I. 155. 207.

Siehe auch 250; 469; 987; 1030.

### Hydrostatik.

**275.** *P. Duhem.* Sur quelques formules utiles pour discuter la stabilité d'un milieu vitreux. C.R. 38. 737.

**276.** *P. Duhem.* D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité. C.R. 138. 844.

**277.** **H. Kuhfahl.* Der hydrostatische Auftrieb. Z.P. 17. 32.

**278.** **A. Hartwich.* Einfacher Ap-

parat für das hydrostatische Paradoxon. Z.P. 16. 275.

**279.** **A. Höfer*. Zwei hydrostatische Apparate. Z.P. 16. 257.

### Gleichgewicht von Körpern in Flüssigkeit.

**280.** **R. W. H. T. Hudson*. The surface of flotation. M.M. (2) 23. 50.

### Hydrodynamik.

**281.** *U. Grassi*. Studii d'idrodinamica. A.S.P. 9. No. 3.

**282.** *W. Wien*. Hydrodynamische Untersuchungen von H. v. Helmholtz. S.A.B. 1904. 716.

**283.** *E. Maillet*. Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. J.E.P.(2) 8. 1.

**284.** *S. Hondl*. O nul-mjestima gibanja tekućine. (Über die Nullstellen der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit.) T.S.A. 154. 132.

**285.** **L. Matthiessen*. Gibt es unendlich große Geschwindigkeiten? B.F. 141.

**286.** **M. T. Huber*. Sur les conséquences de l'hydrocinématique théorique qui ont une portée pratique au point de vue des applications, en particulier sur celles qui se rapportent au mouvement de l'eau dans les fleuves et dans les canaux. C.T.L. 21. 47; 61; 73; 84. 99.

**287.** *J. T. Jackson*. A new method of producing tension in liquids. P.S.D. (2) 10. 104.

**288.** **S. Zaremba*. Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène. B.I.C. 1903. 403.

Siehe auch 295; 748.

### Bewegung der Flüssigkeiten in Kanälen.

Siehe 286.

### Ausfluß von Flüssigkeiten.

**289.** *J. Hermanell*. Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten an Mündungen und Überfällen. S.A.W. 112. 879.

**290.** **Pantanelli*. Efflusso dell' acqua per le sabbie. M.A.M. (3) 4.

**291.** **A. v. Obermayer*. Über den Ausfluß fester Körper, insbesondere des Eises unter hohem Drucke. A.A.W. 1904. 35.

Siehe auch 968; 1056; 1057.

### Wellenlehre.

**292.** **H. Bateman*. The solution of partial differential equations by means of definite integrals. P.L.M.S. (2) 1. 451.

**293.** **A. Schuster*. The propagation of waves through dispersive media. B.F. 569.

**294.** **P. Forchheimer*. Wasserbewegung in Wanderwellen. A.A.W. 1903. 299.

Siehe auch 322; 1036.

### Wirbel.

**295.** *V. Bjerknes*. Über Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen. Z.S. 50. 422.

**296.** **B. Brunhes* et *J. Brunhes*. Les analogies des tourbillons athmosphériques et des tourbillons des cours d'eau et la question de la déviation des rivières vers la droite. A.G. 13. 1.

### Gleichgewicht rotierender Flüssigkeiten.

**297.** *F. Insolera*. Figure ellitiche di equilibrio di un velo piano liquido. R.C.M.P. 18. 16.

**298.** *G. H. Darwin*. The approximate determination of the form of Maclaurin's spheroid. T.S.M.Am. 4. 113.

### Reibung von Flüssigkeiten.

**299.** *A. Pochettino*. Sull' attrito interno dei liquidi isolanti in un campo elettrostatico costante. R.A.L.R. (5) 12 B. 363.

### Viskosität.

**300.** **S. Zaremba*. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 85.

**301.** **L. Natanson*. Sur l'application des équations de Lagrange dans la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 2[illegible]8.

**302.** **L. Natanson*. Sur l'approximation de certaines équations de la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 2[illegible]3.

**303.** **S. Zaremba*. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité. B.I.C. 1903. 380.

**304.** **S. Zaremba*. Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation. B.I.C. 1903. 594.

**305.** **S. Zaremba*. Uwagi o pracach profesora Natansona nad teoryą tarcia wewnętrznego. (Bemerkungen über die Arbeiten von Prof. Natanson über die Theorie der Viskosität.) C.A.C. 43. 14.

*O. Scarpa. Sulla viscosità dei
i di acqua e fenolo. N.C.P. (5)

he auch 329; 464; 465; 479.

**Aerodynamik.**

*A. Sadkiewicz. Über die Auf-
der Differentialgleichungen der
ng eines Gases (russ.). J.R.P.C.G.

*R. Mewes. Über Luftwider-
ersuche und Windmesser. Z.H.H.
50.
*A. F. Zahm. Measurement of
ocity and pressure. P.R. 17. 410.
*Samuelson. Luftwiderstand und
ge. I.A.M. 7. 220.
*G. Koch. Über den heutigen
der Flugfrage. V.P.G.B. 63. 25.
*G. Melander. Über Verdich-
er Gase an der Wand der Ge-
B.F. 789.
J. Boussinesq. Rationalité d'une
érimentale de M. Parenty pour
ment des gas par les orifices.
) 10. 79; C.R. 138. 29.
*A. Frank. Neuere Ermittelungen
ie Widerstände der Lokomotiven
hnzüge mit besonderer Berück-
ng großer Fahrgeschwindig-
M.F.I. 11. 60.
*J. Altmann. Berechnung der
ngsgeschwindigkeit, welche durch
gebene Druckdifferenz zweier be-
rter Luftschichten hervorgerufen
wenn diese Luftschichten seitlich,
nkrecht zu ihrer Trennungsebene
usweichen können. I.A.M. 7. 173.
*M. Smoluchowski. Sur les phéno-
aérodynamiques et les effets ther-
qui les accompagnent. B.I.C.
43.
*R. Börnstein. Die Abhängigkeit
ftriebs vom Barometerstand. I.A.
20.

Siehe auch 322.

**Reibung von Gasen.**

*B. Weinstein. Entropie und
Reibung. B.F. 510.

Siehe auch 485; 665a.

**Äußere Ballistik.**

*Garbasso. Balistica esterna. R.
903 Juli—Aug.
*K. Stojanovitch. Fall der Integra-
einer ballistischen Gleichung
P.A.B. 67. 190.
E. Oekinghaus. Das ballistische
Problem auf hyperbolisch-lemniska-
tischer Grundlage. M.H. 15. 11; 139.

**322.** *H. Rebenstorff. Nachweis des Luftwiderstands. Z.P. 16. 287.

**323.** *E. Coradin. Les ondes aériennes. R.G.O. 15. 182.

Siehe auch 210.

**Innere Ballistik.**

**324.** C. Cranz. Entgegnung auf den Vortrag des Herrn F. Kötter vom 24. VI. 03. S.M.B. 3. 11.

**Physiologische Mechanik.**

**325.** O. Fischer. Physiologische Mechanik. A.Gr. (3) 7. 110.

**326.** O. Fischer. Über physiologische Mechanik. D.V.M. (3) 173.

**327.** *G. Weiss. Les travaux de W. Braune et O. Fischer sur la mécanique animale. R.G.O. 14. 1205.

**Mathematische Physik im allgemeinen.**

**328.** A. Kneser. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. M.A. 58. 81.

**Differentialgleichungen der Physik.**

**329.** *S. Zaremba. Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. B.I.C. 1903. 614.

**330.** A. Kneser. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. M.A. 58. 81.

**Prinzipien der Physik.**

**331.** *W. Natanson. Z filosofii nauk przyrodniczych. O teoryach materyi (Über die Philosophie der Naturwissenschaften. Über die Theorie der Materie). P.P. 147. 165.

**332.** O. J. Lodge. Note on the probable occasional unstability of all matter. N. 68. 128.

**333.** *P. de Heen. Idées fondamentales d'un essai de théorie mécanique de l'électricité et de la chaleur. B.F. 43.

**334.** *L. C. Wolff. Neuere Ansichten zum Wesen der Elektrizität. M.P.D.B. 25. 913; 955.

**335.** *E. Grimsehl. Das Dopplersche Prinzip. Z.P. 17. 159.

**336.** *J. Larmor. On the intensity of the natural radiation from moving bodies and its mechanical reaction. B. F. 590.

Siehe auch 115; 134; 434; 759.

### Erhaltung der Energie.

**337.** **Berndt.* Das Gesetz von der Umgestaltung der Energie. D.W.B. 4. 159.

### Atomtheorie.

Siehe 353—355.

### Äther.

**338.** **R. de Saussure.* Hypsthèse sur la constitution géométrique de l'éther. A.S.G. (4) 16. 368.

**339.** *R. de Saussure.* Constitution géométrique de l'éther. A.S.G. (4) 16. 753.

**340.** **R. de Saussure.* La constitution géométrique de l'éther. R.S. (4) 21. 599.

**341.** *G. H. Bryan.* On a mechanical theory of the aether. N. 68. 600.

**342.** **D. J. Mendelejeff.* Versuch einer chemischen Auffassung des Weltäthers. P. 15. 98; 121.

Siehe auch 135; 272; 358; 359; 912; 922; 1107.

### Absolutes Maßsystem.

**343.** **A. F. Ravenshear.* Dimensional analysis of physical quantities and the correlation of units. P.P.S.L. 18. 424.

**344.** **R. J. Sowter.* Note on dimensions of physical quantities. P.P.S.L. 18. 445.

**345.** **Canter.* Elektrische Maßeinheiten. H.B. 19. 16.

**346.** **G. Giorgi.* Dimensioni e formole elettriche. A.A.E.I. 7. 7; 57.

Siehe auch 904.

### Spezifisches Gewicht.

**347.** **G. Mie.* Über eine Methode das spezifische Gewicht sehr verdünnter Lösungen zu bestimmen. B.F. 326.

Siehe auch 511; 670.

### Aggregatzustände.

**348.** *H. Hapel* en *H. Kamerlingh-Onnes.* De voorstelling van de continuiteit van den vloeibaren en gasvormigen toestand eenerzijds en de verschillende vaste aggregaattoestanden anderzijds door het entropievolume-energievlak van Gibbs. C.A.A. 12. 223.

Siehe auch 710; 711; 1111.

### Änderung des Aggregatzustandes.

**349.** **J. C. Philip.* Freezing-point for binary systems. C.N. 88. 196.

Siehe auch 348; 677; 678; 697; 714; 794; 1114; 1131.

### Molekularphysik.

**350.** **F. S. Vella.* Ultime scoperte sulla costituzione molecolare dei solidi. N.L.M. 17. 307.

**351.** **V. Spring.* Dviženie častic tverdago tela (Bewegung der Moleküle der festen Körper). R.P.W. 2. 25.

**352.** **W. Sutherland.* The principle of dynamical similarity in molecular physics. B.F. 373.

**353.** *E. Rutherford.* The existence of bodies smaller than atoms. P.T.R.S.C. (2) 8. 79.

**354.** *J. J. Thomson.* On the structure of the atom: an investigation to the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the cirumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic-structure. P.M. (6) 7. 237.

**355.** **J. Traube.* Über den Raum der Atome und Moleküle. B.F. 430.

**356.** *J. Bernstein.* Berechnung des Durchmessers der Moleküle aus kapillarelektrischen Versuchen. A.P.L. (4) 14. 172.

**357.** *A. Pannekoek.* Eenige opmerkingen over de omkeerbaarkeid von molekulaire bewegingen. C.A.A. 12. 63.

**358.** **F. Hasenöhrl.* Über die Veränderungen der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther. A.A.W. 1904. 37.

**359.** **B. P. Weinberg.* Der wahrscheinlichste Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Störungen im Äther nach den bisherigen Forschungen (russ). M.U.O. 89. 1; 91. 497.

**360.** **W. Spring.* Sur la diminution de densité qu'éprouvent certains corps à la suite d'une forte compression et sur la raison probable de ce phénomène. J.C.P. 1. 593.

**361.** **G. T. Beilby.* The hard and soft states in metals. E.C.M. 3. 806.

Siehe auch 474; 575; 707.

### Kohäsion.

Siehe 763; 878.

### Absorption.

**362.** **J. M. von Bemmelen.* Die Absorption. VIII. Z.A.C. 36. 380.

**363.** *G. N. S. Schmidt.* Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffes durch Palladium. A.P.L. (4) 13. 747.

**364.** *H. Rausch von Traubenberg.* Über die Gültigkeit des Daltonschen resp. Hen

ryschen Gesetzes bei der Absorption der Emanation des Freiburger Leitungswassers und der Radiumemanation durch verschiedene Flüssigkeiten. P.Z. 5. 130.

Siehe auch 742; 1240.

### Elastizität.

**365.** **P. Duhem.* Recherches sur l'élasticité. A.E.N. (3) 21. 99.

**366.** **L. de la Rive.* Sur une propriété de l'ellipsoide d'élasticité relative aux forces élastiques tangentielles. A.S.G. (4) 16. 388.

**367.** *M. Cantone.* Sull'influenza che può esercitare il mezzo ambiente nei fenomeni elastici. N.C.P. (5) 6. 89.

**368.** **L. Orlando.* Sopra alcuni problemi di equilibrio elastico. N.C.P. (5) 7. 161.

**369.** *O. Tedone.* Saggio di un teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. R.D.M. (3) 10. 13.

**370.** *O. Tedone.* Sul problema dell' equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito. R.A.L.R. (5) 13 A 232.

**371.** *E. Morandi.* Sopra alcuni problemi di statica elastica. A.D.M. (3) 9. 161.

**372.** *C. Somigliana.* Sull' applicazione del metodo delle imagini alle equazioni dell' elasticità. R.A.L.R. (5) 13 A 307.

**373.** *P. Duhem.* D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque. C.R. 138. 541.

**374.** **H. Lamb.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. P.R.S.L. 72. 128.

**375.** *M. Panetti.* Una risoluzione diretta del problema della sezione reagente. A.A.T. 39. 185.

**376.** **J. Morrow.* On an instrument for measuring the lateral contraction of tie-bars and on the determination of Poisson's ratio. P.P.S.L. 18. 582.

**377.** **A. E. H. Tutton.* Das Elasmometer, ein neuer Interferenz-Elastizitätsapparat. Z.K.M. 39. 321.

**378.** *F. A. Schulze.* Über eine einfache Methode zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten. S.G.M. 1903. 80; 94.

**379.** **H. Bouasse.* Sur les déformations des solides. R.G.O. 15. 115. — *P. Duhem* 217.

**380.** *L. Maurer.* Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten. A.Gr. (3) 6. 260.

**381.** **F. Foster.* Repetition of stress. M.E. 10. 704; 740.

**382.** *H. T. Bovey.* On the stresses developed in beams loaded transversely. P.T.R.S.C. (2) 8. 3.

**383.** *F. Foster.* On phenomena due to repetitions of stress and on a new testing machine. S.P.M. 48. No. 7.

**384.** *M. T. Huber.* Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. A.P.L. (4) 14. 153.

**385.** *C. S. Jackson.* A contrivance for shewing bending moment diagrams. M.G.S. 2. 360.

**386.** *A. E. H. Love.* Note on the relation between the bending moment and the curvature of a beam loaded uniformly. Q.J. 34. 378.

**387.** *L. N. G. Filon.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular crosssection under any system of load. P.R.S.L. 72. 391; T.R.S.L. 201 A 63.

**388.** *F. Purser.* On the application of Bessels function to the elastic equilibrium of a homogeneous isotropic cylinder. T.R.I.A. 32.

**389.** *L. Prandtl.* Zur Torsion von prismatischen Stäben. P.Z. 4. 758.

**390.** **K. E. Guthe.* Fibers resembling fused quartz in their elastic properties. P.R. 18. 256.

**391.** **F. Beaulard.* Sur les propriétés élastiques des fils de soie et le coefficient de Poisson. J.P. (4) 2. 785.

**392.** **Cantone.* Sul coefficiente di Poisson per il cauciu. N.C.P. (5) 6. 91.

**393.** **C. E. Guillaume.* Propriétés élastiques des aciers au nickel. J.P. (4) 3. 268.

**394.** *P. Galy-Ache.* Recherches sur les propiétés mécaniques et physiques du cuivre. A.C.P. (7) 30. 326.

**395.** *J. Petzval.* Theorie der Störungen der Stützlinien. Z.S. 50. 288; 345.

**396.** **Landmann.* Ein Beitrag zur Ermittlung der Randspannungen in Fabrikschornsteinen. B.M.B. 1. 131.

Siehe auch 103; 244; 245; 912; 1030; 1154; 1161; 1256; 1259; 1269.

### Photoelastizität.

**397.** **W. König.* Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. B.F. 832.

**398.** **K. E. Guthe.* Fibers resembling fused quartz in their elastic properties. P.R. 18. 256.

Siehe auch 609; 610.

### Thermoelastizität.

**399.** **A. Wassmuth.* Über die Bestimmung der thermischen Änderungen

der Elastizitätskonstanten isotroper Körper aus den Temperaturänderungen bei der Drillung und der gleichförmigen Biegung. B.F. 555.

**400.** *A. Wassmuth.* Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung. A.P.L. (4) 13. 182.

**401.** **C. Cario.* Wärmedehnungen in den Kesselwandungen. M.P.D.B. 24. 127. — *G. Leipold* 190. — *E. Fränkel* 502.

### Elektroelastizität.

**402.** *W. Sutherland.* The electric origin of rigidity and consequences. P.M. (6) 7. 417.

**403.** **G. P. Grimaldi* e *G. Accolla.* Influenza dell' onde elettriche e del magnetismo sull' isteresi elastica del ferro. N.C.P. (5) 7. 204.

### Magnetoelastizität.

**404.** *H. Gerdien.* Über den Einfluß der Torsion auf das magnetische Moment zirkular magnetisierter Ni- und Fe-drähte. A.P.L. (4) 14. 51.

**405.** **H. Nagaoka.* Mechanische Analogien der Beziehungen zwischen Torsion und Magnetismus. B.F. 916.

**406.** *C. Chree.* The bending of magnetometer deflexion-bars. P.M. (6) 7. 39.

**407.** *W. E. Williams.* The influence of stress and of temperature on the magnetic change of resistance in iron, nickel and nickel-steel. P.M. (6) 6. 693.

Siehe auch 403; 906.

### Festigkeitslehre.

**408.** **Diegel.* Der Einfluß von Ungleichmäßigkeiten im Querschnitte des prismatischen Teiles eines Probestabes auf die Ergebnisse der Zugprüfung. M.F.I. 13. 59.

**409.** **P. Reusch.* Einfluß der Form und Herstellungsweise von gußeisernen Probestäben auf deren Festigkeit. S.U.E. 23. 1185.

**410.** **K. G. Mehldahl.* Einfluß der Stegdicke auf die Tragfähigkeit eines [-balkens. J.S.G.B. 4. 406.

**411.** **J. H. Bauer.* Die Festigkeit der Zylinder von Gußgasmotoren. G.M.T. 3. 85; 109.

**412.** **R. Wagner.* Die Festigkeit der Zylinderköpfe von Großgasmotoren. G.M.T. 3. 2; 34; 45; 57.

**413.** **F. Wüst* u. *P. Goerens.* Zusammensetzung und Festigkeitseigenschaften des Dampfzylindergusses. S.U.E. 23. 1072.

**414.** **R. Stribeck.* Der Warmzerreißversuch von langer Dauer. Das Verhalten von Kupfer. M.F.I. 13. 81.

**415.** **J. L. Hall.* Effect of superheated steam upon the tensile strength of alloys. M.G. 6. 3.

**416.** **G. Lung.* Zur Festigkeit des Schornsteinmörtels. M.P.D.B. 25. 195; 216; 234; 253; 268; 286; 306; 323; 342.

**417.** *A. Pourcel.* Sur les propriétés du betton fretté. C.R. 138. 72.

**418.** — Estudios experimentales sobre el cemento armado. A.S.A. 56. 75.

**419.** **W. P. Bradley* and *A. W. Bourne.* The resistance of glass tubing to bursting pressure. J.P.C. 8. 37.

**420.** *A. Pérot* et *H. M. Lévy.* Sur la fragilité des métaux. C.R. 138. 474.

**421.** *H. Sellentin.* Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche. Z.S. 49. 450.

**422.** **Jahr.* Über die statische Berechnung von Fabrikschornsteinen. K.B. 19. 582; 607; 635.

Siehe auch 185.

### Kristallbildung.

**423.** **P. Gaubert.* Contribution de la formation et de l'accroissement des cristaux. B.S.M.F. 25. 223.

Siehe auch 1113.

### Kristallstruktur.

**424.** **R. Wegscheider.* Über die Größe der Kristallmoleküle. B.F. 367.

**425.** **W. H. Wahl.* The Goldschmidt theory of harmony. J.F.I. 156. 225. — *J. W. Richards* 230.

Siehe auch 897; 898.

### Kristalloptik.

**426.** **E. Kobald.* Über die allgemeinen Differentialgleichungen der Kristalloptik nach der elektromagnetischen Theorie des Lichtes. B.F. 422.

**427.** *W. Voigt.* Zur Theorie des Lichtes für aktive Kristalle. N.G.G. 1903. 155.

**428.** *C. Chabrier.* Sur la fonction qui représente le grossissement des objets vus à travers un cône de cristal. C.R. 138. 349.

**429.** **A. W. Conway.* The propagation of light in a uniaxal crystal. P.L.M.S. 35. 220.

**430.** **E. G. A. ten Siethoff.* Beitrag zur Kristalluntersuchung im konvergenten polarisierten Lichte. Z.F.M. 1903. 657.

**431.** *W. Voigt.* Über spezifische op-

tische Eigenschaften hemimorpher Kristalle. N.G.G. 1903. 186.

**432.** *O. Bütschli.* Beobachtungen über eigentümliche Sprungsysteme von großer geometrischer Regelmäßigkeit. V.G.H. (2) 7. 653.

**433.** **L. Graetz.* Über die elektrische Dispersion der Kristalle. B.F. 477.

### Ätherschwingungen.

**434.** **N. N. Siller.* Zametka o zakone Dopplera. (Bemerkung über das Dopplersche Gesetz.) R.P.W. 2. 183.

### Ätherwellen.

**435.** *A. E. H. Love.* The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium. P.L.M.S. (2) 1. 291.

**436.** **A. E. H. Love.* Wave-motions with discontinuities at wave-fronts; P.L.M.S. (2) 1. 37.

Siehe auch 274.

### Strahlen.

**437.** **R. Blondlot.* Recherches sur les rayons *n*. J.P. (4) 3. 121; 257.

**438.** **N. Hesehus.* Thermische Wirkungen der Radiumstrahlen (russ.). J.R.P.C.G. 35. 525.

**439.** **F. Sanford.* On an undescribed form of radiation. P.R. 17. 441.

Siehe auch 336; 450.

### Röntgenstrahlen.

**440.** *W. Wien.* Über die Energie der Röntgenstrahlen. P.Z. 5. 128.

**441.** *P. Hertz.* Über Energie und Impuls der Röntgenstrahlen. P.Z. 4. 848.

**442.** *C. G. Barkla.* Energy of secondary Roentgen radiation. P.M. (6) 7. 543.

**443.** *H. Haga, P. G. Tiddens* et *C. H. Wind.* La diffraction des rayons de Roentgen. A.N. (2) 8. 412.

**444.** **P. Cardani.* Sulla dispersione elettrica dei raggi X ottenuti mediante le scariche dei condensatori. B.F. 501.

**445.** **J. Zeleny.* On electrifications produced by gases that have been exposed to Roentgen rays. P.R. 17. 355.

**446.** **A. Righi.* Sulle cariche elettriche generate dai raggi $x$ sui metalli nel vuoto. N.C.P. (5) 6. 31; M.I.B. (5) 10. 595.

Siehe auch 447; 901.

### Kathodenstrahlen.

**447.** **J. Dronke.* Kathoden- und Röntgenstrahlen. N.F.W. 1. 189.

**448.** **F. Neesen.* Über die Frage der Beeinflussung von Kathodenstrahlen. V.P.G. 5. 296.

**449.** **F. Neesen.* Über die Frage der gegenseitigen Einwirkung von Kathodenstrahlen. B.F. 742.

**450.** *F. Leininger.* On the relation of the electric charges transported by cathode and canal rays to the exciting current. P.M. (6) 7. 180.

**451.** **E. Warburg.* Über den Durchgang der Kathodenstrahlen durch Metalle. V.P.G. 6. 9.

Siehe auch 576; 579.

### Becquerelstrahlen.

**452.** **A. Korolkow.* Die Ablenkung der Becquerelstrahlen im Magnetfelde (russ.). J.R.P.C.G. 35. 453.

### Radioaktivität.

**453.** **E. A. Partridge* and *R. H. Bradbury.* Radio-activity. J.F.I. 156. 321.

**454.** **P. Curie.* Revue de recherches récentes sur la radioactivité. J.CP. 1. 408.

**455.** *P. Curie.* Neuere Untersuchungen über Radioaktivität. P.Z. 5. 281.

**456.** *S. Curie.* Recherches sur les substances radioactives. A.C.P. (7) 30. 289.

**457.** *R. J. Strutt.* Energy emitted by radio-active bodies. N. 68. 6.

**458.** *J. A. Mc Clelland.* On the emanation given off by Radium. P.M. (6) 7. 355.

**459.** *P. Curie* et *J. Danne.* Sur la disparition de la radioactivité induite par le radium sur les corps solides. C.R. 138. 683.

**460.** **H. Becquerel.* Recherches sur une propriété nouvelle de la matière, activité radiante spontanée ou radioactivité de la matière. M.A.P. 46. 1.

**461.** *J. Elster* u. *H. Geitel.* Über die radioaktive Substanz, deren Emanation in der Bodenluft und der Atmosphäre enthalten ist. P.Z. 5. 11.

**462.** **N. Beketow.* Die chemische Energie im Zusammenhange mit den Erscheinungen, welche das Radium darstellt (russ.). J.R.P.C.G. 35. 189.

**463.** **H. Benndorf* u. *V. Konrad.* Über Radiumkollektoren. B.F. 693.

Siehe auch 257; 364; 438; 567; 568; 633; 653.

### Kapillarität.

**464.** *K. Schütt.* Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen. A.P.L. (4) 13. 713.

**465.** **L. Grunmach.* Über den Einfluß der Zähigkeit auf die Kapillaritätskonstanten bei Essigsäure-Wassermischungen. B.F. 460.

**466.** *B. Kučera.* Beitrag zur Kalibrierung sehr enger Kapillaren und zur Messung der Oberflächenspannung mittels der Tropfenwägung (tchech.). M.A.T.P. 1903 Nr. 40.

**467.** **H. Devaux.* Sur l'épaisseur critique des solides et des liquides reduits en lames très minces. J.P. (4) 3. 450.

**468.** **G. J. Parks.* On the thickness of the liquid film formed by condensation at the surface of a solid. P.P.S.L. 18. 410.

**469.** *A. Ponsot.* Les facteurs de l'équilibre; pression capillaire et pesanteur. C.R. 138. 803.

**470.** **S. Skinner.* On the occurrence of cavitation in lubrication. P.P.S.L. 19. 73.

**471.** **L. W. Winkler.* Die Meniskuskorrektionswerte des Hg und des Wassers. Z.F.A.C. 16. 718.

**472.** **H. W. Hillger.* Eine Studie an Seifenlösungen. J.A.C.S. 25. 524.

**473.** *E. Varenne* et *L. Godefroy.* Sur les applications du chronostiloscope E. Varenne. C.R. 138. 79.

Siehe auch 158; 1200.

### Oberflächenspannung.

**474.** **I. Homfray* et *P. A. Guye.* Tensions superficielles et complexité moléculaire des corps actifs homologues. J.C.P. 1. 505.

**475.** **A. Roujou.* De la tension des surfaces chez quelques solides. R.S.B. 14. 45.

**476.** *G. Guglielmo.* Sulla determinazione della tensione superficiale dei liquidi coi metodi delle goccie cadenti e delle bolle gazose. R.A.L.R. (5) 12 B. 462.

**477.** **D. Pekár.* Oldatok molekuláris felületienergiájáról (Über die Oberflächenenergie der Lösungen). M.T.E. 19. 210.

Siehe auch 466.

### Diffusion.

**478.** *S. Nakamura.* On the diffusion of liquids. J.U.T. 19 Nr. 8.

**479.** *J. Thovert.* Relation entre la diffusion et la viscosité. C.R. 138. 481.

**480.** *F. Heimbrodt.* Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Konzentration, bestimmt mit Hilfe gekrümmter Lichtstrahlen. A.P.L. (4) 13. 1028.

**481.** **H. G. Morse* and *G. W. Pierce.* Diffusion and supersaturation in gelatine. P.R. 17. 129.

Siehe auch 688.

### Osmose.

**482.** *A. Guillemin.* Sur l'osmose. C.R. 138. 38; 802. — *A. Ponsot* 356.

**483.** **M. Smoluchowski.* Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs. B.I.C. 1903. 182.

**484.** **O. E. Schiötz.* Über die Abhängigkeit des osmotischen Druckes und der Dampfspannung von dem Drucke. B.F. 618.

### Thermokapillarität.

**485.** *A. Bestelmeyer.* Die Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur. A.P.L. (4) 13. 944.

### Elektrokapillarität.

**486.** **J. Billitzer.* Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen. A.A.W. 1903. 301; 1904. 91.

**487.** *F. Krüger.* Zur Theorie der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden. N.G.G. 1904. 33.

**488.** **G. Vanni.* Sopra un' applicazione dell' elettrometro capillare di Lippmann alla misura della frequenza di una corrente alternata. B.S.N.N 16—17.

Siehe auch 688.

### Akustik.

**489.** **A. G. Webster.* On the mechanical efficiency of the production of sound. B.F. 866.

**490.** **T. C. Porter.* On a method of mechanically reinforcing sounds P.P.S.L. 19. 31.

**491.** **G. Zambian.* Le figure di Lissajous nell' estetica dei suoni. R.M.I. 10.

**492.** **L. U. H. C. Werndly.* Äquisonore Flächen rings um eine ertönende Stimmgabel. A.F.G.P. 1904. 297.

**493.** **G. Jäger.* Zur Theorie der Exner-Pollakschen Versuche. A.A.W. 1904. 39.

**494.** **R. v. Sterneck.* Beweis eines in der Akustik verwendbaren Satzes. B.F. 687.

**495.** *R. Hartmann-Kempf.* Über den Resonanzverlauf erzwungener Schwingungen. A.P.L. (4) 13. 271.

**496.** **A. H. Taylor.* Resonance in aërial systems. P.R. 18. 230.

**497.** *C. Krediet.* Sur un cas de propagation de vibrations sonores, infinilment petites. N.A.W. (2) 6. 81.
**498.** **R. Malagoli.* Composizione parallela del moto vibratorio col moto progressivo applicata all' esame dei corpi sonori. N.C.P. (5) 6. 193.
**499.** *P. Ostmann.* Über Schwingungszahlen und Schwellenwerte. S. G.M. 1903. 11.
**500.** **A. Florentino.* Proprietà microfoniche dei getti gassosi. N.C.P.(5)5.391.
**501.** **Q. Majorana.* Su di una proprietà acustica delle fiamme manometriche. N.C.P. (5) 7. 35.
**502.** **R. Wachsmuth.* Schneidentöne und Labialpfeifen. V.P.G. 5. 299.
**503.** *R. Hartmann-Kempf.* Über den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfederbändern. A.P.L. (4) 13. 124.
**504.** *P. Ostmann.* Über die Anwendung des objektiven Hörmaßes. P.Z. 4. 764.

### Elektroakustik.

**505.** **S. Maisel.* Über den singenden Voltabogen (russ.). E.P. 1903. 167.

### Magnetoakustik.

**506.** **S. Meyer.* Über Magnetisierung durch Tonerregung. B.F. 68.
**507.** **A.* u. *L. Weinhold.* Ein akustisches Analogon zum Zeemannschen Phänomen. Z. P. 17. 92.

### Akustische Messungen.

**508.** *F. A. Schulze.* Über die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren. S.G.M. 1903. 89; A.P.L. (4) 13. 1060.
**509.** **H. Lamb.* On group velocity. P.L.M.S. (2) 1. 473.
**510.** **W. Altberg.* Über den Druck der Schallwellen und die absolute Messung der Schallstärke (russ.). J.R.P.C.G. 35. 459.
**511.** **R. Wachsmuth.* Akustische Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen. B.F. 923.

### Mathematische Musik.

**512.** **P. Czermak.* Zur Demonstration der Klanganalyse. B.F. 80.
**513.** **J. W. Richards.* The Goldschmidt theory of harmony. J.F.I. 156. 301.
**514.** *G. Eneström.* Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. B.M. (3) 4. 344.

### Geometrische Optik.

**515.** **R. Halben.* Gleichzeitige Demonstration von Totalreflexion und Lichtstrahlenkrümmung. Z.P. 16. 281.
**516.** **Muirhead.* Divergence in optics. P.P.S.G. 34
**517.** **A. Gleichen.* Über die optisch bemerkenswerten Punkte der Kugelfläche, insbesondere über die komafreien Punkte. D.M. 12. 85; 98.
**518.** **L. Matthiessen.* Aplanatische Brechung und Spiegelung in $F_2$. A.F. G.P. 91. 295.
**519.** **Patrizi.* Sistemi diottrici e catottrici di projezione. Pol.M. 1903 Mai—Juli.
**520.** *S. D. Chalmers.* The theory of symmetrical optical objectives. P.R.S.L. 72. 267.
**521.** **F. Hasenöhrl.* Über die Reziprozität des Strahlenganges in bewegten Körpern. Thermodynamische Ableitung des Fresnelschen Fortführungskoeffizienten. A.A.W. 1904. 135.

Siehe auch 480.

### Katoptrik.

**522.** **C. K. Edmonds.* The metallic reflection of selenium. P.R. 18. 193.

Siehe auch 600; 646; 1211.

### Dioptrik.

**523.** *A. Emch.* The theory of optical squares. M.M.F. 10. 32.
**524.** *C. Maltézos.* L'équation du prisme optique. E.M. 5. 454.
**525.** *T. L. Bennett.* Minimum deviation through a prisma. P.M. (6) 6. 697.
**526.** **A. Whitwell.* On refraction at a cylindrical surface. P.P.S.L. 18. 488.
**527.** **T. Dokulid.* Die Bestimmung der optischen Konstanten eines zentrierten sphärischen Systems mit dem Präzisionsfokometer. D.M. 12. 37. — *A. Schell* S.A.W. 112. 1057.
**528.** **N. Jadanza.* Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di telobbiettivo. M.A.T. (2) 53. 72.
**529.** *S. Trocevič.* Nekotoryja zamečanija po povodu vyčislenija obektivov i voobšče optičeskich sistem (Einige Bemerkungen über die Grundlage der Berechnung der Objektive und der optischen Systeme überhaupt). M.P.O. 30. 226.
**530.** **G. W. Walker.* On the theory of refraction in gases. P.R.S.L. 72. 24.

Siehe auch 428; 647; 1208; 1209.

### Linsen.

**531.** **J. D. Everett.* On skew refraction through a lens. P.R.S.L. 71. 509.

**532.** **T. H. Blakesley.* Exhibition of a lens. P.P.SL. 18. 423.

**533.** **T. H. Blakesley.* Single piece lenses. P.P.S.L. 18. 591.

**534.** **C. Féry.* Méthode nouvelle pour la détermination des constantes des lentilles. J.P. (4) 2. 755.

**535.** **T. R. Dallmeyer.* Über telephotographische Linsen und ein neues System (Adon) zur Erzielung von Vergrößerung ohne Geschwindigkeitsverlust. D.M. 11. 205.

**536.** **A. Köhler.* Lichtstarkes Sammellinsensystem für Mikroprojektion. Z.W.M. 19. 1417.

### Brennlinien.

**537.** *T. J. I' A. Bromwich.* The caustic by reflexion of a circle. A.J.M. 26. 33.

### Physikalische Optik.

**538.** **F. Becke.* Optische Untersuchungsmethoden. A.A.W. 1903. 268.

**539.** *P. Drude.* Zur Theorie des Lichtes für aktive Körper. N.G.G. 1904. 1.

**540.** **W. Wien.* Theorie eines bewegten leuchtenden Punktes. B.F. 174.

**541.** *F. Pockels.* Zur Frage der „optischen Resonanz" fein zerteilter Metalle. P.Z. 5. 152.

**542.** **I. I. Kossonogoff.* Optische Resonanz als Ursache der selektiven Reflexion und Absorption des Lichts. B.U.K. 1904 b No. 2, 4.

**543.** *I. I. Kossonogov.* Die optische Resonanz (russ). B.U.K.C. 6.

**544.** *J. Kossonogoff.* Über mögliche Größe der optischen Resonatoren. B.F. 882.

**545.** *F. Kirchner.* Über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen. A.P.L. (4) 13. 239.

**546.** **A. W. Roberts.* A consideration of close binary systemes in relation to light variation. R.S.A.A. 1. 110.

**547.** *A. Schuster.* A simple explanation of Talbots bands. P.M. (6) 7. 1.

Siehe auch 734.

### Lichtwellen.

**548.** **G. Sagnac.* Lois de la propagation anomale des ondes au voisinage d'un foyer. B.F. 528.

**549.** **E. Mathy.* Entrainement partiel des ondes lumineuses; termes complémentaires à ajouter aux équations de Hertz pour expliquer ce phénomène. J.P. (4) 3. 316.

**550.** **H. O. G. Ellinger.* Bestimmung der Wellenlänge des Lichtes. Z.P. 16. 280.

**551.** **J. Hartmann.* Eine Revision des Rowlandschen Wellenlängensystems. Z.W.P. 1. 215.

**552.** **J. Hartmann.* A revision of Rowlands system of wave-lengths. A.J.C. 18. 167.

**553.** **L. Bell.* The Perot-Fabry corrections of Rowlands wave-lengths. A.J.C. 18. 191.

**554.** *C. Fabry* and *A. Perot.* On the corrections to Rowlands wave-lengths. A.J.C. 19. 119.

**555.** **R. W. Wood.* The electrical resonance of metal particles for light-waves. III. P.P.L.S. 18. 515.

Siehe auch 606.

### Dispersion.

**556.** *G. Sagnac.* De la propagation anomale des ondes. J.P. (4) 2. 721.

**557.** *O. Lummer* u. *E. Pringsheim.* Demonstration der anomalen Dispersion in Gasen. V.P.G. 6. 151.

**558.** **H. Ebert.* Wirkung der anomalen Dispersion von Metalldämpfen. B.F. 448.

**559.** *R. W. Wood.* The anomalous dispersion, absorption and surface colour of nitroso-di methyl-aniline. P.A.Bo. 39. 51.

Siehe auch 433; 444; 640; 991; 993; 995; 1214.

### Farben.

**560.** **E. v. Oppolzer.* Grundzüge einer Farbentheorie. Z.P.P. 33. 325.

**561.** *O. v. u. z. Aufsess.* Die Farbe der Seen. A.P.L. (4) 13. 678.

Siehe auch 559; 650; 651; 1217; 1258.

### Spektrum.

**562.** *R. A. Houstoun.* Some spectroscopic notes. P.M. (6) 7. 456.

**563.** **A. Fowler* and *H. Shaw.* On formulae for spectrum series. A.J.C. 18. 21.

**564.** *I. H. Havelock.* On the continnuous spectrum. P.C.P.S. 12. 175.

**565.** *J. Barnes.* On the analysis of bright spectrum liees. P.M. (6) 7. 485.

**566.** **J. Fényi.* Michelsons theory of the displacement of spectral lines. A.J.C. 19. 70.

**567.** *H. Nagaoka.* Kinetics of a system of particles illustrating the line and the

band spectrum and the phenomena of radioactivity. P.M.(6) 7. 445.

**568.** *H. Nagaoka, G. A. Schott.* On dynamical system illustrating the spectrum lines and the phenomena of radioactivity. N. 69. 392; 437.

**569.** *H. Deslandres.* Loi générale de distribution des raies dans les spectres de bandes. Vérification précise avec le 2. groupe de bandes de l'azote. C.R. 138. 317.

**570.** **K. Ångström.* Energy in the visible spectrum of the Hefner standard. P.R. 17. 302.

**571.** *A. Schuster.* A simple explanation of Talbots bands. P.M. (6) 7. 1.

**572.** **E. Wiedemann.* Über Verbindungsspectren. B.F. 826.

**573.** **H. Konen.* Neuere Arbeiten über Funkenspektra. Z.W.P. 1. 237.

Siehe auch 584; 596; 991; 1222.

### Ultrarote Strahlen.

**574.** *M. Iklé.* Über das ultrarote Absorptionsspektrum einiger organischer Flüssigkeiten. P.Z. 5. 271.

### Ultraviolette Strahlen.

**575.** **R. Magini.* Dipendenza degli spettri ultravioletti di assorbimento dalla configurazione moleculare. N.C.P. (5) 6. 62; 343.

Siehe auch 595; 1223.

### Absorption des Lichtes.

**576.** **P. Lenard.* Über die Absorption von Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit. N.R. 18. 661.

**577.** *F. Grünbaum.* Absorptionsmessungen an wässrigen Farbstofflösungen. A.P.L. (4) 12. 1004.

Siehe auch 542; 559; 574; 575; 601; 632.

### Lumineszenz.

**578.** **E. L. Nichols* and *E. Merritt.* Studies in luminescence. P.R. 18. 355; 403.

Siehe auch 619; 620.

### Phosphoreszenz.

**579.** **A. Wehnelt.* Über die Phosphoreszenzerzeugung durch langsame Kathodenstrahlen. V.P.G. 5. 423.

Siehe auch 581.

### Fluoreszenz.

**580.** *R. Meyer.* Fluoreszenz und mechanische Konstitution. D.V.N. 75. 78; C.B. 36. 2967; N.R. 19. 171.

**581.** **W. S. Andrews.* Notes on fluorescence and phosphorescence. S. (2) 19. 435.

### Interferenz.

**582.** *J. Classen.* Fresnelsche Interferenzen an 2 planparallelen Platten als Vorlesungsversuch. D.V.N. 75. 40; V. P.G. 5. 297.

**583.** *M. Laue.* Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten. A.P.L. (4) 13. 163.

**584.** **A. Perot* et *C. Fabry.* Sur la séparation des raies spectrales très voisines à propos d'un travail récent de M. M. Lummer et Gehrcke. J.P. (4) 3. 28.

**585.** *W. Feußner.* Über ein Verfahren zur Dickenbestimmung keilförmiger Schichten durch Interferenzstreifen. S. G.M. 1903. 76.

**586.** *A. Perot* et *C. Fabry.* Sur la mesure optique de la différence de deux épaisseurs. C.R. 138. 676.

**587.** *Mesnager.* Sur un procédé pour la comparaison des épaisseurs. C.R. 138. 76.

**588.** *J. Macé de Lépinary* et *H. Buisson.* Sur une nouvelle méthode de mesure des épaisseurs et des indices. C.R. 137. 1038.

Siehe auch 591; 598.

### Diffraktion.

**589.** **F. Maey.* Die Theorie der Beugungserscheinungen des Lichtes nach Thomas Young, ihre Geschichte und Verwertung zu einer schulgemäßen Behandlung der Lichtbeugung. Z.P. 17. 10.

**590.** **P. H. Jackson.* On the diffraction of light produced by an opaque prisme of finite angle. P.L.M.S. (2) 1. 393.

**591.** *M. Laue.* Über eine Beugungserscheinung, welche bei den Interferenzen an planparallelen Platten auftritt. Z. S. 50. 280.

**592.** **F. Balsamo.* Su i fenomeni di diffrazione di alcuni corpi organizzati in rapporto alle esperienze di Abbe. B.S. N.N. 16—17.

**593.** **C. Barus.* Periodic colour distributions in relation to the coronas of cloudy condensation with a revision of coronas. B.F. 204.

**594.** *G. Quincke.* Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc. A.P.L. (4) 13. 217.

**595.** **R. Magini.* Sull' uso del reticolo di diffrazione nello studio del spettro ultravioletto. P.I.F.P. 6. 207.

**596.** *T. Lyman.* An explanation of the false spectra from diffraction gratings. P.A.Bo. 39. 39.

**597.** * *A. v. Obermayer.* Über sogenannte Heiligenscheine und andere gleichen Ursachen entspringende Erscheinungen. B.F. 299.

Siehe auch 443.

### Polarisation des Lichtes.

**598.** * *E. Mach.* Objektive Darstellung der Interferenz des polarisierten Lichtes. B.F. 441.

**599.** * *D. B. Brace.* A half-shade elliptical polarizer and compensator. P. R. 18. 70.

**600.** *E. Lischner.* Über die elliptische Polarisation des Lichtes bei der Reflexion an Lösungen von Körpern mit Oberflächenfarben. A P.L. (4) 12. 964.

**601.** *F. J. Bates.* Über Versuchsfehler beim Messen der Rotationspolarisation absorbierender Substanzen. A.P.L. (4) 12. 1080.

**602.** * *J. Macé de Lépinay* et *H. Buisson.* Sur les changements de phase par réflexion normale dans le quartz sur l'argent. J.P. (4) 2. 881.

Siehe auch 430; 646; 655; 1216.

### Drehung der Polarisationsebene.

**603.** * *A. Panormoff.* Über die Bestimmung der spezifischen Drehung nach der Methode von Kanonnikoff (russ). J. R.P.C.G. 35. 678.

**604.** *E. Roux.* Sur la polyrotation des sucres. A.C.P. (7) 30. 422; J.P. (4) 2. 903.

Siehe auch 627—630.

### Doppelbrechung.

**605.** * *F. Záviška.* Verifikation der Fresnelschen Gesetze der Doppelbrechung bei zweiachsigen Kristallen. (tschech.) M.A.T.P. 1902 No. 26.

**606.** * *J. Grünwald.* Über die Ausbreitung der Wellenbewegungen in optisch 2-achsigen elastischen Medien. B.F. 518.

**607.** *D. B. Brace.* On double refraction in matter moving through the Aether. P. M. (6) 7. 317; B.F. 576.

**608.** *L. N. G. Filon.* On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 12. 313.

**609.** *A. Leick.* Über künstliche Doppelbrechung und Elastizität von Gelatineplatten. A.P.L. (4) 14. 139.

**610.** * *W. König.* Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. B.F. 832.

Siehe auch 186; 288; 397; 631.

### Brechungsindex.

**611.** *W. Kaiser.* Über die Beziehungen zwischen Druck und Brechungsexponent der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre. A.P.L. (4) 13. 210.

**612.** *L. Magri.* Relazione fra l'indice di rifrazione et la densità de l'aria. R. A.L.R. (5) 13A 473; N.C.P. (5) 7. 81.

Siehe auch 1215.

### Thermooptik.

Siehe 521; 645.

### Elektrooptik.

**613.** * *I. Borgmann.* Licht und Elektrizität. P. 14. 348; 362.

**614.** * *J. Dronke.* Licht und Elektrizität. N.F.W. 2. 77; 83.

**615.** *E. Biša* u. *R. Svinžedau.* Aktinoelektričeski javlenija (Über die aktinoelektrischen Erscheinungen). R.P.W. 2. 293.

**616.** *H. Rubens.* Die optischen und elektrischen Eigenschaften der Metalle. P.Z. 4. 727.

**617.** *E. Hagen* and *H. Rubens.* On some relations between the optical and the electrical qualities of metals. P.M. (6) 7. 157.

**618.** * *A. Bartole.* Su la trasformazione in correnti ellettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento. N.C.P. (5) 6. 240.

**619.** *J. Borgmann.* Ein besonderer Fall des Leuchtens von verdünntem Gase in einem breiten Glasrohr. B.F. 76.

**620.** * *E. R. Drew.* The luminous efficiency of vacuum tube radiation. P.R. 17. 321.

Siehe auch 433; 444.

### Elektrisches Licht.

**621.** * *C. O. Steinmetz.* The mercury arc. E.W. 41. 316.

**622.** * *A. Larsen.* Die Abhängigkeit des elektrischen Bogenlichtes von der Stromstärke und der Spannung. M.F.L. 2. 118.

**623.** * *W. B. v. Czudnochowski.* Über den elektrischen Lichtbogen zwischen Leitern 2. Klasse. P.Z. 5. 99.

**624.** *W. Hallwachs.* Über die Strahlung des Lichtbogens. A.P.L. (4) 13. 38.

Siehe auch 505.

### Magnetoptik.

**625.** * *C. Gutton.* Action des champs magnétiques sur les sources lumineuses peu intenses. J.P. (4) 3. 341.

**626.** **J. Mills.* On the velocity of light in a magnetic field. P.R. 18. 65.
**627.** **A. Borel.* Sur la polarisation rotatoire magnétique du quartz. A.S.G. (4) 16. 24; 157.
**628.** **L. H. Siertsema.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene in verflüssigten Gasen unter athmosphärischem Druck. C.P.L. 90.
**629.** **L. H. Siertsema.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene in verflüssigten Gasen unter atmosphärischem Druck. B.F. 780.
**630.** **O. M. Corbino.* La rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell' interno di una riga d'assorbimento. N.C.P. (5) 6. 55.
**631.** **A. W. Ewell.* Magnetic double refraction. P.R. 17. 292.
**632.** **O. M. Corbino.* Sull' ineguale assorbimento delle vibrazioni circolari inverse per il passagio attraverso a un vapore incandescente in un campo magnetico. N.C.P. (5) 6. 58.
**633.** *C. Runge* u. *J. Precht.* Über die magnetische Zerlegung der Radiumlinien. S.A.B. 1904. 417.

Siehe auch 452.

### Zeemansches Phänomen.

**634.** **G. Jäger.* Über das Zeeman Phänomen. V.V.F.U.W. 8. 154.
**635.** **P. A. Zilov.* Javlenia Zeemana (Zeemannsches Phänomen). R.P.W. 2. 284.
**636.** **G. Jäger.* Das Zeemann-Phänomen. S.V.N.W. 43.

Siehe auch 507.

### Elektromagnetische Lichttheorie.

**637.** **P. A. Zilov.* Elektromagnitnaja teorija sveta (Elektromagnetische Lichttheorie). R.P.W. 2. 60.
**638.** *A. Garbasso.* Teoria elettromagnetica dell' emissione della luce. M.A.T. (2) 53. 127.
**639.** *H. A. Lorentz.* Elektromagnetische verschijnselen in een stelsel dat zich met willekeurige snelheid kleiner dan die van het licht beweegt. C.A.A. 12. 986.
**640.** *M. Planck.* Über die Extinktion des Lichtes in einem optisch homogenen Medium von normaler Dispersion. S.A.B. 1904. 740.

Siehe auch 426.

### Lichtgeschwindigkeit.

**641.** **A. Cornu.* Skorost sveta (Über die Lichtgeschwindigkeit). R.P.W. 2. 140.
**642.** **T. E. Doubt.* The effect of the intensity upon the velocity of light. P.R. 18. 129.

Siehe auch 639; 866.

### Photometrie.

**643.** **C. Camichael.* Sur la spectrophotométrie photographique. J.P. (4) 2. 899.
**644.** **C. Cesari* e *C. Manicardi.* Ricerche di fotometria fotografica. R.T.E.B. 1901. 69.
**645.** *E. Rasch.* Die gesetzmäßige Abhängigkeit der photometrischen Gesamthelligkeit von der Temperatur leuchtender Körper. A.P.L. (4) 14. 193.
**646.** **F. Záviška.* Über die Polarisation von Grenzlinien der Totalreflexion (tschech). M.A.T.P. 1903. No. 15.

Siehe auch 996; 1221—23.

### Physiologische Optik.

**647.** **L. Mathiessen.* Hornhautrefraktion. A.F.G.P. 91. 295.
**648.** *F. Hillebrand.* Theorie der scheinbaren Größe bei binokularem Sehen. D.A.W. 72. 255.
**649.** *A. Broca* et *D. Sulzer.* La sensation lumineuse en fonction du temps pour les lumières coloriées. Discussion des résultats. C.R. 137. 1046.
**650.** **E. v. Oppolzer.* Grundzüge einer Farbentheorie II. Z.P.P. 33. 321.
**651.** **F. Allen.* The hypotheses of colour vision. P.R. 17. 151.

Siehe auch 1230.

### Wärmelehre.

**652.** *E. Rogovsky.* Sur la différence de la température des corps en contact. C.R. 137. 1244.
**653.** *E. Rutherford* and *H. T. Barnes.* Heating effect of the radium emanation. P.M. (6) 7. 202.
**654.** *J. Boussinesq.* Sur l'unicité de la solution simple fondamentale et de l'expression asymptotique des températures dans le problème du refroidissement. C.R. 138. 402.
**655.** **H. du Bois* u. *H. Rubens.* Über Polarisation langwelliger Wärmestrahlen durch Drahtgitter. V.P.G. 6. 77.
**656.** **A. Böttcher.* Betrachtungen über den Einfluß der Wandungen auf die Wärmevorgänge in Wärmekraftmaschinen. G.M.T. 2. 1; 36; 58.
**657.** *J. Perry, J. D. Everett.* A useful empirical formula. N. 69. 102; 151.

Siehe auch 333; 400; 401.

### Thermostatik.

[illegible] Note sur un théorème [illegible] atmosphere. B.A.

### Thermodynamik.

[illegible] Die Grundgesetze [illegible] B.U.K.

[illegible] Thurston. Elementary [illegible] geometry of thermodyna- [illegible] 124

[illegible] Apparate zur [illegible] der kinetischen Wärme- [illegible]

[illegible] Über das Wesen der [illegible]

[illegible] Zur Prüfung des [illegible] Hauptsatzes. G. [illegible] 131.

[illegible] Die thermodyna- [illegible] B.F. 260.

[illegible] Entropy. P.P.S.G. 34.

[illegible] Entropie und [illegible] B.F. 510.

[illegible] Bryan. The law of de- [illegible] energy as the fundamental [illegible] thermodynamics. B.F. 123.

[illegible] Planck. Über die mecha- [illegible] der Temperatur und [illegible] B.F. 113.

[illegible] Bumstead. On the varia- [illegible] as treated by Prof. [illegible]

[illegible] Über den von [illegible] freien Raum in einer [illegible] über das Gesetz der rela- [illegible] B.F. 876.

[illegible] Het even- [illegible] lichaam met een [illegible] in de nabijheid [illegible] toestand. C.A.A. [illegible]

[illegible] Verschaffelt Sur l'allure [illegible] de la courbe limite en [illegible] A.N. 2 9. 125.

[illegible] Latent heats [illegible] C.N. 88 280.

[illegible] Expansion curves [illegible] 599.

[illegible] J. Perry. Ex- [illegible] 69 56

[illegible] Note on thermo- [illegible] 83.

[illegible] On the com- [illegible] temperatures at equal [illegible] 149

[illegible] Over de moge- [illegible] smeltlijn bij binaire [illegible] stoffen C.A.A. [illegible]

**678.** *J. J. van Laar.* De smeltlijnen van legeeringen. C.A.A. 12. 25.

**679.** **J. Pitsch.* Über den Zusammenhang der spezifischen Volumina einer Flüssigkeit und ihres Dampfes. A.A.W. 1904. 218

**680.** **A. Grießmann.* Beitrag zur Frage der Erzeugungswärme des überhitzten Wasserdampfes und sein Verhalten in der Nähe der Kondensationsgrenze. M.F.I. 13. 1.

**681.** *H. A. Wilson.* On convection of heat. P.C.P.S. 12. 406.

**682.** **J. H. Jeans.* On the partition of energy in a system of loaded spheres. Q.J. 35. 113.

**683.** *G. Guglielmo.* Intorno ad un modo per agitare un liquido in un recipiente chiuso e ad una modificazione del termocalimetro. N.C.P. (5) 5. 408.

Siehe auch **316**; **611**; **612**; **1114**.

### Mechanisches Wärmeäquivalent.

**684.** **G. Guglielmo.* Intorne ad un nuovo apparechio per la determinazione dell' equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatimetro, del termometro e del psicrometro. N.C.P. (5) 5. 413.

### Spezifische Wärme.

**685.** **J. J. van Laar.* Über die spezifische Wärme in flüssigem Zustande bei niedrigen Temperaturen. B.F. 316.

**686.** **J. H. van 't Hoff.* Einfluß der Änderung der spezifischen Wärme auf die Umwandlungstemperatur. B.F. 233.

**687.** **F. Streintz.* Die spezifische Wärme einiger Schwefelmetalle in ihrer Beziehung zum elektrischen Leitvermögen. B.F. 196.

### Lösungen.

**688.** **F. Richarz.* Theorie verdünnter Lösungen ohne Benutzung des osmotischen Druckes. B.F. 706.

**689.** *J. J. Gatti.* Las soluciones diluídas. A.S.A. 56. 209.

**690.** *A. Smits.* Het beloop de oplosbaarheidskromme in hed gebied der kritische temperaturen van binaire mengsels. C.A.A. 12. 335; 659.

**691.** **V. Goldschmidt.* Zur Mechanik des Lösungsprozesses. Z.K.U. 38. 656.

**692.** **A. Jouniaux.* Sur la loi du déplacement de l'équilibre par des variations de pression. J.C.P. 1. 609.

**693.** **A. Korn* und *E. Strauß.* Über eine Beziehung zwischen dem Lösungs-

druck und der Ionisationswärme der Metalle. B.F. 277.

**694.** *G. Timofejeff.* Über die Anwendbarkeit der Nernstschen Formel für ein Gemisch zweier Lösungsmittel (russ.). J.R.P.C.G. 35. 646.

**695.** *O. W. Richardson.* The solubility and diffusion in solution of dissociated gases. P.M. (6) 7. 266.

**696.** *C. Barus.* On the numbers of nuclei produced by shaking different liquids and allied results. A.J.S. (4) 17. 81.

**697.** *G. Bruni* e *A. Callegari.* Sul congelamento delle soluzioni dimorfi. R.A.L.R. (5) 13 A. 481.

Siehe auch 347; 477; 716; 790.

### Ausdehnung durch die Wärme.

**698.** **M. Thiesen.* Untersuchungen über die thermische Ausdehnung von festen und tropfbar flüssigen Körpern VII. A.P.T.R. 4. 1.

**699.** **K. Scheel.* Untersuchungen über die Wärmeausdehnung von festen und tropfbar flüssigen Körpern. A.P.T.R. 4. 33.

### Zustandsgleichung.

**700.** *P. Kohnstam.* Over de toestandsvergelijking van van der Waals. C.A.A. 12. 948.

**701.** *H. Kamerlingh Onnes* en *C. Zakrzewski.* Bijdrage tot de kennis van het $\psi$-vlak van van der Waals. C.A.A. 12. 885.

**702.** *J.E. Verschaffelt.* Bijdrage tot de kennis van het $\psi$-vlak van van der Waals. C.A.A. 12. 69.

**703.** **J. E. Verschaffelt.* Contributions to the knowledge of van der Waals $\psi$-surface. C.P.L. Suppl. 6—7.

**704.** **A. Brandt.* Über den Zusammenhang der Formel von Trouton und der Gleichung von van der Waals (russ.). J.R.P.C.G. 35. 417.

**705.** *P. Kohnstam.* Over de vergelijkingen van Clausius en van der Waals voor de gemiddelde weglengte en het aantal botsingen. C.A.A. 12. 961.

**706.** *J. D. van der Waals.* L'équilibre d'un solide avec une phase fluide, principalement au voisinage de l'état critique. A.N. (2) 9. 158.

**707.** **J. D. van der Waals.* De verandering van der grootheid $b$ der toestandsvergelijking als quasi-verkleining van het molekuul. B.F. 305.

**708.** **A. Brandt.* Über den Zusammenhang zwischen den Formeln von Stefan für den inneren Druck von Flüssigkeiten und der Gleichung von van der Waals (russ.). J.R.P.G.C. 35. 409.

**709.** *H. Happel.* Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung. A.P.L. (4) 13. 340.

**710.** *J. D. van der Waals.* L'état liquide et l'équation d'état. A.N. (2) 9. 1; J.C.P. 2. 7.

**711.** *J. D. van der Waals.* De vloeistoftoestand en de toestandsvergelijking. C.A.A. 12. 82.

**712.** *P. Ehrenfest.* Zur Berechnung der Volumkorrektion in der Zustandsgleichung von van der Waals. S.A.W. 113. 1107.

**713.** **L. Maquenne.* Sur la détermination des points de fusion. B.S.C.P. (3) 31. 471.

**714.** **J. Siegmund.* Formel der Temperaturfunktion für die Druckkurve bei Verflüssigung von Kohlensäure. Z.K.I. 9. 139.

**715.** **E. H. Hall.* The van der Waals $\alpha$ in alcohol and in ether. B.F. 899.

Siehe auch 725.

### Dampfspannung.

**716.** *J. I. Michailenko.* Über die Dampfspannung der Lösungen (russ.). B.U.K. 1903. b 7.

**717.** *F. A. H. Schreinemakers.* Quelques remarques sur les tensions de vapeur des mélanges ternaires. A.N. (2) 8. 395.

**718.** **K. Scheel.* Über die Spannkraft des Wasserdampfes unter 0°. V.P.G. 5. 287.

Siehe auch 484.

### Kinetische Gastheorie.

**719.** *J. H. Jeans.* On the kinetic theory of gases. P.M. (6) 6. 720.

**720.** *S. H. Burbury.* Note on Mr. Jeans letter in P.M. (6) 6. P.M. (6) 7. 467. — *J. H. Jeans* 468.

**721.** **J. H. Jeans.* A general dynamical theorem and its application to the kinetic theory of gases. Q.J. 35. 209.

**722.** **F. Henrick.* A mechanical model to illustrate the gas laws. J.P.C. 8. 351.

**723.** *H. Nagaoka.* On two constants $A_1$ and $A_2$ in the kinetic theory of gases. N. 69. 79.

**724.** **N. Schiller.* Einige Bedenken gegen die Theorie der Entropievermehrung durch Diffusion der Gase bei einander gleichen Anfangsspannungen der letzteren. B.F. 350.

**725.** * *M. Smoluchowski.* Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie und Zustandsgleichung. B.F. 626.

**726.** * *H. A. Lorentz.* Bemerkungen zum Virialtheorem. B.F. 721.

**727.** * *H. Kayser.* Zur Temperaturbestimmung strahlender Gase. B.F. 38.

### Wärmeleitung.

**728.** * *G. Lauricella.* Sull' integrazione delle equazioni della propagazione del calore. M.S.It. (3) 12. 123.

**729.** * *E. Rogowski.* Über die Wärmeabgabe von Silberdrähten, welche unter Wasser durch einen elektrischen Strom erhitzt werden (russ.). J.R.P.C.G. 34. 424; 35. 105; 175.

Siehe auch 880.

### Wärmestrahlung.

**730.** *E. Pringsheim.* Über die Strahlungsgesetze. A.Gr. (3) 7. 236.

**731.** * *E. Buckingham.* Note on the deduction of Stefan's law. P.R. 17. 277.

**732.** *J. Larmor.* On the intensity of the natural radiation from moving bodies and its mechanical radiation. P.M. (6) 7. 578.

**733.** * *F. Hasenöhrl.* Zur Theorie der Strahlung bewegter Körper. A.A.W. 1904. 226.

**734.** * *M. Abraham.* Der Lichtdruck auf einen bewegten Spiegel und das Gesetz der schwarzen Strahlung. B.F. 85.

**735.** * *G. W. Stewart.* The spectral energy curve of a black body at room temperature. P.R. 17. 476.

**736.** * *A. L. Day* and *C. E. van Orstrand.* The black body and the measurement of extreme temperature. A.J.C. 19. 1.

**737.** *D. Pacini.* Paragone fra le radiazioni attinica e termica del sole a Castelfranco V. nell' estate del 1903. R.A.L.R. (5) 12B. 370.

**738.** *E. Nichols* und *W. W. Coblentz.* Über Methoden zur Messung strahlender Energie. P.Z. 5. 14.

**739.** * *C. Féry.* L'application des lois de rayonnement à la pyrométrie. R.G.O. 14. 911.

Siehe auch 727; 1255.

### Wärmemessung.

**740.** *H. Alt.* Über kalorimetrische Messungen an flüssigem Sauerstoff und flüssigem Stickstoff. A.P.L. (4) 13. 1010.

**741.** * *W. Jaeger* und *H. Steinwehr.* Erhöhung der kalorimetrischen Meßgenauigkeit durch Anwendung von Platinthermometern. V.P.G. 5. 353.

**742.** *—. Pyromètre à absorption. J.P. (4) 3. 32.

Siehe auch 736; 739; 1255.

### Elektrizität.

Siehe 81; 250; 333; 334; 345; 346.

### Elektrizitätserregung.

**743.** * *G. Martinelli.* Elettrizzazione di alcuni dielettrici amorfi mediante compressione. N.C.P. (5) 7. 212.

Siehe auch 445; 446.

### Elektrostatik.

**744.** *W. Feußner.* Zwei elektrostatische Sätze. S.G.M. 1903. 65.

**745.** * *W. Feußner.* Über 2 Sätze der Elektrostatik. B.F. 537.

**746.** *M. Cantone.* Sulle recenti ricerche di elettrostrizione. R.I.L. (2) 37. 164; N.C.P. (5) 7. 126.

**747.** * *P. Duhem.* Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité. B.F. 13.

**748.** * *V. Bjerknes.* Elektrostatische, magnetische und hydrodynamische Grenzflächenbedingungen. B.F. 455.

**749.** *T. Levi-Civitá.* Sopra un problema di elettrostatica che interessa la costruzione dei cavi. R.A.L.R. (5) 13A. 375

**750.** * *P. H. Thomas.* Static discharges in electric circuits. J.F.I. 156. 433.

**751.** * *J. A. Fleming* and *W. C. Clinton.* On the measurement of small capacities and inductances. P.P.S.L. 18. 386.

**752.** *J. A. Fleming.* Note on the measurement of small inductances and capacities and on a standard of small inductance. P.M. (6) 7. 586.

**753.** *G. F. C. Searle.* On the calculation of capicities in terms of the coefficients of electrostatic induction. P.C.P.S. 12. 378.

**754.** *H. Gerdien.* Die Messung kleiner Kapazitäten mittels einer meßbar veränderlichen Normalkapazität. P.Z. 5. 294.

**755.** * *E. W. Barnes.* On the coefficients of capacity of 2 spheres. Q.J. 35. 155.

**756.** * *G. H. Julius.* Sur l'équilibre entre la self-induction et la capacité électrostatique dans un réseau de cables concentriques. B.A.I.E. 1901. 537.

**757.** * *H. M. Macdonald.* Electric radiation from conductors. P.L.M.S. (2) 1. 459.

Siehe auch 295; 299; 793; 813; 914; 917.

### Konduktoren.

Siehe 823; 886—888.

### Elektrischer Funke.

**758.** **J. Semenov.* Le mouvement de la matière dans l'étincelle électrique. J. P. (4) 3. 125.

**759.** *A. Hagenbach.* Über den Dopplereffekt im elektrischen Funken. A.P.L. (4) 13. 362.

Siehe auch 573; 760; 788; 877.

### Kondensatoren.

**760.** *J. Zenneck.* Die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke. A.P.L. (4) 13. 822.

Siehe auch 444; 810; 832; 882; 883; 1155.

### Dielektrizität.

**761.** *I. I. Kossonogov.* Über die Dielektrika (russ). B.U.K. 1903. b 6.

**762.** *W. Sutherland.* The Dielectric capacity of atoms. P.M. (6) 7. 402.

**763.** *E. Bouty.* Cohésion diélectrique de l'argon et de ses mélanges. C.R. 138. 616.

**764.** *W. Sutherland.* The Crémieu-Pender discovery. P.M. (6) 7. 405.

**765.** * *F. Maccarone.* Conducibilità e ritardo di polarizzazione dielettrica. P. I.F.P. 6. 157.

**766.** *W. McF. Orr.* The impossibility of undamped vibration in an unbounded dielectric. P.M. (6) 6. 672.

**767.** **J. Kossonogov.* Experimentelle Methoden zur Bestimmung der dielektrischen Koeffizienten. J.R.P.C.G. 35. 331.

Siehe auch 743; 919; 925; 926.

### Dielektrizitätskonstante.

**768.** * *U. Behn* u. *F. Kiebitz.* Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Eis in flüssiger Luft mit schnellen Schwingungen nach Drude. B.F. 610.

**769.** *H. E. Eggers.* On the dielectric constants of solvents and solutions. J.P.C. 8. 14.

**770.** * *H. Schlundt.* The dielectric constants of some inorganic solvents. J.P.C. 8. 122.

### Elektrodynamik.

**771.** *A. W. Conway.* A new foundation for electrodynamics. T.S.D. (2) 8. 53.

**772.** *W. Wien.* Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. A.P.L. (4) 13. 641. 663. D.V.N. 75. 33.

**773.** *A. Bartoli.* Su la trasformazione in correnti elettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento. R.A.L.R. (5) 12B 346.

**774.** *V. V. Nikolaev.* Raznovidnosti elektrodinamičeskago ottalkivanija (Die verschiedenen Formen der elektrodynamischen Abstoßung). M.E.P. 1901. 117.

**775.** **L. R. Wilberforce.* Note on an elementary treatment of conducting networks. P.P.S.L. 18. 384.

**776.** **P. G. Nutting.* The distribution of motion in a conducting gas. P.R. 17. 281.

**777.** **J. Stark.* Elektrischer Massentransport in Gasen, Druckerhöhung an der Kathode. B.F. 399.

**778.** **H. Pellat.* Du rôle des corpuscules dans la formation du faisceaux anodiques des tubes à gaz rarifié. B.F. 150.

**779.** *L. Mandelstam.* Zur Theorie des Braunschen Senders. P.Z. 5. 245.

**780.** * *A. Koenig.* Procédé graphique pour déduire les équations électrométriques. E.T.A. 20. 1837.

Siehe auch 1241.

### Elektrisches Potential.

**781.** *H. T. Barnes.* The fall of potential method as applied to the measurement of the resistance of an electrolyte in action. P.T.R.S.C. (2) 8. 135.

**782.** * *H. Starke.* Über den Potentialverlauf bei der unselbständigen Elektrizitätsleitung durch Gase für den Fall des Sättigungsstromes. B.F. 667.

**783.** * *J. Moser.* Wie ist positive Elektrizität mit negativem Potential und negative Elektrizität mit positivem Potential leicht dar- und vorzustellen.? B.F. 745.

**784.** * *O. Berg.* Einige Versuche über das Elektrodenpotential von Entladungsröhren. B.F. 793.

**785.** **S. N. Taylor.* Potential phenomena in vacuum tubes during the production and interruption of electrical discharge. P.R. 18. 321.

**786.** * *F. Exner* u. *R. Hofmann.* Über die Potentialdifferenzen der Metalle in ionisierten Gasen. B.F. 600.

**787.** * *A. Schuller.* A fémek potentiálkülömbségéröl (Über die Potentialdifferenz der Metalle). M.T.E. 19. 434.

**788.** *F. Ritter.* Über das Funkenpotential in Cl, Br und He. A.P.L. (4) 14. 118.

Siehe auch 792; 855; 931; 1093; 1187.

### Elektrizitätsleitung.

**789.** **G. W. Walker.* On some problems in the distribution of a gas. B.F. 242.

**790.** *R. Hosking.* The electrical conductivity and fluidity of solutions. P.M. (6) 7. 469.

**791.** **E. Marx.* Über die Elektrizitätsleitung in der Flamme. V.P.G. 6. 121.

**792.** **H. Starke.* Über den Potentialverlauf bei der Elektrizitätsleitung durch Gase, insbesondere der Flammenleitung. V.P.G. 5. 364.

**793.** *W. v. Nicolajew.* Über die wichtige Rolle der elektrischen Leitfähigkeit auf dem Gebiete der Elektrostatik. P.Z. 5. 169.

**794.** **A. Uhrig.* Über einige neue Fälle elektrischen Leitvermögens in Gasen und die Kontinuität derselben für alle Aggregatzustände. N.R. 18. 684.

**795.** **H. Starke.* Über die Elektrizitätsleitung in der Flamme. V.P.G. 6. 33.

**796.** **E. Merritt* and *O. M. Stewart.* On the conductivity produced in rarified gases by an incandescent kathode. P.R. 18. 239.

**797.** **P. E. Robinson.* Some further experiments with the coherer. P.R. 17. 286.

**798.** *A. F. Fisch.* Recherches sur les contacts imparfaits. J.P. (4) 3. 350.

**799.** **H. Starke.* Über die unipolare Leitung in Gasen. V.P.G. 5. 377.

**800.** **O. Lehmann.* Das Vakuum als Isolator. B.F. 287.

**801.** **A. Campbell.* Measurements of small resistances. P.P.S.L. 18. 480.

**802.** **E. Hagen* u. *H. Rubens.* Emissionsvermögen und elektrische Leitfähigkeit der Metalllegierungen. V.P.G. 6. 128.

**803.** **S. Lussana.* Influenza della pressione sulla resistenza elettrica dei metalli. N.C.P. (5) 5. 305.

**804.** **A. Tanakadate.* Electric resistance of a plane elliptic plate placed in a homogenous medium of infinite extent, the resistance of the plate itself being negligeable compared with that of the medium. J.E.S.T. 1901. 585.

Siehe auch 687; 775; 776; 782; 879—881; 884; 885; 939.

### Elektrischer Strom.

**[illegible]** **E. Jahnke.* Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Theorie der veränderlichen Ströme. B. [illegible]

**[illegible]** **W. S. Day.* A experiment rela[illegible] the application of Lagranges [illegible] of motion to electric currents. [illegible] 13. 65.

**807.** *E. Riecke.* Über näherungsweise gesättigte Ströme zwischen planparallelen Platten. N.G.G. 1903. 236.

**808.** **A. v. Baecklund.* Über elektrische Ströme in zylindrischen Leitern. B.F. 224.

**809.** *E. Riecke.* Über nahezu gesättigten Strom in einem von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Luftraume. N.G.G. 1903. 149.

**810.** *G. Mie.* Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator. A.P.L. (4) 13. 857.

**811.** **Corbino.* Correnti trifasiche. A.A.E.I. 7. No. 4.

Siehe auch 116; 450; 618; 622; 729; 773; 782; 870; 924; 929; 940; 941; 1152; 1183.

### Wechselstrom.

**812.** **E. Gehrcke.* Eine einfache Methode zur Bestimmung des Stromverlaufes hochgespannter Wechselströme. V.P.G. 6. 176.

**813.** *W. Stroud* and *J. H. Oates.* On the application of alternating currents to the calibration of capacity-boxes and to the comparison of capacities and inductances. P.M. (6) 6. 707.

**814.** *W. McF. Orr.* Note on the radiation from an alternating circular electric current. P.M. (6) 7. 336.

**815.** *M. Wien.* Über den Durchgang schneller Wechselströme durch Drahtrollen. A.P.L (4) 14. 1.

**816.** **R. B. Williamson.* Power measurement on alternating current circuits. E.R. 43. 217.

**817.** **Iliovici* et *P. Janet.* Measuring of very large alternating currents. B.S.I.E. 3. 56.

**818.** **G. Vanni.* Sopra un nuovo metodo di misura della frequenza di una corrente alternata. B.S.N.N. 16—17.

Siehe auch 488; 1150; 1151.

### Galvanische Polarisation.

**819.** **H. Grassi.* Teoria della polarizzazione galvanica. G.C.I. 33. 291.

**820.** *E. Rothé.* Sur la polarisation des électrodes. A.C.P. (8) 1. 215.

**821.** *E. Rothe.* Polarisation des électrodes de platine, d'or et de palladium. A.C.P. (8) 1. 289.

**822.** **A. Borel.* Sur la polarisation rotatoire magnétique du quartz. A.S.G. (4) 16. 24; 157.

Siehe auch 765.

### Elektrische Schwingungen.

**823.** **V. K. Lebedinskij.* O nekotorych sposobach isyčenjia electričeskich kolebanij v provodnikach (Über einige Methoden zur Untersuchung der elektrischen Schwingungen in den Konduktoren). M. E.P. 1901. 116.

**824.** **A. Battelli* e *A. Magri.* Sulle scariche oscillatorie. P.I.F.P. 6. 3.

**825.** **A. Battelli* e *L. Magri.* Les décharges oscillatoires. A.S.G. (4) 16. 5; 139.

**826.** *H. R. Willard* and *L. E. Woodman.* A study of the radiations emitted by a Righi vibrator. P.R. 18. 1.

**827.** **B. Walter.* Photographische Abbildungen elektrischer Schwingungen. B.F. 647.

**828.** *R. E. F. Schmidt.* Resonanz elektrischer Schwingungen. A.P.L. (4) 14. 22.

**829.** **M. Field.* Étude oscillographique des phénomènes de résonance dans les circuits électriques. B.S.I.E. (2) 3. 358.

**830.** *K. Simons.* Die Dämpfung elektrischer Schwingungen durch eine Funkenstrecke. A.P.L. (4) 13. 1044.

**831.** *W. McF. Orr.* On the impossibility of undamped vibrations in an unbounded dielectric. P.M. (6) 6. 667.

**832.** **H. Schuh.* Demonstration der Abhängigkeit oszillatorischer Kondensatorentladungen vom Widerstand. Z.P. 176.

**833.** *P. Drude.* Demonstration einiger Meßapparate für elektrische Schwingungen. P.Z. 4. 734; V.P.G. 5. 294.

Siehe auch 882; 883; 916.

### Elektrische Wellen.

**834.** *O. Heaviside.* The undistorted cylindrical wave. N. 68. 54.

**835.** **C. E. Curry.* A peculiar class of waves. B.F. 282.

**836.** **Lord Rayleigh.* On the bending of waves round a spherical obstacle. P.R.S.L. 72. 40.

**837.** **A. Trowbridge* e *L. Amaduzzi.* Influenza delle onde elettromagnetiche e reazione del circuito sul getto a mercurio di Lippmann. N.C.P. (5) 5. 322.

**838.** **E. Drago.* Sulle opposte variazioni di resistenza dei coherer a perossido di piombo per influenza delle onde elettriche. N.C.P. (5) 6. 197.

**838a.** *L. Hermann.* Über elektrische Wellen in Systemen von hoher Kapazität und Selbstinduktion. A.P.L. (4) 2. 932.

**839.** *T. R. Lyle.* Preliminary account of a wave-tracer and analyser. P.M. (6) 6. 549.

**840.** **C. Nordmann.* Le rayonnement hertzien du soleil et l'influence de l'activité solaire sur le magnétisme terrestre. J.P. (4) 3. 97.

**841.** **G. Abragam.* Maksvellevskoe „V" (Über die Messung der Maxwellschen Geschwindigkeit). R.P.W. 2. 145.

**841a.** *M. J. Pupin.* Electrical wave transmission. T.A. 14. 89.

Siehe auch 403; 906.

### Ionen- und Elektronentheorie.

**842.** **Allen.* Ions or electrons. P.P. S.G. 34.

**843.** **G. F. Fitc-Džerald.* Teorija ionov (Ionentheorie). R.P.W. 2. 33.

**844.** **E. F. Roeber.* Les propriétés théoriques des ions en solution. E.C.I. 1. 490.

**845.** **E. F. Roeber.* Theoretical properties of free ions in solutions. T.A.E.S. 4. 159.

**846.** *J. S. Townsend.* The charges of ions. P.M. (6) 7. 276.

**847.** *A. Schuster.* On the rate at which ions are generated in the atmosphere. S.P.M. 48. Nr. 12.

**848.** *R. K. Mac Clung.* The relation between the rate of recombination of ions in air and the temperature of the air. P.M. (6) 6. 655.

**849.** *O. W. Richardson.* The theory of the rate of recombination of ions in gases. P.C.P.S. 12. 144.

**850.** *J. Stark.* Theoretische Bemerkungen zur Ionisation von Flammen. P. Z. 5. 83.

**851.** **A. Righi.* Sul moto dei ioni nel campo elettrico. B.F. 730.

**852.** **H. Mache.* Zur Definition der spezifischen Ionengeschwindigkeit. B.F. 137.

**853.** **E. R. v. Schweidler.* Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in schlechtleitenden Flüssigkeiten. A.A.W. 1904. 198.

**854.** **E. Riecke.* Elektrische Strömung in einem ionisierten Luftraume der von 2 konzentrischen Zylinderflächen begrenzt ist. B.F. 168.

**855.** *J. S. Townsend.* The genesis of ions by the motion of positive ions in a gas and a theory of the sparking potential. P.M. (6) 6. 598.

**856.** **A. Righi.* Sulla ionizzazione dell' aria prodotta da un punto elettrico. N.C.P. (5) 5. 326.

**857.** **J. Stark.* Versuch über die Ionisierung durch den Stoß positiver Ionen. V.P.G. 6. 104.

**858.** *J. Stark.* Ionisierung durch den Stoß negativer Ionen von glühender Kohle. P.Z. 5. 51.
**859.** * *O. Lodge.* Die Elektronen (russ). E.P. 1903. 113; 144.
**860.** * *G. Jäger.* Über die Elektronentheorie. V.V.F.U.W. 8. 164.
**861.** * *Carpini.* Elettroni. C.E.M. 20. Sept.—Okt.
**862.** *K. Schwarzschild.* Über die Bewegung des Elektrons. N.G.G. 1903. 245.
**863.** *C. Runge.* Über die elektromagnetische Masse der Elektronen. N.G.G. 1903. 326.
**864.** * *A. W. Conway.* The field of force due to a moving electron. P.L.M.S. (2) 1. 154.
**865.** *E. Kohl.* Über das innere Feld der Elektronen. A.P.L. (4) 13. 770.
**866.** *P. Hertz.* Kann sich ein Elektron mit Lichtgeschwindigkeit bewegen? P.Z. 5. 109.
**867.** * *H. A. Lorentz.* Bemerkungen zum Virialtheorem II. B.F. 726.
**868.** *O. Heaviside.* The radiation from an electron describing a circular or elliptic orbit. N. 69. 293; 342.
**869.** *K. Kaehler.* Über die durch Wasserfälle erzeugte Leitfähigkeit der Luft. A.P.L. (4) 12. 1119.
**870.** *A. Schuster.* On the number of electrons conveying the conduction currents in metals. P.M. (6) 7. 151.

Siehe auch 693; 786; 810; 881; 931; 1087; 1090.

### Thermoelektrizität.

**871.** *O. Heaviside.* Extension of Kelvins thermoelectric theory. N. 68. 78.
**872.** *A. Upmark.* Termoelektrisk hysteresis. A.U.L. 38. No. 4.
**873.** * *R. Mewes.* Die direkte Umwandlung der Verbrennungswärme in Elektrizität. K.L.D. 7. 128; 191.
**874.** *S. C. Laws.* Experiments on the Thomson effect in alloys of bismuth and tin. P.C.P.S. 12. 179.
**875.** * *E. G. Bausenwein.* Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur. A.A.W. 1904. 31.
**876.** *S. C. Laws.* The Thomson effect in alloys of bismuth and tin. P.M. (6) 7. 560.
**877.** * *A. Maresca.* Fenomeni termici delle scintille nei liquidi isolanti. N.C.P. (5) 5. 315.
**878.** * *E. Bouty.* Cohésion diélectrique des gaz et température. J.P. (4). 3. 12.
**879.** *A. A. Noyes* and *W. D. Coolidge.* The electrical conductivity of aqueous solutions at high temperatures. P.A.Bo. 39. 163.
**880.** * *G. Großmann.* Über die Beziehung zwischen dem thermischen Leitungsvermögen und der elektrischen Leitungsfähigkeit von reinen Metallen und Legierungen. V.P.G.Z. 6. 5.
**881.** *O. W. Richardson.* Über die einem Vakuum durch erhitzte Leiter erteilte Leitfähigkeit. P.Z. 5. 6.
**882.** *R. Lindemann.* Über die Wärmewirkungen oszillatorischer Kondensatorentladungen im primären und sekundären Kreise. A.P.L. (4) 12. 1012.
**883.** * *A. Maresca.* Sulla energia svolta della scarica oscillante di un condensatore nei tubi a vuoto. P.I.F.P. 6. 95.
**884.** * *A. Barnini.* Sull' influenza della temperatura nella conducibilità elettrica del sodio. N.C.P. (5) 6. 21.
**885.** * *A. Bersini.* Sull' influenza della temperatura nella conducibilità elettrica del potassio. N.C.P. (5) 6. 289.
**886.** * *A. Corazzol.* Sulle legge di distribuzione delle temperature di regime stazionario nella sezione circolare di un conduttore cilindrico omogeneo ed isotropo percorso da corrente. L.E.M. 20. 584. — *G. Grassi* 610.
**887.** * *G. Crivellini.* Ricerca della temperatura d' equilibrio di un conduttore sottomesso all' azione di une corrente elettrica. L.E.M. 20. 389.
**888.** * *D. Grassi.* Temperature di un conduttore percorso da corrente elettrica. L.E.M. 20. 420
**889.** *P. J. Kirkby.* The effect of the passage of electricity through a mixture of oxygen and hydrogen at low pressures. P.M. (6) 7. 223.
**890.** *J. Bernstein* und *A. Tschermak.* Über das thermische Verhalten des elektrischen Organs von Torpedo. S.A.B. 1904. 301.

Siehe auch 685; 729; 791; 795; 1247.

### Elektrizitätsmessung.

Siehe 751; 752; 780; 781; 801.

### Magnetismus.

**891.** * *V. Lo Vetere Gallo.* Il magnetismo secondo le teorie moderne. R.T.I. 2. 17.
**892.** * *A. Schmidt.* Das magnetische Feld. Z.P. 16. 351.
**893.** *B. Walter.* Über die Stefansche Theorie starker magnetischer Felder A.P.L. (4) 14. 106.

**894.** *G. W. Walker.* On stresses in a magnetostatic field. P.M. (6) 7. 399.

**895.** *F. Koláček.* Einfache Herleitung der Formeln für die Deformation eines ferromagnetischen Drahtes im Magnetfelde. A.P.L. (4) 14. 177.

**896.** *J. J. Thomson.* The magnetic properties of systems of corpuscles describing circular orbits. P.M. (6) 6. 673.

**897.** *P. Weiß.* La notion du travail appliquée à l'aimantation des cristaux. C.R. 138. 35.

**898.** **P. Weiß.* Le travail d'aimantation des cristaux. J.P. (4) 3. 194.

**899.** *J. Zacharias.* Nachweis mechanischer Vorgänge als die Ursache des Magnetismus. D.V.N. 75. 46.

**900.** **C. G. Knott.* Magnetization and resistance in nickel at high temperatures. B.F. 333.

**901.** *B. Walter.* Magnetische Ablenkungsversuche mit Röntgenstrahlen. A.P.L. (4) 14. 99.

**902.** *P. E. Shaw.* The magnetic expansion of some of the less magnetic metals. P.R.S.L. 72. 370.

**903.** *C. Maurain.* Sur les propriétés magnétiques des poudres de fer et l'aimantation spécifique à saturation. T.S. U.R. 2. 305.

**904.** **H. Kuhfahl.* Magnetische Messungen nach absolutem Maße. Z.P. 17. 1.

Siehe auch 403; 506; 748.

### Hysteresis.

**905.** **C. Maurain.* Étude et comparaison des procédés de réduction de l'hystérésis magnétique. J.P. (4) 3. 417.

**906.** **A. Sella.* Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell' isteresi magnetoelastica e sul detector magnetoelastico. N.C.P. (5) 6. 83.

### Magnetostriktion.

**907.** *F. Koláček.* Über Magnetostriktion. A.P.L. (4) 13. 1.

**908.** *R. Gans.* Magnetostriktion ferromagnetischer Körper. A.P.L. (4) 13. 634.

**909.** *H. Nagaoka* and *K. Honda.* Magnetisation and magnetostriction of nickel steels containing different percentages of nickel. J.U.T. 19 No. 11.

### Elektromagnetismus.

**910.** **W. Pongs.* Elektromagnetismus. A.D.S. 13. 207.

**911.** **S. P. Thompson.* Ob energii elektromagnitnoj sistemy. ME.P. 1901. 189. — *V. Subbotin* 517.

**912.** **D. Severini.* L' elasticità dell' etere nei fenomeni elettromagnetici. Pol.M. 1901. 353; 449; 545.

**913.** *K. H. Weber.* Kraftlinienwanderung als Grundhypothese für die Maxwell-Hertzsche Theorie. V.G.H. (2) 7. 623.

**914.** **A. Eichenwald.* Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. A.P.L. (4) 13. 919.

**915.** **E. Kohl.* Über die elektromagnetischen Feldgleichungen innerhalb bewegter elektrischer Massen. B.F. 678.

**916.** **F. Ehrenhaft.* Die elektromagnetischen Schwingungen des Rotationsellipsoids. A.A.W. 1904. 25.

**917.** **P. H. Thomas.* Static discharges in electric circuits. J.F.I. 156. 387.

**918.** *G. Picciati.* Flusso di energia e radiazione nel campo elettromagnetico generato della convezione elettrica. R.A.L.R. (5) 13A. 384.

**919.** *G. Picciati.* Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica. R.A. L.R. (5) 13A. 181; 226.

**920.** **J. F. Meyer.* Electric convection. J.F.I. 156. 453.

**921.** **V. Cremieu* and *H. Pender.* On the magnetic effect of electric convection. P.R. 17. 385.

**922.** **P. N. Lebedev.* Skala electromagnitnych voln v ethire (Skala der elektromagnetischen Wellenlängen im Äther). R.P.W. 2. 49; 217.

**923.** *F. Himstedt.* Quantitative Versuche über den Rowlandeffekt. A.P.L. (4) 13. 100.

**924.** *P. V. Bevan.* A lecture experiment to illustrate the effect of a straigth current on a magnetic pole. P.C.P.S. 12. 212.

**925.** *F. Koláček.* Über die ponderomotorischen Kräfte, welchen ein homogenes Dielektrikum in einem veränderlichen elektromagnetischen Felde unterworfen ist. P.Z. 5. 45.

**926.** *R. Gans.* Die ponderomotorischen Kräfte, welchen ein homogenes Dielektrikum in einem elektromagnetischen Felde unterworfen ist. P.Z. 5. 162.

**927.** **T. Levi-Cività.* Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. N.C.P. (5) 6. 141.

**928.** *G. Bakker.* Die Faraday-Maxwellschen Spannungen. A.P.L. (4) 13. 562.

**929.** **O. M. Corbino.* Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti

di scarica sinusoidali o smorzate. N.C.P. (5) 7. 175.

**930.** *W. B. v. Czudnochowski.* Das Verhalten beweglicher zylindrischer Eisenkerne in Doppelspulen; ein Beitrag zur Theorie der Differentialbogenlampe. P.Z. 5. 205.

**931.** **E. T. Whittaker.* On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions. P.L.M.S. (2) 1. 367.

**932.** **A. Banti.* Duddell Circuits. L.E. 12. 1.

**933.** **G. Granqvist.* Über die Periode und die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung im singenden Flammenbogen. B.F. 299.

**934.** *G. Barlow.* Über die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in Antimon und Wismuth. A.P.L. (4) 12. 897.

Siehe auch 822; 863.

## Induktion.

**935.** **W. Pongs.* Eie Induktion. A. D.S. 13. 279; 321; 415; 462.

**936.** **A. Heydweiller.* Über Selbstinduktions- und Permeabilitätsvergleichungen. B.F. 4.

**937.** *F. Dolezalek.* Über Präzisionsnormale der Selbstinduktion. A.P.L. (4) 12. 1142.

**938.** **A. Trowbridge.* A method for the determination of coefficients of mutual induction. P.R. 18. 184.

**939.** **H. Muraoka* und *T. Tamaru.* Über die Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Pulvers durch Induktion. M.C.K. 1. 20.

**940.** *P. Drude.* Über induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie. A.P.L. (4). 13. 512.

**941.** **B. Weinberg.* Über den Einfluß des Mediums auf die Induktion von Strömen (russ.). J.R.P.C.G. 35. 483; 665.

**942.** *C. Somigliana.* Intorno ad un problema d'induzione magnetica. R.I.L. (2) 36. 1114.

**943.** *T. Boggio.* Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa. R.I.L. (2) 37. 123.

**944.** **F. C. Frisby.* The effect of pressure on magnetic induction. P.R. 18. 432.

Siehe auch 753; 756; 1234.

## Hallsches Phänomen.

**945.** *T. C. Mc Kay.* On the relation of the Hall effect to the current density in gold. P.A.Bo. 39. 353.

## Thermomagnetismus.

**946.** **G. Piaggesi.* Magnetizzazione dei liquidi a varie temperature. P.I.F.P. 6. 131.

**947.** *G. E. Allan.* On the magnetism of basalt and the magnetic behaviour of basaltic bars when heated in air. P.M. (6) 7. 45.

Siehe auch 407; 934.

## Theoretische Astronomie.

**948.** *K. Schwarzschild.* Über Himmelsmechanik. P.Z. 4. 765; D.V.M. 13. 145.

**949.** *E. W. Brown.* On the variation of the arbitrary and given constants in dynamical equations. T.S.M.Am. 4. 333.

## Keplersches Problem.

**950.** **E. Le Grand Roy.* Résolution graphique de l'équation de Kepler. A. S.G. (4) 16. 328.

Siehe auch 36.

## Störungen.

**951.** *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Hamilton. A.A.T. 39. 262.

**952.** *H. Buchholz.* Klarstellung der von Herrn Backlund A.N.K. No. 3911 gegen mich erhobenen Vorwürfe. A.N.K. 164. 157.

**953.** *H. v. Zeipel.* Angenäherte Jupiterstörungen für die Hekubagruppe. A.P.M. (8) 12 No. 11.

Siehe auch 986.

## Vielkörperproblem.

**954.** *H. Buchholz.* Die Gyldénsche horistische Integrationsmethode des Problems der 3 Körper und ihre Konvergenz. N.AH. 81 No. 3. 129.

**955.** *H. Buchholz.* Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gyldéns Forschung über das Problem der 3 Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie. P.Z. 5. 180.

**956.** *G. Bisconcini.* Sul problema dei 3 corpi. Condizione d' urto di due di essi. R.A.L.R. (5) 12B. 552.

**957.** *E. Buchholz.* Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der 3 Körper und der „Hilda-Lücke“ im System der kleinen Planeten auf

Grund der Gyldénschen Störungstheorie. D.A.W. 72. 309.

**958.** *P. Pizzetti.* Casi particolari del problema dei 3 corpi. R.A.L.R. (5) 13A. 17.

**959.** *L. Picart.* Discussion des surfaces de niveau dans le problème restreint. B.A. 20. 401.

**960.** * *E. O. Lovett.* Periodic solutions of the problem of 4 bodies. Q.J. 35. 116.

### Erdbewegung.

**961.** *F. Folie.* Dernière replique à M. C. Lagrange. B.A.B. 1904. 71.

### Erddrehung.

Siehe 238.

### Präzession.

**962.** * *W. Foerster.* La précession des équinoxes d'Hipparque à Ptolémée et à Kepler. R.G.O. 14. 537.

### Aberration.

**963.** * *E. Lecher.* Ein elektrischer Aberrationsversuch. B.F. 739.

**964.** * *R. J. Sowter.* On astigmatic aberration. P.P.S.L. 18. 573.

**965.** * *F. C. O. Wadsworth.* On the aberration of the concave grating, when used as an objective spectroscope. M. S.P.A.O. (2) 13.

### Bewegung von Körpern unter dem Einfluß der Erddrehung.

**966.** * *E. H. Hall.* Do falling bodies move south? P.R. 17. 179; 245.

**967.** *E. H. Hall.* Experiments on the deviations of falling bodies. P.A.Bo. 39. 339.

**968.** * *B. Brunhes.* Sur une expérience de Perrot relative à l'influence de la rotation de la terre sur l'écoulement des liquides, et sur une comparaison directe de la rotation terrestre et du champ magnétique terrestre. A.S.M.F. 52. 89.

Siehe auch 1064.

### Foucaultscher Pendelversuch.

**969.** *Sauter.* Der Foucaultsche Pendelversuch. J.V.U. 11. 64.

**970.** * *G. Schilling.* Der Foucaultsche Pendelversuch. V.V.F.U.W. 9. 22.

**971.** *L. M. de Sparre.* Sur le pendule de Foucault. M.A.Ly. (3) 7. 313.

### Polhöhenschwankungen.

**972.** * *S. Kubli.* Polschwankungen — Erdbeben. D.W.B. 4. 338.

**973.** * *W. Förster.* Über die Beobachtung der Bewegungen der Drehungsachse im Erdkörper. M.V.A.P. 13. 51.

**974.** *H. Kimura.* On the 6 years' cycle of the polar motion during the interval 1891—1902. A.N.K. 164. 341.

### Mondbewegung.

**975.** *E. W. Brown.* On the formation of the derivatives of the lunar coordinates with respect to the elements. T.S.M.Am. 4. 234.

**976.** *E. F. van de Sande-Bakhuyzen.* Onderzoek omtrent de fouten der maanstafels van Hansen-Newcomb in de jaren 1895—1902. C.A.A. 12. 131; 381; 585.

Siehe auch 949; 1100.

### Sternbedeckungen.

**977.** *A. Pannekoek.* Über die Erscheinungen, welche bei einer Sternbedeckung durch einen Planeten auftreten. A.N.K. 164. 5.

**978.** *H. Struve.* Über die Bedeckung des Sternes B.D.—6°, 6191 durch Jupiter. A.N.K. 164. 33.

### Planetenbewegung.

**979.** * *L. Lecornu.* Sur les mouvements planétaires. A.F. 1903. 115.

**980.** *T. J. J. See.* On the degree of accuracy attainable in determining the position of Laplaces invariable plane of the planetary system. A.N.K. 164. 161.

**981.** *J. H. Jeans.* On the vibrations and stability of a gravitating planet. T.R.S.L. 201A. 157.

Siehe auch 977; 978.

### Planetoidenbewegung.

**982.** * *G. Gruß.* Einige Bemerkungen zur Berechnung der Kreisbahn eines Planetoids aus 2 geozentrischen Positionen (tschech.). S.G.B. 1903 No. 47.

Siehe auch 953; 957.

### Kometenbewegung.

**983.** *L. Fabry.* Sur la véritable valeur du grand axe d'une orbite cométaire lorsque l'astre est très éloigné du Soleil et le caractère supposé hyperbolique de la comète 1890 II C.R. 138. 335.

**984.** * *L. Picart.* Sur quelques points de la théorie de la capture des comètes. T.M.L. (2) 1.

### Meteoritenbewegung.

**985.** **H. Chrétien.* L'étude scientifique des étoiles filantes et les travaux de la commission des météores de la société astronomique de France. A.F. 1903. 189.

**986.** *T. Bredikhine.* Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants simples. A.P.B. (5) 17. 167.

### Doppelsternbewegung.

**986a.** *A. Prey.* Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse des Systemes 70 Ophiuchi. D.A.W. 72. 177.

**986b.** *E. Doolittle.* The orbit of the double star $\Sigma$ 518. P.P.S. 42. 170.

**986c.** *J. Hartmann.* Untersuchungen über das Spektrum und die Bahn von $\delta$ Orionis. S.A.B. 1904. 527.

**986d.** *H. C. Vogel.* Untersuchungen über das spektroskopische Doppelsternsystem $\beta$ Aurigae. S.A.B. 1904. 497.

### Eigenbewegung der Fixsterne.

Siehe 274.

### Sonnenapex.

**986e.** **S. Wellisch.* Der dynamische Mittelpunkt der Welt. D.W.B. 3. 273.

### Astrophysik.

**987.** **F. Gessert.* Eine Hypothese über die Ersetzung der Gestirnswärme durch die Schwerkraft. D.W.B. 4. 232.

**988.** **C. Nordmann.* Le rayonnement hertzien du soleil et les aurores boréales. J.P. (4) 3. 281.

**989.** *C. Fabry.* Sur l'intensité lumineuse des étoiles et lear comparaison avec le soleil. C.R. 137. 1242.

**990.** **H. Kaiser.* Zur Bestimmung der Temperatur der Sterne. D.W.B. 3. 298.

Siehe auch 593; 1029; 1099.

### Kosmische Spektralanalyse.

**991.** **W. H. Julius.* Pecularities and changes of Frauenhofer lines interpreted as consequences of anomalous dispersion of sunlight in the corona. A.J.C. 18. 50.

**992.** **E. Haschek* u. *K. Kostersitz.* Über einen Versuch der Ausmessung von Sternspektrogrammen nach der objektiven Methode der Wellenlängenbestimmung. B.F. 497.

Siehe auch 986c; 986d.

### Sonne.

**993.** **W. H. Julius.* Die Sonnenphänomene als Folgen anomaler Dispersion des Lichtes betrachtet. S.L. 35. 28.

**994.** **W. H Julius.* Eine Hypothese über die Natur der Sonnenprotuberanzen. S.L. 36. 53.

**995.** **W. H. Julius.* Erwiderung auf Bedenken, welche gegen die Anwendung der anomalen Dispersion zur Erklärung der Chromosphäre geäußert worden sind. S.L. 36. 148.

**996.** *H. Seeliger.* Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn A. Schmidt „Beobachtung der Helligkeitsabnahme durch Brechung." P.Z. 5. 237.

**997.** *N. Donitch.* Sur l'état des enveloppes du soleil à l'epoque du dernier minimum de son activité. B.A. 21. 5.

Siehe auch 684; 737; 840; 988; 989; 1059; 1069; 1102; 1105; 1223.

### Sonnenflecken.

**998.** **H. Chrétien.* La quadrature mécanique des taches solaires. A.F. 1903. 207.

Siehe auch 1058; 1060; 1104; 1106.

### Kometen.

**999.** *R. Jaegermann.* Einige Bemerkungen über die in den neueren Werken der kosmischen Physik gegebenen Auseinandersetzungen in Bezug auf die Kometenschweife. A.P.B. (5) 18. 175.

### Veränderliche Sterne.

**1000.** *H. Ludendorff.* Untersuchungen über den Lichtwechsel von $\varepsilon$ Aurigae A.N.K. 164. 81.

### Kosmologie.

**1001.** *S. Oppenheim.* Das Unendliche in der Astronomie. S.L.P. (2) 23. 283.

### Sonnensystem.

Siehe 980.

### Kosmogonie.

Siehe 1029.

### Beobachtungskunde.

**1002.** *Salet.* Erreurs dues aux déplacement de l'oeil devant l'oculaire. B.A. 21. 83.

### Sphärische Astronomie.

**1003.** *H. Hilton.* Some simple problems in astronomy. M.G.S. 2. 384.

**1004.** **J. J. Taudin-Chabot.* Sonnenuntergang und Sonnenaufgang. D.W.B. 3. 1903.

### Zeitbestimmung.

**1005.** **E. James.* Einfache Methoden der Zeitbestimmung. D.U.Z. 27. 129.

**1006.** **Weidefeld.* Zur Genauigkeit der Zeitbestimmungen am Sonnenlot. D.U.Z. 27. 319.

**1007.** **P. Fauth.* Vorschlag zur Verbesserung des Sonnenlotes. M.V.A.P. 13. 133.

**1008.** *F. Faccin.* Metodo grafico per la determinazione del tempo coll' eliocronometro „Faccin". R.F.M. 4B. 459.

### Gnomonik.

**1009.** **Weidefeld.* Über die Leistungsfähigkeit von Sonnenuhren. M.V.A.P. 13. 24.

**1010.** **A. Müller.* Bibel und Gnomonik. N.O. 48. 257; 340; 405.

Siehe auch 109.

### Chronologie.

**1011.** **J. Plassmann.* Verwandlung von Zehntelstunden in Hundertel des Tages. M.V.A.P. 13. 142.

**1012.** **J. Plassmann* Minuten als aliquote Teile des Tages. M.V.A.P. 13. 124.

**1013.** **R. Munzky.* Math. Formel zur rechnerischen Bestimmung des Wochentages beliebiger Daten im alten und neuen Kalender. D.W.B. 4. 63.

### Kalender.

**1014.** *L. F. J. Gardès.* Calendrier perpétuel. A.F. 1903. 214.

Siehe auch 1013.

### Niedere Geodäsie.

**1015.** *W. Grosse.* Über eine praktische Rechnungsaufgabe der Feldmeßkunst. Z.H. 35. 33.

**1016.** *S. Finsterwalder* und *W. Scheufele.* Das Rückwärtseinschneiden im Raum. S.A.M. 1903. 591.

### Messen.

**1017.** **R. S. Woodward.* Measurement and calculation. A.A.N.Y. 15. 22.

### Tachymetrie.

**1018.** *A. Sporeni.* Topografía. Taquimetria con el teodolito. A.S.A. 56. 49.

### Barometrische Höhenmessung.

**1019.** **G. Cicconetti.* Confronto sperimentale fra le principali formole dell' altimetria barometrica. M.S.It. (3) 12. 109.

**1020.** *L. Maillart.* Note sur la formule barométrique de Laplace. B.S.V. (4) 39. 359.

### Topographie.

Siehe 1018.

### Kartenprojektionen.

**1021.** *J. D. Everett.* On a map that will solve problems in the use of the globes. N. 68. 294.

### Metrologie.

**1022.** *J. Bosscha.* Les équations des nouvelles copies du mètre des archives. II. A.N. (2) 9. 108.

**1023.** **W. Le Conte Stevens.* The metric system. S. (2) 19. 534.

**1024.** **O. Chwolson.* Notiz über die Vergleichung des Meters mit der Wellenlänge des Lichtes. B.F. 28.

**1025.** **J. Witkowski.* Les mesures électriques et leur rapport aux mesures anglaises et aux mesures polonaises anciennes. P.T.W. 41. 81.

### Höhere Geodäsie.

**1026.** **E. Hammer.* Die methodischen Fortschritte der geographischen Landmessung. G.J.G. 25. 343.

### Gestalt des Geoids.

**1027.** **J. Sollas.* The figure of the Earth. Q.J.G.S. 59. 180.

Siehe auch 1037.

### Lotabweichungen.

**1028.** *O. Fisher.* On deflexions of the plumb-line in India. P.M. (6) 7. 14.

### Geophysik.

**1029.** *R. v. Kövesligethy.* Über die Entwicklung der Himmelskörper und das Alter der Erde. B.M.N. 19. 204.

**1030.** **L. de la Rive.* Sur l'ellipsoide d'élasticité dans l'intérieur de la terre et les pressions tangentielles dues à la pesanteur. A.S.G. (4) 16. 457.

### Schweremessungen.

**1031.** **C. Dufour.* Les variations de la pesanteur. A.S.M.F. 52. 87.

**1032.** **A. Prey.* Über die Reduktion

der Schweremessungen auf das Meeresniveau. A.A.W. 1904. 234.

**1033.** *—. Variation of gravity over the deep sea. M.W.R. 31. 336.

**1034.** **K. R. Koch.* Relative Schweremessungen in Württemberg. J.V.N.S. 59. 1.

### Erdbeben.

**1035.** **A. Seberg.* Gegenwärtiger Stand und Bestrebungen der Seismologie. D. W.B. 4. 126.

**1036.** **O. Fisher.* On the transmission of Earthquake waves through the Earth. P.C.P.S. 12. 354.

**1037.** **C. Lallemand.* Relation des volcans et tremblements de terre avec la figure du globe. A.F. 1903. 157.

**1038.** **C. Coldridge Farr.* On the interpretation of Milne Seismogram. P. P.S.L. 18. 579.

Siehe auch 972.

### Erdwärme.

**1039.** **A. Flamache.* Un argument nouveau en faveur du feu central. B. S.B.A. 8. 291.

### Vulkanismus.

**1040.** **v. Erdborn.* Le vulcanisme. B.S.B.A. 8. 283.

Siehe auch 1037.

### Erdströme.

Siehe 1058.

### Erdmagnetismus.

**1041.** **N. Umow.* Ein Versuch die magnetischen Typen des Erdmagnetismus zu ermitteln. S.N.M. 1902. 1.

**1042.** **J. Sahulka.* Über die Ursachen des Erdmagnetismus und des Polarlichtes. A.A.W. 1903. 32.

**1043.** **W. van Bemmelen.* The diurne field of magnetic disturbance. T.M.W. 8. 153.

**1044.** *A. Pochettino.* Sulla variazione del campo magnetico orizzontale terrestre coll' altezza sul livello del mare. R.A. L.R. (5) 13A 96.

**1045.** *E. Mathias.* Sur la loi de la distribution régulière de la force totale du magnétisme terrestre en France au 1 janvier 1896. C.R. 137. 916.

**1046.** **A. Nippoldt* jun. Die tägliche Variation der magnetischen Deklination, eine Untersuchung über die physikalische Bedeutung der harmonischen Analyse. A.A.S. 26. No. 3.

Siehe auch 840; 968; 1059; 1060; 1257; 1268.

### Ozeanographie.

**1047.** **L. Lalot.* Action de la fusion de la glace sur la circulation océanique. L.G. 8. 333.

**1048.** *Thoulet.* Méthode physique et chimique de reconnaissance et de mesure des courants sousmarins profonds. C.R. 138. 527.

### Ebbe und Flut.

**1049.** **A. Müller.* Zur Theorie von Ebbe und Flut. N.O. 49. 617.

**1050.** **F. S. Archenhold.* Ein Apparat zur Erklärung von Ebbe und Flut. D. W.B. 4. 38.

Siehe auch 1101.

### Hydrologie.

**1051.** **E. Maillet.* Sur divers points d'hydraulique souterraine et fluviale. A. S.M.F. 51. 185.

**1052.** *A. Angele.* Wassermessungen an der Donau am Pegel zu Ulm. J.V. U. 11. 21.

Siehe auch 91.

### Quellen.

**1053.** *J. Boussinesq.* Application de la théorie générale de l'écoulement des nappes aqueuses infiltrées dans le sol aux fortes sources des terrains perméables et en particulier à plusieurs de celles qui alimentent Paris. C.R. 138. 117.

**1054.** *E. Maillet.* Sur la courbe des débits d'une source. C.R. 137. 676.

**1055.** *E. Maillet.* Sur la prévision des débits des sources de la Vanne. C.R. 137. 946.

**1056.** *E. Maillet.* Sur les graphiques des débits des sources. A.S.M.F. 51. 206.

**1057.** *J. Boussinesq.* Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. J.M. (5) 10. 1.

### Kosmische Geophysik.

**1058.** **F. S. Archenhold.* Sonnenflecken, Erdströme und Nordlichter. D.W.B. 4. 71.

**1059.** **A. L. Cortie.* Solar prominences and terrestrial magnetism. A.J.C. 18. 287.

**1060.** **W. Maunder.* Suggested connection between sun spot activity and the secular change in magnetic declination. M.N.A.S. 64. 224.

Siehe auch 840.

### Mathematische Meteorologie.

**1061.** *L. Maillart.* Note sur la constitution physique de l'athmosphère. B. S.V. (4) 39. 389.

**1062.** *V. Bjerknes.* Das Problem der Wettervorhersage betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik. M.Z. 21. 1.

**1063.** **Dewar.* Problems of the athmosphere. P.R.I. 17. 223.

**1064.** **M. Gorodensky.* Recherches concernant l'influence de la rotation diurne de la terre sur les perturbations athmosphériques. A.S.M.F. 52. 113.

### Luftdruck.

**1065.** **F. M. Exner.* Über eine Beziehung zwischen Luftdruckverteilung und Bewölkung. A.A.W. 1903. 283.

**1066.** *W. Trabert.* Die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules und die tägliche Oszillation der Luftmasse. M.Z. 19. 544; 20. 48.

**1067.** **M. Margules.* Über die Beziehung zwischen Barometerschwankungen und Kontinnitätsgleichung. B.F. 585.

Siehe auch 309; 317; 1074; 1100.

### Luftbewegung.

**1068.** *L. de Marchi.* Sulla teoria matematica della circolazione atmosferica. R.A.L.R. (5) 13A. 460.

**1069.** **F. H. Bigelow.* Studies on the circulation of the athmospheres of the sun and of the earth. M.W.R. 32. 15; 71.

**1070.** **A. Woeikof.* Remarks on Bigelows studies on the circulation of the athmosphere. M.W.R. 32. 118.

**1071.** **M. Dechevrens.* The vertical component of the wind. M.W.R. 32. 118.

**1072.** **E. Knipping.* Formel zur Umwandlung der Beaufortgrade im Metermaß. M.Z. 21. 196.

**1073.** *J. Hann.* Über eine doppelte tägliche Periode der Windkomponenten auf den Berggipfeln. M.Z. 20. 501.

**1074.** **A. F. Zahm.* Measurement of air velocity and pressure. P.R. 17. 410.

Siehe auch 1064.

### Zyklonen.

**1075.** **F. J. B. Cordeiro.* The problem of the cyclone. M.W.R. 31. 516.

**1076.** **F. H. Bigelow.* The mechanism of countercurents of different temperatures in cyclones and anticyclones. M.W.R. 31. 72.

**1077.** *W. Meinardus.* Über die absolute Bewegung der Luft in fortschreitenden Zyklonen. M.Z. 19. 529.

**1078.** *W. N. Shaw.* On curves representing the paths of air in a special type of travelling storm. M.W.R. 31. 318.

Siehe auch 296.

### Meteorologische Optik.

**1079.** **A. Sieberg.* Über ringförmige Gebilde um Sonne und Mond, sowie verwandte atmosphärisch-optische Erscheinungen. D.W.B. 3. 303.

**1080.** **J. W. Krebs.* Atmosphärische Sprungflächen und Spiegelungserscheinungen. D.W.B. 4. 182.

Siehe auch 597.

### Refraktion.

**1081.** *L. de Ball.* Über den Einfluß der Refraktion auf die Distanz zweier Sterne. A.N.K. 164. 373.

**1082.** **G. Cicconetti* e *N. Pierpaoli.* Il coefficiente di rifrazione terrestre a Udine. M.S.It. (3) 12. 251.

**1083.** *R. T. Crawford.* Determination of the constant of refraction from observations made with the Repsold meridian circle of the Lick observatory. P.C.F. (3) 1. No. 8.

**1084.** *P. Kohlschütter.* Folgerungen aus den Koßschen Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella. A.H. 31. 533.

### Lufttemperatur.

**1085.** **Dechevrens.* Les variations de la température selon la verticale. A.S.M.F. 52. 67.

**1086.** **R. Merecki.* Nicokresown zmienność temperatury prowietrza (Über die nichtperiodische Temperaturänderung der Luft). K.L. 8. 484.

**1087.** *R. K. Mc Clung.* The relation between the rate of recombination of ions in air and the temperature of the air. P.M. (6) 6. 655.

**1088.** **A. Bemporad.* La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un decresimento uniforme della temperatura dell' aria coll' altezza. M.S.S.I. 33. 31.

Siehe auch 316; 848; 1104.

### Thermostatik der Atmosphäre.

Siehe 658.

### Bewölkung.

Siehe 1065.

### Niederschläge.

**1089.** **J. R. Plumandon.* La neige selon l'altitude. L.N. 31. 92.

### Luftelektrizität.

**1090.** **H. Ebert.* Die atmosphärische Elektrizität auf Grund der Elektronentheorie. G.L. 39. 650.

**1091.** *B. Zölß.* Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XIII. S.A.W. 112. 1117.

**1092.** **A. Gockel.* Sur la variation diurne de la déperdition de l'électricité dans l'athmosphère. A.S.G. (4) 18. 1.

**1093.** **K. Noack.* Versuch über Potentialänderung mit der Höhe. Z.P. 16. 350.

Siehe auch 847; 848; 869; 1087.

### Gewitter.

**1094.** *C. Negro.* Fulmine. R.F.M. 5 I. 323.

**1095.** *B. Walter.* Über die Entstehungsweise des Blitzes. J.H.W.A. 20. 3.

### Polarlichter.

Siehe 988; 1042; 1058; 1105; 1106.

### Kosmische Meteorologie.

**1096.** **F. H. Bigelow.* The new cosmical meteorology. S. (2) 19. 31.

**1097.** *A. V. Klossovskij.* Predskazanie pogody v sovremennoj meteorologii i rol N. A. Demčinskago v etom voprose (Wetterprophezeihungen in der Meteorologie und Stellung des Herrn Demčinskij zu dieser Frage). M.P.O. 30. 193; 217; 242; 265.

**1098.** **A. W. Klossovsky.* Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.

**1099.** **C. Marti.* Die Wetterkräfte der Planetenatmosphären. J.V.O. 15. 19.

**1100.** **T. F. Grigull.* Barometerstand und Monddeklination. J.V.O. 15. 15.

**1101.** **W. Krebs.* Die Gezeitenbewegung der Atmosphäre. D.W.B. 4. 91.

**1102.** **F. H. Bigelow.* Studies on the circulation of the athmospheres of the sun and of the earth. M.W.R. 31. 459.

**1103.** *M. Möller.* Zur täglichen Drehung des Windes und über Trägheitsperioden. M.Z. 21. 28.

**1104.** **C. Nordman.* The periodicity of sun spots and the variations of the mean annual temperatures of the athmosphere. M.W.R. 31. 371.

**1105.** **C. Nordman.* Le rayonnement du soleil et les aurores boréales. J.P. (4) 3. 281.

**1106.** **H. H. Clayton.* The 27-day period in auroras and its connection with sun spots. S. (2) 18. 632.

### Praktische Meteorologie.

Siehe 1062; 1097; 1098.

### Mathematische Chemie.

**1107.** *P. Köthner.* Versuch einer chemischen Auffassung des Weltäthers. Z.F.N. 76. 370.

**1108.** **W. G. Alexeieff.* Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften (russ.). A.U.J. 1904 No. 2.

**1109.** *E. Ariès.* Sur les lois du déplacement de l'équilibre chimique. C.R. 137. 738.

**1110.** *E. Ariès.* Sur l'extension de la formule de Clapeyron à tous les états indifférents. C.R. 137. 123.

**1111.** **G. G. Longinescu.* Sur la polymérisation des corps anorganiques à l'état solide. J.P.C. 7. 391; A.S.U.J. 2. 288.

**1112.** *H. O. Jones* and *O. W. Richardson.* Irreversible simultaneous linear reactions. P.C.P.S. 12. 215.

### Physikalische Chemie.

**1113.** **P. Duhem.* Les points d'eutexie et de transition pour les mélanges binaires qui peuvent donner des cristaux mixtes. J.C.P. 1. 97.

**1114.** **W. Kurbataw.* Über das Troutonsche Gesetz und andere Konstanten, die man bei der Siedetemperatur beobachtet (russ.). J.R.P.C.G. 35. 319.

**1115.** **J. E. Trevor.* The expansion-work of a dissociation gas. B.F. 493.

**1116.** **H. C. Jones.* The effect of one associated solvent on the association of another associated solvent. B.F. 105.

**1117.** **G. Jäger.* Über die Verteilung einer nichtdissoziierenden Substanz zwischen zwei Lösungsmitteln. B.F. 313.

**1118.** *V. Henri.* Étude théorique de la dissociation de l'oxyhémoglobine. Actions de la concentration et de la température. C.R. 138. 572.

**1119.** *E. Charabot* et *J. Rocherolles.* Recherches expérimentales sur la distillation. C.R. 138. 497.

Siehe auch 342; 462.

### Phasenlehre.

**1120.** *C. Raveau.* Démonstration élémentaire de la règle des phases. C.R. 138. 621.

**1121.** *C. H. Wind.* Nouvelle démonstration de la règle des phases. R.S. (5) 1. 345.

**1122.** *A. Ponsot.* Démonstrations simples de la règle des phases. C.R. 138. 690.

**1123.** *R. Hollmann.* Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische I. A.P.L. (4) 13. 325.

**1124.** *S. Scharbe.* Einige Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn Hollmann: Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische. A.P.L. (4) 13. 1076.

**1125.** *J. Hirnjak.* Rolja staloï, plinnoï i gazovoï fazi v chemitschnij rivnovazi (Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasartigen Phase im chemischen Gleichgewicht). R.S.M. 9 No. 2.

**1126.** **P. Saurel.* On the stability of the equilibrium of a homogeneous phase. J.P.C. 8. 325.

**1127.** *E. Ariès.* Sur les conditions de l'état indifférent. C.R. 138. 416.

**1128.** *E. Ariès.* Sur les propriétés des courbes figuratives des états indifférents. C.R. 138. 806.

**1129.** *V. Volterra.* Sul numero dei componenti indipendenti di un sistema. R.A.L.R. (5) 12 B. 417.

**1130.** *J. J. van Laar.* Sur les allures possibles de la courbe de fusion de mélanges binaires de substances isomorphes. A.M.T. (2) 8. 517.

**1131.** *J. J. van Laar.* Over de gedaante van smeltlijnen bij binaire mengsels, wanneer de mengwarmte in de beide phasen zeer gering = 0 is. C.A.A. 12. 716.

### Photochemie.

**1132.** **G. Ciamician* e *P. Silber.* Azioni chimiche della luce. G.C.I. 33. 354; M.IB. (5) 10.

**1133.** **E. L. Nichols* and *E. Merritt.* The influence of low temperatures upon certain color indicators. B.F. 890.

**1134.** **J. H. Smith.* Die Anwendung der Photometrie in der Photographie. M.P.G.Z. 5. 27.

Siehe auch 580; 1142.

### Thermochemie.

**1135.** **J. W. Richards.* The thermochemistry of the theory of electrolytic dissociations. T.A.E.S. 4. 137.

**1136.** **W. Nernst.* Chemisches Gleichgewicht und Temperaturgefälle. B.F. 904.

**1137.** **H. Crompton.* The atomic latent heats of fusion of the metals considered from the kinetic standpoint. C.N. 88. 237.

**1138.** *C. Puschl.* Über das Gesetz von Dulong und Petit. S.A.W. 112. 1230.

**1139.** *P. Lemoult.* Les chaleurs de combustion des composés organiques, considérées comme propriétés additives. C.R. 137. 515.

**1140.** *P. Lemoult.* Sur une nouvelle méthode pour le calcul des chaleurs de combustion et sur quelques-unes de ses conséquences. C.R. 137. 979.

**1141.** *P. Lemoult.* Sur le calcul de la chaleur de combustion des compositions organiques azotés. C.R. 138. 900.

**1142.** *P. V. Bevan.* The temperature effect in the combination of Hydrogen and Chlorine under the influence of light. P.C.P.S. 12. 398.

Siehe auch 1133.

### Elektrochemie.

**1143.** **W. Mitkiewicz.* Zur Frage nach dem Mechanismus der Voltasäule (russ.). J.R.P.C.G. 35. 507.

**1144.** **C. J. Reed.* Berthelot's law relative to the electromotive forces of cells based on the reciprocal action of saline solutions and soluble electrolytes. T.A.E.S. 4. 151.

**1145.** *A. Ponsot.* Sur une loi expérimentale du transport électrique des sels dissous. C.R. 138. 192.

**1146.** *P. J. Kirkby.* The effect of the passage of electricity through a mixture of *O* and *H* at low pressures. P.M. (6) 7. 223.

**1147.** *A. W. Gray* Über die Ozonisierung des Sauerstoffs bei der stillen elektrischen Entladung. A.P.L. (4) 13. 477.

### Elektrolyse.

**1148.** **P. G. Salom.* A new type of electrolytic cell. T.A.E.S. 4. 101.

**1149.** **W. D. Bancroft.* Present status of the electrolytic dissociation theory. T.A.E.S. 4. 175.

**1150.** *A. Brochet* et *J. Petit.* Sur l'emploi du courant alternatif en électrolyse. C.R. 138. 359.

**1151.** **A. Brochet* et *J. Petit.* Sur l'électrolyse par courant alternatif. B.S.C. (3) 31. 359.

**1152.** *E. van der Ven.* Sur le transport des liquides par le courant électrique. A.M.T. (2) 8. 489.

**1153.** **E. S. Shepherd.* An apparatus for the electrolytic determination of metals using a rotating cathode. J.P.C. 7. 568.

Siehe auch 1135.

### Mathematische Physiologie.

**1154.** *Ferrus* et *Machart.* Augmentation du travail utile des attelages par l'emploi des appareils élastiques à traction. C.R. 138. 165. — *Marey* 167.

**1155.** *Cluzet.* Sur l'excitation des nerfs par décharges de condensateurs. C.R. 138. 173.

Siehe auch 890.

### Mathematische Biologie.

**1156.** *J. Deschamps.* Étude analytique du phénomène de la vie oscillante. C.R. 138. 235.

### Mathematische Zoologie.

**1157.** **E. Mancini.* L'arithmétique des animaux. R.S. (5) 1. 129.

### Mathematische Botanik.

**1158.** *Berthelot.* Recherches sur l'émission de la vapeur d'eau par les plantes et sur leur désiccation spontanée. C.R. 138. 16.

**1159.** *W. R. Köhler.* Über die plastischen und anatomischen Veränderungen bei Keimwurzeln und Luftwurzeln, hervorgerufen durch partielle mechanische Hemmungen. S.N.G.L. 28—29. 59.

### Technische Mechanik.

**1160.** *A. Sommerfeld.* Über technische Mechanik. D.V.M. 13. 156.

### Stäbe.

**1161.** *L. Prandtl.* Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben. D.V.M. 13. 31.

Siehe auch 243—245; 389; 408; 409; 1169.

### Balken.

Siehe 410.

### Bogenträger.

**1162.** *A. Ludin.* Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte. Z.S. 49. 460.

**1163.** **G. Ramisch.* Elementare Untersuchung des Bogenfachwerkträgers. Z. G.U. 15. 189.

**1164.** **J. Solín.* Neue Konstruktion der Kämpferdrucklinie eines vollwandigen Bogenträgers mit 2 Gelenken (tschech.). M.A.T.P. 1903 No. 3.

### Gewölbe.

Siehe 59.

### Erddruck.

**1165.** *J. Vandone.* Sulle fondazioni tubulari trivellate. R.F.M. 4B. 393.

Siehe auch 46.

### Brücken.

**1166.** *H. Müller-Breslau.* Zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. S.A.B. 1903. 948.

### Eisenbahnwesen.

**1167.** *C. Renard.* Sur un nouveau système de train routier dit à propulsion continue. C.R. 137. 1234.

Siehe auch 314.

### Maschinenlehre.

**1168.** **P. Razous.* Détermination de la puissance des moteurs d'automobiles. R.S (4) 21. 207.

**1169.** **C. Schmitz.* Die Umrechnung der kalorischen Leistung einer Kühlmaschine. E.K.B. 2. 121.

**1170.** **C. Schmitz.* Berechnung einer Ammoniak-Kompressions-Kühlmaschine. E.K.B. 3. 50.

**1171.** **J. F. Hey.* Les moteurs à gaz. M.G.W.G. 37. 69.

Siehe auch 204; 856.

### Dampfmaschinen.

**1172.** *V. Grazioli.* Delle macchine a vapore Compound. R.F.M. 5I. 213.

### Regulatoren.

**1173.** *W. Hort.* Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge. Z.S. 50. 233.

Siehe auch 1176.

### Hydraulik.

**1174.** **E. Fontaneau.* Préliminaires d'hydraulique. A.F. 1903. 32.

**1175.** **M. Schmidt.* Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. M.F.I. 11. 1.

**1176.** *J. Meunier.* Sur un appareil destiné à régulariser le fonctionnement des trompes à vide. C.R. 138. 693.

**1177.** *C. Anthony.* Un nuevo turbidimetro. A.S.A. 56. 71.

Siehe auch 46.

### Schiffsbewegung.

**1178.** *J. A. Normand.* Sur la détermination du déplacement d'un bâtiment de combat. C.R. 138. 331.

**1179.** **J. Schütte.* Einfluß der Schlingerkiele auf den Widerstand und die Rollbewegung der Schiffe in ruhigem Wasser. J.S.G.B. 4. 341.

**1180.** *J. A. Normand.* De l'influence de la surimmersion sur la vitesse. C.R. 137. 1223.

### Luftschiffahrt.

**1181.** *C. Renard.* Sur la possibilité de soutenir en l'air un appareil volant du genre helicoptère en employant les moteurs à explosion dans leur état actuel de légèreté. C.R. 137. 843.

**1182.** **C. F. Marvin.* Note upon economical shapes for cutting envelopes of balloons. M.W.R. 31. 314.

### Photographie.

Siehe 1134.

### Spektralanalyse.

**1183.** **A. Garbasso.* Su la teoria dell' analisi spettrale. B.F. 469.

Siehe auch 565.

### Elektrotechnik.

**1184.** **D. Negrotti.* Calcolo delle lunghe linee di trasmissione di energia mediante correnti monofasi. R.T.T. 1. 542; 740.

**1185.** *W. Duane* and *C. A. Lory.* On the differential telephone. P.R. 18. 275.

Siehe auch 1238.

### Telephon.

Siehe 1185; 1186.

### Telegraphenwesen.

**1186.** **E. Brunè* e *C. Turchi.* Nuovo sistema di telegrafia e telefonia simultanea. N.C.P. (5) 6. 221.

### Drahtlose Telegraphie.

**1187.** *C. A. Chant.* Variation of potential along the transmitting antenna in wireless telegraphy. A.J.S. (4) 17. 1.

**1188.** *M. Abraham.* Zur drahtlosen Telegraphie. P.Z. 5. 174.

**1189.** *F. Braun.* Methoden zur Vergrößerung der Sonderenergie für drahtlose Telegraphie (sog. Energieschaltung). P.Z. 5. 193.

**1190.** *N. Vasilescu-Karpen.* Nouveau récepteur pour la télégraphie sans fil. C.R. 138. 499.

Siehe auch 940.

### Instrumentenkunde.

**1191.** **P. Vaudrey.* Sur les appareils indicateurs et enrégistreurs dans les applications aux sciences et à l'industrie. A.F. 1903. 220.

**1192.** **Guglielmo.* Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli. N.C.P. (5) 5. 402.

**1193.** *J. Richard.* Sur un cinémomètre différentiel enregistreur. C.R. 138. 140.

**1194.** **F. Florio.* Nouvelles machines pneumatiques à mercure. J.P. (4) 3. 38.

**1195.** *C. E. Wasteels.* Een variatiemeter. H.V.C. 6.

Siehe auch 17; 143; 180; 189; 337.

### Physikalische Instrumente.

**1196.** **A. Pfeiffer.* Gergk-Luftpumpen. Z.P. 17. 61.

**1197.** **G. P. Grimaldi* e *A. Accolla.* Sopra un apparechio per la misura di piccoli allungamenti. N.C.P. (5) 7. 202.

**1198.** *G. Guglielmo.* Intorno ad alcune modificazioni de volumenometro e del modo d'usarlo ed intorno ad un volumenometro a peso. R.A.L.R. (5) 12B. 617.

**1199.** *M. A. Mesnager.* Sur un appareil enregistreur permettant de mesurer à travers une paroi solide, supportant des pressions relativement élevées, des différences de pression aussi faibles que l'on veut. C.R. 138. 75.

**1200.** *E. Tassilly* et *A. Chamberland.* Sur un capillarimètre. C.R. 137. 645.

**1201.** *J. Thovert.* Diffusiomètre. C.R. 137. 1249.

**1202.** **E. Timmensch.* Les pyromètres et leurs applications à l'industrie. U.I. 1901. 101.

Siehe auch 245; 376; 377; 473; 683; 684.

### Wagen.

**1203.** *V. Crémieu.* Balance azimutale quadrifilaire. C.R. 138. 893.

**1204.** *H. Poincaré.* Théorie de la balance azimutale quadrifilaire. C.R. 138. 869.

Siehe auch 1192; 1271.

### Wellenmaschinen.

**1205.** **K. Mack.* Zur Konstruktion der Machschen Wellenmaschinen. Z.P. 16. 265.

**1206.** **P. v. Rostowzew.* Zwei neue Wellenmaschinen. Z.P. 16. 274.

### Akustische Instrumente.

**1207.** **A. Lampa.* Aus der Statistik der Prüfungsstelle für Normalstimmgabeln in Wien. B.F. 146.

### Optische Instrumente.

**1208.** *G. Sagnac.* Lois de la propagation anomales de la lumière dans les instruments d'optique. C.R. 138. 479.

**1209.** *G. Sagnac.* Vérfications expérimentales des lois de la propagation anomale de la lumière le long de l'axe d'un instrument d'optique. C.R. 138. 619.

**1210.** *C. Chabrié.* Sur le principe de la construction d'un appareil d'optique destiné à obtenir de très forts grossissements. C.R. 138. 265.

**1211.** **G. W. Ritchey.* On methods of testing optical mirrors during construction. A.J.C. 19. 53.

**1212.** *C. Chabrié.* Sur les applications du diastoloscope à l'étude des déplacements des objets lumineux. C.R. 138. 799.

**1213.** *C. Chabrié.* Sur le diastoloscope et les résultats qu'il a permis d'obtenir. C.R. 138. 560.

**1214.** **O. Lummer* u. *E. Gehrcke.* Theorie und Leistungsfähigkeit der Dispersionsapparate hoher Auflösungskraft. A.P.T.R. 4. 61.

**1215.** **T. Vautier.* Sur un réfractomètre à réflexions. J.P. (4) 2. 888. C.R. 137. 615.

**1216.** *J. Joly.* An improved polarizing vertical illuminator. P.S.D. (2) 10. 1.

**1217.** **A. E. Conrady.* On the chromatic correction of object glasses. M.N.A.S. 64. 458.

**1218.** **A. Larsen.* Das Aktinoskop. M.F.L. 2. 108.

**1219.** **E. Wandersleb.* Die von M. v. Rohr gegebene Theorie des Veranten, eines Apparats zur richtigen Betrachtung von Photographien. V.P.G. 6. 44.

**1220.** *L. Heine.* Ein neues Epidiaskop. D.V.N. 75. 310.

**1221.** **A. Larsen.* Ein Photometer. M.F.L. 2. 112.

**1221 a.** **J. Simmance.* Das Simmance-Abadysche Flickerphotometer. D.M. 12. 16.

**1222.** *F. F. Martens* u. *F. Grünbaum.* Über eine Neukonstruktion des Königschen Spektralphotometers. A.P.L. (4) 12. 984.

**1223.** *J. Elster* u. *H. Geitel.* Über eine verbesserte Form des Zinkkegelphotometers zur Bestimmung der ultravioletten Sonnenstrahlung. P.Z. 5. 238.

Siehe auch 527; 528; 599.

### Stereoskop.

**1224.** *A. Schell.* Das Universalstereoskop. S.A.W. 113. 949.

**1225.** *E. Deville.* On the use of Wheatstone stereoscope in photographing surveying. P.T.R.S.C. (2) 8. 63.

**1226.** *G. Jäger.* Das Strobostereoskop. S.A.W. 112. 985.

**1227.** **A. Schell.* Konstruktion und Betrachtung stereoskopischer Halbbilder. A.A.W. 1903. 279.

Siehe auch 96.

### Mikroskop.

**1228.** **R. T. Glazebrook.* Theories of resolving powers in a microscope. P.P.S.L. 19 Suppl. 18.

**1229.** —. Theories of resolving power of a microscope. N. 69. 497.

**1230.** **A. Gleichen.* Die Vergrößerung des Mikroskopes unter Berücksichtigung der Refraktion und Akkomodation des Auges. D.M. 12. 135.

**1231.** *V. de Souza-Brandão.* O novo microscopio da commissao do serviço geologico. C.C.S.G.P. 5. 118.

### Spektroskop.

**1232.** **T. H. Blakesley.* Direct vision spectroskope of one kind of glass. P.P.S.L. 18. 507.

**1233.** **F. L. O. Wadsworth.* On the measurements of wave-length with the concave grating objective spectroscope. M.S.P.A.O. (2) 15.

Siehe auch 562; 965.

### Thermometer.

Siehe 684; 741; 1202.

### Elektrische Instrumente.

**1234.** **W. Lebedinski.* Untersuchung der Erscheinungen an einer Induktionsrolle mittelst einer Braunschen Röhre (russ). J.R.P.C.G. 35. 531.

**1235.** *G. W. Pierce.* On the Cooper-Hewith mercury interruptor. P.A.Bo. 39. 389.

**1236.** **C. F. Jenkins.* Current interruptor. E.W. 41. 395.

**1237.** * *L. Birkeland.* On a new electric current breaker. M.S.C. 1902. No. 11.

**1238.** *d'Arsonval* et *Gaiffe.* Dispositifs de protection pour sources électriques alimentant des générateurs de haute fréquence. C.R. 138. 325.

**1239.** *d'Arsonval.* Nouveau dispositif électrique permettant de souffler l'arc de haute fréquence. C.R. 138. 323.

Siehe auch 779; 797; 838; 839; 930.

**Elektrisiermaschinen.**

**1240.** *V. Schaffers.* Nouvelle théorie des machines à influence. C.R. 138. 354.

**Voltasche Säule.**

Siehe 1143.

**Galvanische Elemente.**

**1241.** * *C. J. Reed.* Das Berthelotsche Gesetz der elektromotorischen Kräfte von galvanischen Batterien. E.C.I. 1. 492.

**1242.** *A. Denizot.* Zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente. A.P.L. (4) 13. 193.

Siehe auch 1144.

**Transformatoren.**

**1243.** * *C. Hewitt.* Ein neuer Stromumformer. A.E. 17. 208.

**1244.** *G. Grassi.* Effetti della dispersione e della reattanza nel funziamento dei trasformatori. Metodi di misura ed applicazioni. M.A.T. (2) 53. 47.

Siehe auch 940.

**Akkumulatoren.**

**1245.** * *O. Schmidt.* Über alkalische Akkumulatoren. M.P.G.Z. 5. 35.

**Elektrische Meßapparate.**

**1246.** *T. Bruger.* Über einige elektrodynamische Meßinstrumente der Firma Hartmann und Braun. P.Z. 4. 876.

**1247.** * *R. Threlfall.* On a new form of sensitive hot-wire voltmeter. P.P.S.L. 19. 58.

**1248.** *V. Crémieu.* Stato-voltmètre. Appareil mesurant 2 à 40000 volts en équilibre stable. C.R. 138. 503.

**1249.** * *G. W. Walker.* On the theory of the quadrant electrometer. P.P.S.L. 18. 453.

**1250.** * *S. W. J. Smith.* A portable capillary electrometer. P.P.S.L. 18. 377.

**1251.** * *W. P. White.* A convenient galvanometer. P.R. 17. 484.

**1252.** *W. Einthoven.* Ein neues Galvanometer. A.P.L. (4) 12. 1059.

**1253.** * *C. G. Abbot.* The construction of a sensitive galvanometer for spectrobolometric purposes. A.J.C. 18. 1.

**1254.** *W. Einthoven.* Sur le galvanomètre a corde. II. A.N. (2) 9. 186.

**1255.** *V. Tjurin.* O sposobe pozvoljajuščem značitelno provysit čuvstvitelnost galvanoskopov (Über eine Methode die Empfindlichkeit der Galvanoskope beträchtlich zu vermehren). M.E.P. 1901. 31.

Siehe auch 488; 833.

**Magnetische Instrumente.**

**1256.** * *C. Chree.* The bending of magnetometer deflexion-bars. P.P.S.L. 19. 20; F.M. (6) 7. 39.

**1257.** * *P. Curie* et *C. Cheneveau.* Sur un apparail pour la détermination des constantes magnétiques. JP. (4) 2. 796.

Siehe auch 406.

**Fernrohre.**

**1258.** * *A. E. Conrady.* On the chromatic correction of object glasses. M.N.A.S. 64. 182.

**1259.** *F. Boquet.* Sur la flexion des lunettes. B.A. 21. 28.

**1260.** * *F. L. O. Wadsworth.* On the construction of telescopes whose relative or absolute focal length shall be invariable at all temperatures. M.S.P.A.O. (2) 16; M.N.A.S. 63. 573.

Siehe auch 1002.

**Uhrmacherkunst.**

**1261.** *J. Andrade.* La théorie de la synchronisation des horloges. A.S.G. (4) 17. 139.

**1262.** * *L. Defosser.* Die Reibungsarbeit bei Uhren. D.U.Z. 27. 186; 202; 217; 242.

**1263.** * *R. Yrk.* Außerordentliche Eingriffe bei Uhrwerken. D.U.Z. 27. 294.

**Chronometer.**

**1264.** * *J. Andrade.* Chronométrie: les régimes limites et la stabilité de la synchronisation. B.F. 51.

**1265.** *R. L. Mond* et *M. Wildermann.* Nouveau type perfectionné de chronographe. C.R. 138. 494.

Siehe auch 1008.

**Geodätische Instrumente.**

**1266.** *Schönemann.* Die Verwendung der einfachen Kamera zur Ermittlung

von Höhen und Entfernungen. V.N.V.B. 60. 101.

**1267.** *A. A. Vassilief.* Darlegung und Nachweis einiger systematischer Fehler in Jäderins Basisapparat (russ.). A.P.B. (5) 19. No. 3. 95.

Siehe auch 1018.

### Geophysikalische Instrumente.

**1268.** * *M. T. Edelmann.* Vertikalvariometer für erdmagnetische Messungen im Luftballon. B.F. 815.

Siehe auch 1050.

### Barometer.

**1269.** *E. Rosenthal.* Über die elastische Nachwirkung bei Aneroidbarographen. A.P.B. (5) 19. No. 3. 115.

### Hygrometer.

**1270.** *G. Guglielmo.* Intorno ad un completo igrometro ad assorbimento. R. A.L.R. (5) 12B 557.

**1271.** * *G. Guglielmo.* Intorno ad un igrometro-bilancia ad indicazioni assolute e continue. B.F. 341.

Siehe auch 684.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

51. BAND. 3. HEFT.

MIT 9 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 31. Dezember 1904.

BG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.


☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Hanssenstraße 4, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

---

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite



---

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**F. Bernstein, F. Biske, A. Börsch, K. Doehlemann, V. Fischer, A. Grünwald, G. Hamel, G. Herglotz, K. Heun, J. Horn, A. V. Leon, F. Ludwig, K. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, L. Schleiermacher, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, S. Wellisch, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, E. Wölffing.**

# Zur Torsionsfestigkeit.

Von L. Henneberg in Darmstadt.

§ 1.

Die Achse des auf Torsion zu berechnenden Stabes sei in die $z$-Achse des Koordinatensystemes gelegt.

Die Berechnung des Stabes auf Torsion, bezw. die Bestimmung der Komponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ der tangentialen Spannung[1]) in einem zur $z$-Achse senkrechten Querschnitte erfolgt dann in den technischen Lehrbüchern auf Grund der Formeln:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\int \tau_x df = 0, \tag{2}$$

$$\int \tau_y df = 0, \tag{3}$$

$$M_t + \int (\tau_x \cdot x - \tau_y \cdot y) df = 0, \tag{4}$$

wobei $M_t$ das Torsionsmoment bedeutet, und wo die Integrale in den Gleichungen (2) bis (4) über den ganzen Querschnitt auszudehnen sind.

Die Gleichung (1) ist hergeleitet aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität, die Gleichungen (2) bis (4) aus der Bedingung, daß die äußeren Kräfte mit den Spannungskräften im Gleichgewicht stehn.

Zu den Gleichungen (1) bis (4) tritt dann noch eine Grenzbedingung hinzu:

Es muß am Rande des Querschnittes die resultierende tangentiale Spannung

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \tag{5}$$

1) Es sind hier die Bezeichnungen eingehalten, die sich in der Festigkeitslehre von Grashof finden. $\tau_x$ ist somit die Komponente der Spannung in der Richtung der $y$-Achse, $\tau_y$ diejenige in der Richtung der $x$-Achse. Nach den Bezeichnungen der analytischen Mechanik von Kirchhoff würde sein $\tau_x = Y_z$, $\tau_y = X_z$.

welche mit der $x$-Achse den durch die Gleichung

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_x}{\tau_y}$$

bestimmten Winkel $\alpha$ einschließt, in die Tangente der Randkurve des Querschnittes fallen.

Die Bestimmung von $\tau_x$ und $\tau_y$ erfolgt in der Weise, daß versuchsweise $\tau_x$ und $\tau_y$ als möglichst einfache Funktionen von $x$ und $y$ angenommen werden, die derartig zu wählen sind, daß durch dieselben für spezielle und zu bestimmende Werte der Konstanten sämtlichen Gleichungen (1) bis (4), sowie der Grenzbedingung genügt werden kann. Diese Forderung, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ möglichst einfache Funktionen sein sollen, ist genauer dahin zu präzisieren: Es sollen für den allein in Betracht kommenden Fall einer Begrenzung des Querschnittes durch algebraische Kurven $\tau_x$ und $\tau_y$ ganze Funktionen von $x$ und $y$ sein von möglichst niedrigem Grade und einer möglichst geringen Zahl von Konstanten.

Sind in dieser Weise $\tau_x$ und $\tau_y$ durch Probieren ermittelt, so ist die größte im Querschnitt auftretende tangentiale Spannung zu finden. Aus derselben ergibt sich dann die Gleichung für die Dimensionenberechnung durch die Bedingung, daß die zulässige tangentiale Spannung nicht überschritten werden darf.

Die hier geschilderte Methode, die sich in den technischen Lehrbüchern findet, und die wesentlich auf Grashof zurückzuführen ist[1]), soll im folgenden, im Gegensatz zu der Methode von St. Venant, als die technische Methode bezeichnet werden.

---

1) Siehe F. Grashof, Festigkeitslehre, Berlin 1866, S. 165 u. folg. Später. (S. 208 u. folg.) sucht allerdings Grashof die Methode auf das St. Venantsche Problem zurückzuführen. Wenn jedoch Grashof die Funktion $B_0$ (nach Grashof $Q_0$), auf welche das St. Venantsche Problem führt, sich in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der Koordinaten entwickelt denkt und nur die ersten Glieder berücksichtigt, so kommt dieses für nicht unendlich dünne Stäbe einem Verzicht auf die St. Venantsche Lösung gleich und einer Bestimmung von $\tau_x$ und $\tau_y$ aus den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung, wobei für $\tau_x$ und $\tau_y$ möglichst einfache Funktionen zu nehmen sind. A. Föppl ist viel vorsichtiger als Grashof, indem er es unentschieden läßt, ob die technische Methode auch bei anderen Querschnitten als Ellipse und Rechteck zu brauchbaren Ergebnissen führt. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, Leipzig 1897, S. 327 u. folg. — Siehe ferner F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 134, sowie S. 238 u. folg. Auch A. Castigliano empfiehlt ein Verfahren nach der technischen Methode A. Castigliano, Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, Deutsche Ausgabe, Wien 1886, S. 92.

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist ein doppelter:

1) Es soll dieses von Grashof vorgesehene Probieren beseitigt werden durch Angabe einer ganz bestimmten Regel, die es ermöglicht, die gesuchten einfachsten Werte von $\tau_x$ und $\tau_y$, welche den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung genügen, sofort anzuschreiben.

2) Es soll die technische Methode kritisiert werden durch Vergleichung mit der Methode von St. Venant.

## § 2.

Infolge der Gleichungen (1) stellt Herr L. Prandtl[1]) die Spannungskomponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ dar durch die Ableitungen einer Funktion $U$:

$$(7)\qquad \begin{cases} \tau_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \tau_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

Dann sind die Kurven

$$U = \text{const.}$$

die *Spannungslinien* des Querschnittes, d. h. die Linien, deren Tangente in jedem Punkte die Richtung der resultierenden Spannung angibt.

Die resultierende Spannung selbst hat, wie Herr L. Prandtl gezeigt hat, die Größe

$$(8)\qquad \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial n},$$

wenn $\frac{\partial U}{\partial n}$ die Ableitung der Funktion nach der Normale der durch den betreffenden Punkt des Querschnittes gehenden Spannungslinie bedeutet.

Außerdem wird infolge der Grenzbedingung für die Spannungskomponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ die *Randkurve des Querschnittes eine Spannungslinie sein.*

Da es infolge der Gleichungen (7) nur auf die Ableitungen von $U$ ankommt, so kann in $U$ über eine additive Konstante verfügt werden.

1) L. Prandtl, „Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt.“ Jahresber. d. deutschen Math.-Ver., 13. Bd., 1904, S. 31. Erst durch diese Arbeit des Herrn Prandtl bin ich, da ich die Naturforscher-Versammlung 1903 nicht besucht habe, zur Kenntnis seiner neuen Darstellung der Torsionsspannungen gelangt. Auf dieselbe Darstellung war ich vollkommen unbeeinflußt von Herrn Prandtl gekommen. Als die Arbeit des Herrn Prandtl erschien, war die vorliegende Abhandlung wie die nachfolgende „Über einige Folgerungen, die sich aus dem Satze von Green für die Torsion von Stäben ergeben“ schon druckfertig hergestellt.

Es ist also gleichgültig, welchen konstanten Wert die Funktion $U$ am Rande annimmt. Daher ist es gestattet festzusetzen, wie dieses im folgenden geschieht, *daß die Funktion am Rande den Wert Null haben soll.*[1])

## § 3.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß durch die Gleichungen (7), wo $U$ eine Funktion ist, die am Rande des Querschnittes Null sein soll, die Gleichungen (2) und (3) von selbst befriedigt werden, während die Gleichung (4) nur auf die Bestimmung einer multiplikativen Konstanten führt.

Bei Einsetzung der Werte von (7) in die Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{\partial U}{\partial x}\, df = 0, \\ &\int \frac{\partial U}{\partial y}\, df = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Die hier auftretenden Flächenintegrale lassen sich sofort in Randintegrale verwandeln. Es ist

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\, df = -\int U \cos(nx) \cdot ds,$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial y}\, df = -\int U \cos(ny) \cdot ds.$$

Da aber die Funktion $U$ am Rande Null ist, so ist

$$\int U \cos(nx) \cdot ds = 0,$$

$$\int U \cos(ny) \cdot ds = 0.$$

Die Gleichungen (9) und daher die Gleichungen (2) und (3) werden durch die gemachte Annahme befriedigt.

Bei Einsetzung der Werte von (7) in die Gleichung (4) ergibt sich

$$M_t + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y\right) df = 0. \tag{10}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x = \frac{\partial (Ux)}{\partial x} - U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cdot y = \frac{\partial (Uy)}{\partial y} - U,$$

---

1) Durch diese Festsetzung, daß $U$ am Rande Null sein soll, die von Herrn L. Prandtl noch nicht gemacht wird, ergibt sich eine Vereinfachung.

daher

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x\,df = \int \frac{\partial (Ux)}{\partial x}\,df - \int U\,df,$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y\,df = \int \frac{\partial (Uy)}{\partial y} \cdot df - \int U\,df.$$

Die beiden rechts zuerst stehenden Integrale lassen sich in Randintegrale verwandeln

$$\int \frac{\partial (Ux)}{\partial x} \cdot df = -\int Ux \cdot \cos(nx)\,ds,$$

$$\int \frac{\partial (Uy)}{\partial y} \cdot df = -\int Uy \cdot \cos(ny)\,ds,$$

welche beide gleich Null sind, da die unter dem Integrale stehende Funktion $U$ am Rande den Wert Null besitzt.

Es ist daher

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x\,df = -\int U\,df,$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y\,df = -\int U\,df$$

und aus der Gleichung (10) bezw. (4) folgt

$$M_t = 2\int U\,df. \tag{11}$$

Diese Gleichung (11) führt nur auf die Bestimmung einer multiplikativen Konstanten A. Wird nämlich gesetzt

$$U = A\,V, \tag{12}$$

wo $V$ irgend eine Funktion ist, welche wie $U$ am Rande des Querschnittes Null ist, so folgt aus Gleichung (11):

$$A = \frac{M_t}{2\int V\,df}.\text{[1]} \tag{13}$$

§ 4.

Die ganze Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine Funktion $U$ zu finden, welche am Rande des Querschnittes den Wert Null annimmt. Daß im übrigen diese Funktion $U$ nebst ihren ersten Ableitungen im Innern des Querschnittes endlich, stetig und eindeutig sein muß, ist selbstverständlich.

1) Die Formeln (11) und (13) sind schon in der Arbeit des Herrn Prandtl enthalten.

Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Randkurve, so wird der Bedingung, daß $U$ am Rande Null sein soll, genügt, wenn gesetzt wird

$$U = A F(x, y) \cdot \Psi(x, y), \tag{14}$$

wobei $\Psi(x, y)$ eine willkürliche Funktion ist, welche am Rande jedenfalls nicht unendlich groß sein darf.

Die technische Methode fordert nun, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ möglichst einfache Funktionen sind, bezw. für eine algebraische Begrenzungskurve ganze Funktionen sind von möglichst niedrigem Grade. Dieser Forderung wird genügt, wenn gesetzt wird:

$$\Psi(x, y) = 1,$$

so daß

$$U = A \cdot F(x, y). \tag{15}$$

Dann ist

$$\begin{cases} \tau_x = A \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \\ \tau_y = - A \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \end{cases} \tag{16}$$

wobei infolge der Gleichung (13)

$$A = \frac{M_t}{2 \int F(x, y) df}.\text{[1]} \tag{17}$$

Ist die Randkurve eine algebraische Kurve vom $n$ten Grade, so sind bei Zugrundelegung des Gesetzes (15), auf welches die technische Methode führt, die Spannungslinien

$$F(x, y) = \text{const.} \tag{18}$$

auch vom $n$ten Grade und die Komponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ der Spannung ganze Funktionen vom Grade $n - 1$. Ist insbesondere die Randkurve symmetrisch in bezug auf die Koordinatenachsen, so ist

$\tau_x$ eine ungerade Funktion in bezug auf $x$ und eine grade Funktion in bezug auf $y$,

$\tau_y$ eine grade Funktion in bezug auf $x$ und eine ungerade in bezug auf $y$.

1) Es möge hier bemerkt werden, daß der Fall

$$\int F(x, y) df = 0,$$

wodurch $A$ unendlich groß würde, jedenfalls dann nicht auftreten kann, wenn die Kurve

$$F(x, y) = 0$$

einen einzigen geschlossenen Bereich vollständig abgrenzt, da im Innern dieses Bereiches die Funktion $F(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen haben muß.

Hierdurch werden die Forderungen, die sich aus der Symmetrie des Querschnittes für die Spannungen ergeben, von selbst befriedigt.

Im folgenden sollen unter Zugrundelegung des Gesetzes (15) die Rechnungen für einige spezielle Querschnitte durchgeführt werden.

## § 5.

### Der Querschnitt sei eine Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Es ist daher zu setzen:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Die Gleichung der Spannungslinien wird

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \text{const.}$$

*Die Spannungslinien sind somit eine Schar von ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.*

Es ist nun

$$\int F(x, y)\,df = \int \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) df = -\tfrac{1}{2}\pi ab.$$

Die Gleichung (17) ergibt für die Konstante $A$:

$$A = -\frac{M_t}{\pi ab},$$

und die Funktion $U$ wird

$$U = -\frac{M_t}{\pi ab} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{19}$$

Daher folgt für die Komponenten der Spannung:

$$\begin{cases} \tau_x = -\dfrac{2M_t}{\pi a^3 b} \cdot x, \\ \tau_y = +\dfrac{2M_t}{\pi a b^3} \cdot y. \end{cases} \tag{20}$$

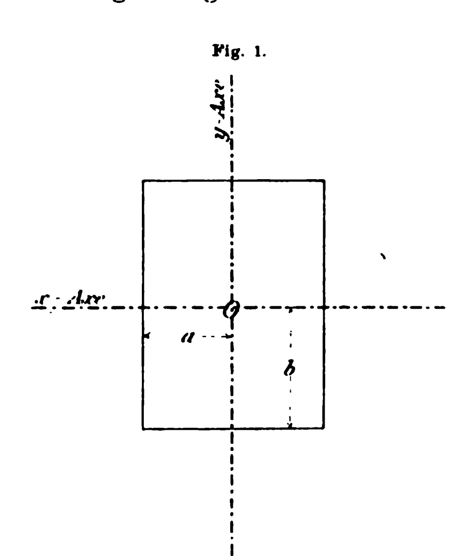
Dies sind aber bekannte Gleichungen. Die Aufgabe braucht nicht weiter durchgeführt zu werden.

### Der Querschnitt sei ein Rechteck.

Die Seiten des Rechteckes sollen die Längen $2a$ und $2b$ haben. Die Begrenzung ist durch die vier Geraden gebildet:

$$x - a = 0,$$
$$x + a = 0,$$
$$y - b = 0,$$
$$y + b = 0.$$

Fig. 1.




Die Gleichung der Begrenzungskurve ist somit:

$$(x-a)(x+a)(y-b)(y+b)=0$$

oder

$$(x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) = 0.$$

Es ist daher zu setzen

$$F(x, y) = (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2).$$

Die Spannungslinien

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = \text{const.}$$

sind Kurven vierten Grades (siehe Fig. 2, auf welcher die Spannungslinien gezeichnet sind[1])).

Nun ist:

$$\int F(x, y) df = 4 \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} (x^2 - a^2)(y - b^2) dx dy = \tfrac{16}{9} a^3 b^3$$

und daher

$$A = \tfrac{9}{32} \frac{M_t}{a^3 b^3}.$$

Die Funktion $U$ wird somit

$$U = \tfrac{9}{32} \frac{M_t}{a^3 b^3} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2), \tag{21}$$

und die Komponenten der Spannung werden:

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_x &= \tfrac{9}{16} \frac{M_t}{a^3 b^3} \cdot x \cdot (y^2 - b^2), \\ \tau_y &= - \tfrac{9}{16} \frac{M_t}{a^3 b^3} \cdot y \cdot (x^2 - a^2). \end{aligned} \right. \tag{22}$$

---

1) Die Figuren 2 und 4 hat Herr W. Schlink die Freundlichkeit gehabt anzufertigen.

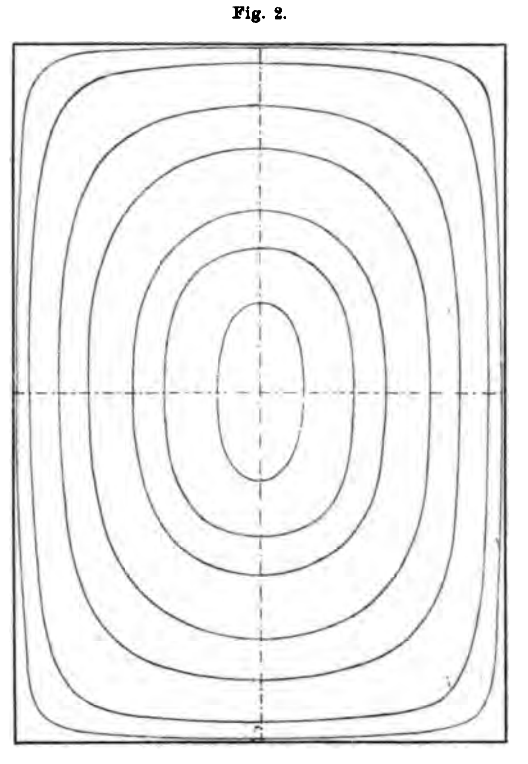
Die resultierende Spannung ist

(23) $$\tau = \frac{9}{16}\frac{M_t}{a^3 b^3}\sqrt{x^2(y^2-b^2)^2 + y^2(x^2-a^2)^2},$$

und die Kurven gleicher Spannung sind

$$x^2(y^2-b^2)^2 + y^2(x^2-a^2)^2 = \text{const.}$$

Fig. 2.



Die maximale Spannung tritt auf in der Mitte der längeren Rechtecksseiten und ist:

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16}\frac{M_t}{a^2 b}, \text{ wenn } a \leqq b.$$

Im übrigen nimmt am Rande die Spannung von den Mitten der Seiten aus nach den Ecken zu ab. In den Eckpunkten ist die Spannung Null.

Diese Ergebnisse befriedigen insofern, als sie im wesentlichen übereinstimmen mit der Vorstellung, die man sich über den physikalischen Vorgang machen wird.

Es haben sich auch hier wieder bekannte Resultate ergeben.[1])

### Der Querschnitt sei ein Kreuz.

Die Arme des Kreuzes seien gleich lang und gleich breit vorausgesetzt. Die Randkurve wird durch die Geraden gebildet (siehe Fig. 3):

$$\begin{aligned} x - a = 0, &\quad y - a = 0, \\ x + a = 0, &\quad y + a = 0, \\ x - b = 0, &\quad y - b = 0, \\ x + b = 0, &\quad y + b = 0. \end{aligned}$$

---

1) Siehe Grashof, Festigkeitslehre, Berlin 1866. S. 169.

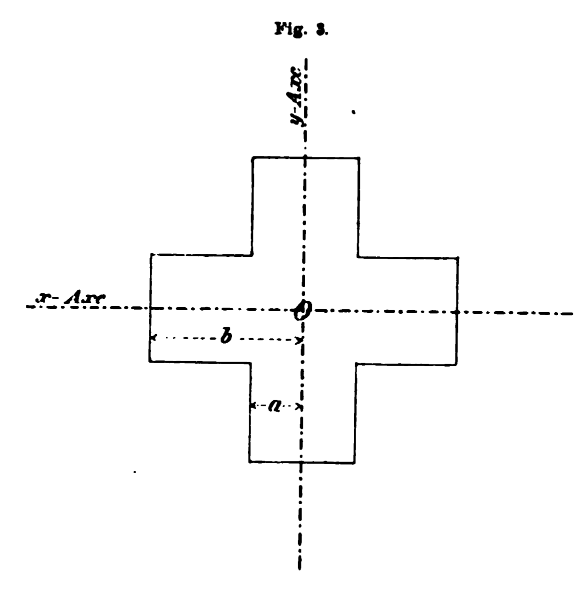
Die Gleichung der Randkurve ist

$$(x-a)(x+a)(x-b)(x+b)(y-a)(y+a)(y-b)(y+b)=0$$

oder

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)=0.$$

Fig. 3.




Es ist somit zu setzen

$$F(x, y)=(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2).$$

Die Spannungslinien

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)=\text{const.}$$

sind Kurven achten Grades (siehe Fig. 4).

Nun wird

$$\int F(x, y)df=\int(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)df$$
$$=\tfrac{16}{225}a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]$$

und daher

$$A=\frac{225\,M_t}{32a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]}.$$

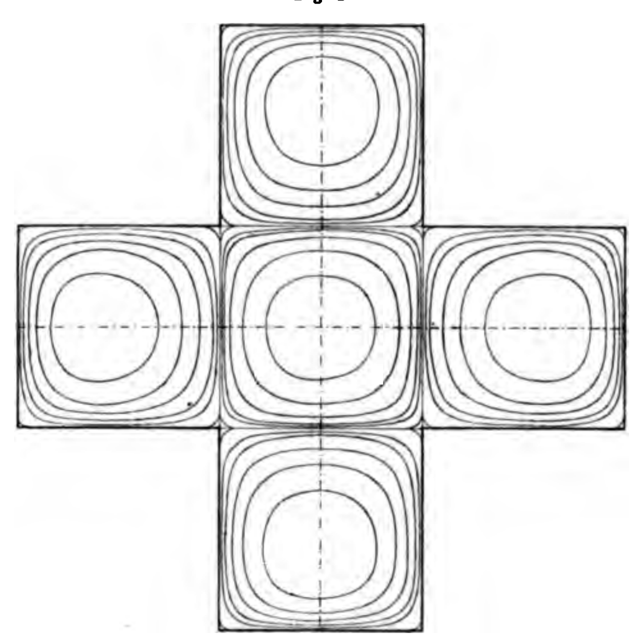
Somit ist

$$U=\frac{225\,M_t(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)}{32a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]} \tag{24}$$

und die Komponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ der tangentialen Spannung werden

$$(25)\qquad \begin{cases} \tau_x = \dfrac{225 M_t \cdot x(2x^2 - (a^2 + b^2))(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{16a^2(5b^2 - a^2)[2b^2(5a^2 - b^2) - a^2(5b^2 - a^2)]}, \\ \tau_y = -\dfrac{225 M_t \cdot y(2y^2 - (a^2 + b^2))(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{16a^2(5b^2 - a^2)[2b^2(5a^2 - b^2) - a^2(5b^2 - a^2)]}. \end{cases}$$

Fig. 4.



Die größte Spannung am Rande tritt auf in den Schnittpunkten der Begrenzung mit den Koordinatenachsen und zwar ist dieselbe

$$(26)\qquad \tau_{\max} = \frac{225 M_t a^2 b^3 (b^2 - a^2)}{16a^3(5b^2 - a^2)[2b^2(5a^2 - b^2) - a^2(5b^2 - a^2)]}.$$

Die hier für das Kreuz erhaltenen Ergebnisse befriedigen insofern weniger, als die Spannungslinien bei physikalischer Überlegung des Vorganges sicherlich nicht die Form haben werden, die sich hier durch die Rechnung ergeben hat.

## § 5.

In den vorstehend behandelten Beispielen sind jedesmal die einfachsten ganzen Funktionen für $\tau_x$ und $\tau_y$ bestimmt, welche den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung genügen. Die gefundenen Ergebnisse sind demgemäß die richtigen auf Grund der

technischen Methode. Nun muß doch verlangt werden, daß sich beim Kreuz wie beim Rechteck richtige Resultate ergeben, wie auch das Verhältnis der Abmessungen $a$ und $b$ gewählt wird. Man kann aber vom Kreuz, wie vom Rechteck aus zu einem Quadrate mit der Seite $2a$ übergehen, indem man $a = b$ setzt. Es müßten daher in beiden Fällen sich die nämlichen Resultate ergeben. Es soll geprüft werden, ob dieses der Fall ist.

Setzt man in der Formel (21) des Rechteckes $a = b$, so wird:

$$U = \frac{9}{32}\frac{M_t}{a^6}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

und die Spannungslinien werden

$$(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = \text{const.}$$

Setzt man in der Formel (24), die sich für das Kreuz ergeben hat, $a = b$, so folgt

$$U = \frac{225}{512}\frac{M_t}{a^{10}}[(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)]^2$$

und die Spannungslinien werden

$$(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = \text{const.}$$

*Die Spannungslinien stimmen somit tatsächlich in beiden Fällen überein.*

Anders dagegen ist es mit den Komponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ der Spannung und infolge davon auch mit der resultierenden Spannung.

Setzt man in den für das Rechteck erhaltenen Formeln (22) $a = b$, so wird:

$$(27)\qquad \begin{cases} \tau_x = \dfrac{9}{16}\dfrac{M_t}{a^6}\cdot x(y^2 - a^2), \\ \tau_y = -\dfrac{9}{16}\dfrac{M_t}{a^6}\cdot y(x^2 - a^2). \end{cases}$$

Man sieht, daß hier eine Lösung für das Quadrat vorliegt, bei welcher am Rande des Quadrates Spannungen auftreten. Insbesondere ist die größte Spannung in den Mitten der Seiten und hat den Wert

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16}\frac{M_t}{a^3}.$$

Setzt man dagegen $a = b$ in den für das Kreuz erhaltenen Formeln (25), so folgt

$$(28)\qquad \begin{cases} \tau_x = \dfrac{225}{128}\dfrac{M_t}{a^{10}}\cdot x\cdot(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)^2, \\ \tau_y = -\dfrac{225}{128}\dfrac{M_t}{a^{10}}\cdot y\cdot(x^2 - a^2)^2\cdot(y^2 - a^2). \end{cases}$$

Hier hat man für das Quadrat eine Lösung erhalten, bei welcher der Rand vollkommen spannungslos ist. Eine solche Lösung möchte auf Grund von physikalischen Überlegungen als eine durchaus unmögliche Lösung zu bezeichnen sein, und doch hat sie sich aus der Methode durch richtige Überlegungen ergeben.

*Man erkennt überhaupt, daß die Gleichungen (27) und (28) zwei vollkommen verschiedene Lösungen für das Quadrat darstellen.*

Da man aber das Quadrat nicht allein aus dem Rechteck und Kreuz, sondern aus allen möglichen Figuren durch einen Grenzübergang erhalten kann, und sich jedesmal andere Werte für $\tau_x$ und $\tau_y$ ergeben werden, so folgt, daß selbst die Forderung, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ ganze Funktionen von möglichst niedrigem Grade sein sollen, nicht auf eine einzige Lösung, sondern auf unendlich viele, ganz verschiedene, Lösungen für das Quadrat führt.

Was aber hier von dem Quadrat gezeigt ist, läßt sich in gleicher Weise für jede andere Querschnittsform nachweisen. Es ergibt sich daher der allgemeine Satz:

*Die technische Methode mit der Forderung, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ ganze Funktionen sein sollen von möglichst niedrigem Grade, liefert nur dann eine einzige Lösung für den gegebenen Querschnitt, wenn die Formeln direkt für diesen Querschnitt hergeleitet werden. Dagegen führt sie auf unendlich viele, ganz von einander verschiedene, Lösungen, sobald man sich die Formeln für den gegebenen Querschnitt durch einen Grenzübergang aus denen für einen komplizierteren Querschnitt herleitet.*[1])

Da aber ein solcher Grenzübergang gestattet sein muß, so entsteht die Frage, ist der technischen Methode überhaupt irgend ein Wert beizumessen? Es kann doch sicherlich kein richtiges Verfahren sein, wenn man sich unter den unendlich vielen Lösungen, auf welche die technische Methode führt, einfach diejenige aussucht, welche für die weiteren Rechnungen am bequemsten ist.

Es sollen die Gründe untersucht werden, welche die unendliche Vieldeutigkeit der Lösung bei der technischen Methode hervorrufen.

---

1) Nebenbei möge bemerkt sein, das man leicht für jeden Querschnitt Spannungszustände angeben kann, und sogar unendlich viele, die den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung entsprechen und bei denen der ganze Rand vollkommen spannungsfrei ist. Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Randkurve, so braucht man nur zu setzen:

$$U = A[F(x, y)]^n, \text{ wo } n > 1.$$

## § 6.

Vergleicht man die vorstehenden Ergebnisse mit den Resultaten von St. Venant, so fällt zunächst ins Auge, daß sich hier unendlich viele Lösungen ergeben haben, während das Problem von St. Venant für jeden Querschnitt nur eine einzige, ganz bestimmte Lösung liefert. Es ist dieses die Folge davon, daß Voraussetzungen, die bei dem St. Venantschen Probleme gemacht werden, bei der technischen Methode fallen gelassen sind.

Die aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

hergeleitete Gleichung (1), in welcher $\tau_x$ und $\tau_y$ unabhängig sein sollen von $z$, ist schon erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

während das St. Venantsche Problem für den Fall der Torsion voraussetzt:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_z = 0.$$

Die Voraussetzungen, welche der technischen Methode zugrunde liegen, sind demgemäß viel allgemeiner, als die bei St. Venant. Daher kommen bei der technischen Methode die unendlich vielen Lösungen.

Es sollen die Bedingungen untersucht werden, welche für die Funktion $U$, die $\tau_x$ und $\tau_y$ bestimmt, bestehen, damit sich die Lösung von St. Venant ergibt.

Bei St. Venant ergibt sich für $\tau_x$ und $\tau_y$[1]):

$$(29) \qquad \begin{cases} \tau_x = -\dfrac{E b_0}{2(1+\mu)}\left(x - \dfrac{\partial B_0}{\partial y}\right), \\ \tau_y = \dfrac{E b_0}{2(1+\mu)}\left(y + \dfrac{\partial B_0}{\partial x}\right), \end{cases}$$

1) Siehe die mustergültige Darstellung des Problemes von St. Venant in A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. S. 91.

wo $B_0$ eine Funktion von $x$ und $y$ ist, welche der Differentialgleichung

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = 0$$

und der Grenzbedingung

$$\frac{\partial B_0}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial B_0}{\partial y}\cos(ny) = x\cos(ny) - y\cos(nx)$$

genügt.

Sollen nun die Gleichungen (7) auf die Lösung von St. Venant führen, so muß sein

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\cdot\left(x - \frac{\partial B_0}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\cdot\left(y + \frac{\partial B_0}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\frac{\partial B_0}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\cdot y$$
$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\frac{\partial B_0}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\cdot x$$

Werden die aus diesen Gleichungen folgenden Werte der Ableitungen $\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}$ in Gleichung (30) eingesetzt, so ergibt sich eine Identität. Dagegen folgt durch Differentiation der ersten Gleichung nach $y$ und der zweiten Gleichung nach $x$:

$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\frac{\partial^2 B_0}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{Eb_0}{2(1+\mu)},$$
$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)}\cdot\frac{\partial^2 B_0}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{Eb_0}{2(1+\mu)},$$

und daraus für $U$ die Differentialgleichung

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{Eb_0}{1+\mu} = 0,$$ [1]

welche erfüllt sein muß, wenn die Funktion $U$ die St. Venantsche Lösung ergeben soll.

Um die Gleichung (31) für $U$ weiter zu vereinfachen, sei gesetzt

$$(32)\qquad U = \frac{Eb_0}{1+\mu}\cdot\left(W - \tfrac{1}{4}(x^2+y^2)\right).$$

Dann ergibt sich für $W$ die Differentialgleichung[1])

$$(33)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

1) Diese Gleichung (31) findet sich schon in anderer Weise hergeleitet in der Arbeit des Herrn L. Prandtl.

und, da an dem Rande $U = 0$ sein soll, die Grenzbedingung

(33a) $$W = \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$[1]

Durch die Differentialgleichung für $W$, welche besagt, daß $W$ wie $B_0$ der reelle Teil einer Funktion komplexen Argumentes ist, und durch die Grenzbedingung, die sich für $W$ ergeben hat, ist $W$ in gleicher Weise wie die Funktion $B_0$ für jeden Querschnitt nach dem Prinzipe von Dirichlet eindeutig bestimmt. Diese sich so ergebende Funktion $W$ muß die St. Venantsche Lösung liefern. Ob nun bei der Auffindung der Lösung von St. Venant die Funktion $B_0$ oder die Funktion $W$ mit Hilfe der Methoden der Funktionentheorie bestimmt wird, ist gleichgültig. Man könnte vielleicht die Bestimmung von $W$ für zweckmäßiger halten, da die Funktion $W$ in unmittelbarerer Weise auf die wichtigen Spannungslinien führt.

Die Verallgemeinerung in den Voraussetzungen bei der technischen Methode gegenüber der Methode von St. Venant hat zur Folge, daß die Differentialgleichung (31) für $U$ fallen gelassen ist, welche bewirken würde, daß man die St. Venantsche Lösung erhält.

Prüft man bei den verschiedenen durchgerechneten Beispielen die Funktion $U$ darauf hin, ob sie der Gleichung (31) genügt, so findet man, *daß dieses nur bei der Ellipse der Fall ist.* Die für das Rechteck schon von Grashof gegebenen Formeln (22), sowie die hier für das Kreuz entwickelten Formeln (25) liefern keine Lösung, die dem St. Venantschen Probleme entspricht.[2]

Die Gründe, die den Techniker veranlaßt haben, abgesehen von dem Falle der Ellipse auf die St. Venantsche Lösung zu verzichten, waren selbstverständlich die folgenden:

Die Bestimmung der Funktion $B_0$ ist eine so schwierige, daß deren Auffindung für jeden einzelnen Querschnitt ein Problem für sich bildet.

---

1) Vergl. A. E. H. Love, A Treatise of the mathematical theory of elasticity. Vol. I. Cambridge 1892. p. 160.

2) Daß die für das Rechteck erhaltenen Gleichungen (22) eine Annäherung an die dem St. Venantschen Probleme sind, folgt schon aus der Ähnlichkeit der Spannungslinien, die sich in den beiden Fällen ergeben. Vergl. die Tafel mit der von L. Prandtl für das Rechteck gegebenen Zeichnung der Spannungslinien. Dagegen bedarf die Frage, innerhalb welcher Grenzen für das Verhältnis $\frac{a}{b}$ die Formel (23) eine für technische Zwecke genügende Annäherung an die aus dem St. Venantschen Problem folgende Formel liefert, einer besonderen Untersuchung, die hier nicht geführt werden soll.

Dazu kommt, daß, abgesehen von dem Falle der Ellipse, in den wenigen bislang behandelten Fällen diese Funktion so kompliziert ist, daß der Techniker sie für seine weiteren Rechnungen nicht zu verwenden imstande ist.

## § 7.

Es frägt sich nun, was soll der Techniker tun, wenn er einen stabförmigen Körper hat, auf den in Ebenen senkrecht zur Achse Kräftepaare wirken?

Die Berechnung des Körpers nach dem St. Venantschen Probleme, so schön dasselbe ist, verbietet sich schon von selbst durch die Schwierigkeit der Untersuchung und die Kompliziertheit der Formeln.[1]) Dazu kommt ein physikalisches Bedenken: die Annahme des St. Venantschen Problemes

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_z = 0,$$

also die Annahme, daß sogen. *reine Torsion* vorliegt, ist eine willkürliche und in keiner Weise in allen Fällen durch Versuche als bewiesen zu betrachten.

Was die Berechnung nach der technischen Methode betrifft, so kann man allerdings, wie dieses gezeigt ist, leicht eine einfache Lösung herleiten, mit der man zu rechnen imstande ist. Aber schon die Forderung, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ ganze Funktionen sind von möglichst niedrigem Grade, führt in ihren Konsequenzen auf unendlich viele, ganz voneinander verschiedene Lösungen. Wie wird dieses erst der Fall sein, wenn man die durchaus willkürliche Forderung, daß $\tau_x$ und $\tau_y$ und damit $U$ ganze Funktionen von möglichst niedrigem Grade sind, fallen läßt und für $U$ jede ganze Funktion und vielleicht auch noch transzendente Funktionen zuläßt? Man hat gar keine Gewähr dafür, daß diejenige Lösung, die man aus irgend einem rechnerischen Grunde herausgreift, eine Annäherung an die tatsächlichen Spannungsverhältnisse liefert.

Nur in einem einzigen, ganz speziellen Falle kann vielleicht von vornherein behauptet werden, daß die technische Methode eine Annäherung an den tatsächlichen Spannungszustand liefert, nämlich in dem Falle eines sehr dünnen Stabes, in dem die höheren Potenzen der Koordinaten $x$ und $y$ der Punkte des Querschnittes vernachlässigt werden dürfen. Bildet man sich in diesem Falle bei einer Begrenzung durch eine algebraische Kurve $n$ten Grades die Funktion $U$ nach der

1) Daß man für jeden Querschnitt bei Torsionsinanspruchnahme die St. Venantsche Lösung durch ein Experiment vermittels Seifenblasen finden kann, hat L. Prandtl in der schon zitierten Arbeit gezeigt.

Gleichung (15), wobei jedoch nicht ein Übergang von einem komplizierteren Querschnitt zum gegebenen vorgenommen werden darf, so erhält man eine angenäherte Lösung für die Spannungskomponenten $\tau_x$ und $\tau_y$, wie sie sich ergibt, wenn alle Potenzen der Koordinaten von der $n$ten oder einer höheren Ordnung vernachlässigt werden.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt, daß die technische Methode, auch wenn die Formeln noch so bequem sind, bei der Dimensionenberechnung nur mit der größten Vorsicht angewendet werden darf. *Man muß es sich zur Regel machen, keine Formel, die sich durch die technische Methode ergeben hat, bei seinen Berechnungen zu verwenden, von der nicht durch Versuche nachgewiesen ist, daß sie eine genügende Annäherung an die tatsächlichen Spannungsverhältnisse liefert.*

Hier ist dem kontrollierenden Experiment ein weiter Spielraum gegeben.

Darmstadt, im Februar 1904.

---

# Über einige Folgerungen, die sich aus dem Satz von Green für die Torsion von Stäben ergeben.

Von L. Henneberg in Darmstadt.

## §. 1.

In einer Arbeit von Herrn L. Prandtl[1]) sind die Spannungen, die in einem auf Torsion beanspruchten Stabe auftreten, in folgender Weise dargestellt:

Ist die $z$-Achse des Koordinatensystemes in die Achse des Stabes gelegt, so sind die Spannungskomponenten $\tau_x$ und $\tau_y$ in einem zur $z$-Achse senkrechten Querschnitte darstellbar in der Form

$$(1)\qquad \begin{cases} \tau_x = \quad A\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \tau_y = -A\dfrac{\partial V}{\partial y}, \end{cases}$$

wo $V$ eine für alle Punkte des Querschnittes endliche, stetige und eindeutige Funktion der Koordinaten $x$ und $y$ ist, *die am ganzen Rande*

1) Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt. Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 13. Bd. 1904 S. 31.

*des Querschnittes den Wert Null annimmt*[1]), während sich für die Konstante $A$ der Wert ergibt

$$A = \frac{M_t}{2\int V d f}, \tag{2}$$

falls $M_t$ das Torsionsmoment bedeutet, welches in der vorliegenden Arbeit positiv eingeführt werden soll.

Ist die Funktion $V$ gefunden, so stellen die Kurven

$$V = \text{const.}$$

die *Spannungslinien* des Querschnittes dar, d. h. diejenigen Linien, deren Tangente die Richtung der resultierenden Spannung liefert. Die resultierende Spannung selbst wird

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = A\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \pm A\frac{\partial V}{\partial \nu}, \tag{3}$$

wenn $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die Ableitung von $V$ nach der Normale der Spannungslinie bedeutet.[2])

Die *orthogonalen Trajektorien*[3]) der Spannungslinien, die auch definiert werden können als die Kurven, für welche

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

wo hier $\frac{\partial V}{\partial n}$ die Ableitung nach der Normale der Trajektorie bedeutet, haben die Eigenschaft, daß in jedem Punkte die resultierende Spannung in die Normale der Trajektorie fällt.

Soll die Funktion $V$ die St. Venantsche Lösung des auf Torsion beanspruchten Querschnittes ergeben, so muß dieselbe der Differentialgleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -1 \tag{4}$$

genügen. Durch diese Differentialgleichung und die Grenzbedingung ist die Funktion $V$ für jeden Querschnitt bestimmt und läßt sich, wie

---

1) Durch diese von L. Prandtl nicht gemachte Festsetzung tritt eine Vereinfachung ein, siehe die vorhergehende Abhandlung des Verfassers „Zur Torsionsfestigkeit“, S. 225 dieses Heftes.

2) Es ist hier stets mit $\nu$ die Normale der durch den betreffenden Punkt gehenden Spannungslinie bezeichnet; mit $n$ dagegen die Normale einer anderen Kurve.

3) Die orthogonalen Trajektorien sind von Herrn Prandtl noch nicht eingeführt.

die von St. Venant eingeführte Funktion $B_0$ nach bekannten Methoden ermitteln.

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist, durch die Anwendung des Satzes von Green Sätze über die Spannungsverteilung im Querschnitt für die St. Venantsche Lösung eines auf Torsion beanspruchten Stabes zu erhalten. Die wichtigsten der Sätze von § 4 sind schon in der Arbeit des Herrn Prandtl erhalten, allerdings in anderer Weise hergeleitet, während die übrigen Paragraphen neue Sätze liefern. Die Beweisführung ist durchweg eine andere, als bei Herrn Prandtl.

## § 2.

Sind $U$ und $V$ zwei Funktionen, die im Innern eines vollständig begrenzten Bereiches endlich, stetig und eindeutig sind, so ist nach Green:

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int U\Delta V\,df-\int U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds,$$

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int V\Delta U\,df-\int V\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dy\;=\;\int(V\Delta U-U\Delta V)\,df,$$

wo $df$ das Flächenelement des Bereiches und $n$ die nach dem Innern gerichtete Normale bedeutet.

Ist in diesen Gleichungen $V$ diejenige Funktion, auf welche die St. Venantsche Lösung führt, so ergibt sich infolge der Gleichungen (4):

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=\int U\,df-\int U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds,\tag{5a}$$

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int V\Delta U\,df-\int V\frac{\partial U}{\partial n}\,ds,\tag{5b}$$

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds=\int(V\Delta U+U)\,df.\tag{5c}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich in derselben Weise, wie dieses in der Potentialtheorie und Hydrodynamik geschieht, nämlich durch Verfügung über die Funktion $U$ und durch Wahl des Bereiches, auf welchen die Integration erstreckt werden soll, Sätze bezüglich der Spannungsverteilung im Querschnitte herleiten.

§ 3.

In der Gleichung (5a) sei zunächst $U = V$ gesetzt und das Integral über den ganzen Querschnitt erstreckt. Dann folgt in Berücksichtigung der Grenzbedingung der Funktion $V$:

$$\int\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right) df = \int V df$$

und daraus nach Gleichung (2) und (3):

$$\int \tau^2 df = \tfrac{1}{2} A \cdot M_t. \tag{6}$$

Daher ist die Konstante $A$, wie das über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Integral

$$\int V df$$

notwendig *positiv*. Die Funktion $V$ ist somit im ganzen Innern des Querschnittes positiv, falls sie überhaupt im ganzen Innern dasselbe Vorzeichen hat.

§ 4.

Es sei die Funktion $U$ gleich einer Konstanten gesetzt. Dann ergibt die Gleichung (5a)

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = F, \tag{7}$$

wenn $F$ den Inhalt des Bereiches darstellt, über dessen Begrenzung das Integral auf der linken Seite erstreckt wird.

Es sei die Gleichung (7) auf einen von einer Spannungslinie begrenzten Bereich von dem Inhalte $F_1$ angewandt. Dann ist, wie Herr Prandtl gefunden hat

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} ds = F_1. \tag{8}$$

Da aber die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ längs einer Spannungslinie dasselbe Vorzeichen haben muß, so folgt, daß auf jeder Spannungslinie die Ableitung von $V$ nach der nach innen gerichteten Normale positiv ist. Durchläuft man daher eine Trajektorie von ihrem Endpunkte in der Randkurve des Querschnittes aus, so muß die Funktion $V$ fortwährend wachsen, so lange man nicht eine Spannungslinie zum zweiten Male überschreitet. Daraus folgt, daß die Funktion $V$, die am Rande des Querschnittes Null ist, im ganzen Innern *positiv* sein muß und stets nach dem Innern zu wächst.

Infolge der Gleichung (3) ergibt sich für den absoluten Wert der Spannung $\tau$ in einem Punkte $P$ des Querschnittes

$$\tau = A\frac{\partial V}{\partial \nu}, \tag{9}$$

wo $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die Ableitung von $V$ nach der nach innen gerichteten Normale der durch $P$ gehenden Spannungslinie bedeutet. Da aber

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\nu y),$$

so ist nach (1):

$$\tau = \tau_x \cos(\nu x) - \tau_y \cos(\nu y).$$

Da $\tau$ positiv ist, so bestimmt diese Gleichung bei gegebenen Spannungslinien den Richtungssinn der in die Tangente derselben fallenden Spannung, *und zwar muß die Spannung so gerichtet sein, daß das Drehmoment derselben von einem Punkte der nach dem Inneren gerichteten Normale als Drehpunkt negativ, bezw. dem Torsionsmoment entgegengesetzt ist.*

Es seien die Spannungen wie Massen behandelt und demgemäß das über die Spannungslinie erstreckte Integral

$$\int \tau\, ds = A\int \frac{\partial V}{\partial \nu}\, ds = m_1$$

als die Spannungsmasse der Spannungslinie bezeichnet. Dann besagt Gleichung (8):

$$m_1 = AF_1, \tag{10}$$

d. h. *die Spannungsmasse einer Spannungslinie ist gleich dem Produkte der Konstanten A und dem Inhalte des von der Spannungslinie eingeschlossenen Flächenstückes.*

Werden zwei Spannungslinien betrachtet, welche die Flächenstücke $F_1$ und $F_2$ einschließen, so ergibt sich für deren Massen

$$m_1 - m_2 = A(F_1 - F_2).$$

Es folgt hieraus, daß die äußerste Spannungslinie, somit die Randkurve des Querschnittes, die größte Spannungsmasse hat, und daß die Spannungsmassen nach dem Innern des Querschnittes zu abnehmen.

Die ins Auge gefaßte Spannungslinie möge eine Länge $s_1$ haben. Dann ergibt die Gleichung (10) für die mittlere Spannung $\tau_1$ auf dieser Spannungslinie

$$\tau_1 = \frac{m_1}{s_1} = \frac{AF_1}{s_1}$$

und somit für die Differenz der mittleren Spannungen zweier Spannungslinien

$$\tau_1 - \tau_2 = A\left(\frac{F_1}{s_1} - \frac{F_2}{s_2}\right).$$

Da aber, wenn man nach dem Innern des Querschnittes geht, die Inhalte der von den Spannungslinien eingeschlossenen Flächen stärker abnehmen als deren Längen, so wird die größte mittlere Spannung in der Randkurve sein und die mittleren Spannungen werden, wenn man nach dem Innern des Querschnittes zu geht, fortwährend abnehmen, bis schließlich die mittlere Spannung und damit die Spannung überhaupt Null wird, was an der Stelle des Querschnittes eintritt, wo die Spannungslinie eine unendlich kleine Länge bekommt, also in einen Punkt übergeht.

Es sei die Gleichung (7) auf ein unendlich schmales Flächenstück $dF$ angewandt, welches durch zwei unendlich benachbarte Trajektorien und durch die kleinen Linienelemente $ds_1$ und $ds_2$ zweier Spannungslinien begrenzt ist. Dann ergibt sich, da längs der Trajektorie $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ ist:

$$\tau_1 ds_1 - \tau_2 ds_2 = A\,dF,$$

wenn $\tau_1$ und $\tau_2$ die Spannungen in den Linienelementen $ds_1$ und $ds_2$ bedeuten. Mit Hilfe dieser Gleichung ist man imstande, die Spannungen in dem ganzen von zwei benachbarten Trajektorien begrenzten Flächenstreifen anzugeben, falls die Spannung an einer einzigen Stelle des Streifens gegeben ist.

Wie die Gleichung (8), gestattet auch die allgemeinere Gleichung (7), bei welcher die Begrenzungskurve keine Spannungskurve zu sein braucht, eine mechanische Deutung:

Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos ny$$

und daher

$$A\frac{\partial V}{\partial n} = \tau_x \cos(nx) - \tau_y \cos(ny).$$

Wird mit $\alpha$ der Richtungswinkel der Tangente der Begrenzungskurve bezeichnet, sodaß

$$\cos(nx) = \sin\alpha, \quad \cos(ny) = -\cos\alpha$$

und ferner mit $\varphi$ der Richtungswinkel der resultierenden Spannung, sodaß

$$\tau_x = \tau\sin\varphi,$$
$$\tau_y = \tau\cos\varphi,$$

so wird

$$A\frac{\partial V}{\partial n} = \tau(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = \tau\cos\vartheta,$$

wenn $\vartheta$ der Winkel ist, den die resultierende Spannung mit der Tangente der Begrenzungskurve bildet.

Aus Gleichung (7) folgt somit für eine beliebige Begrenzungskurve

$$\int \tau\cos\vartheta\, ds = AF. \tag{11}$$

Wird daher unter

$$\int q\, ds,$$

wo $q = \tau\cos\vartheta$ die Projektion der resultierenden Spannung auf die Tangente der Begrenzungskurve des Bereiches ist, die Spannungsmasse dieser Kurve verstanden, so gilt der zuerst von L. Prandtl gefundene Satz, nach welchem die Spannungsmasse einer Spannungslinie gleich dem Produkte der Konstanten $A$ und der von der Spannungslinie eingeschlossenen Fläche ist, nicht allein für eine Spannungslinie, sondern auch für jede beliebige geschlossene Kurve.

Mit Hilfe der vorstehenden Sätze ist es leicht, sich ein Bild von der ganzen Spannungsverteilung im Querschnitt zu verschaffen, wenn das System der Spannungslinien gegeben ist.

## § 5.

Wird in den Gleichungen (5a) und (5b) einerseits $U = x$, andererseits $U = y$ gesetzt, so folgt, falls die Integrationsgrenze eine Spannungslinie ist, auf welcher die Funktion $V$ den Wert $V_0$ hat:

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} df = \int x\, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x\, ds = -V_0 \int \cos(\nu x)\, ds,$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial y} df = \int y\, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y\, ds = -V_0 \int \cos(\nu y)\, ds,$$

und daraus, in Berücksichtigung, daß die Integrale

$$\int \cos(nx)\, ds, \qquad \int \cos(ny)\, ds$$

über eine geschlossene Kurve erstreckt beide den Wert Null haben:

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} df = \int x\, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x\, ds = 0,$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial y} df = \int y\, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y\, ds = 0.$$

Die Gleichungen (9) und (1) ergeben somit:

$$(12)\qquad \begin{cases} \int \tau_x\,df = 0, \\ \int \tau_y\,df = 0, \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} A\int x\,df = \int \tau x\,ds, \\ A\int y\,df = \int \tau y\,ds, \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) sagen aus, *daß sämtliche Spannungskräfte, welche auf die von einer Spannungslinie begrenzte Fläche wirken, bei der Zusammensetzung sich zu einem Kräftepaare vereinigen.* Das Gleiche gilt von jeder Fläche, die durch zwei Spannungslinien begrenzt ist.

Die Gleichungen (13) lassen sich infolge von (10) schreiben:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\int x\,df}{F_1} = \dfrac{\int \tau x\,ds}{m_1}, \\ \dfrac{\int y\,df}{F_1} = \dfrac{\int \tau y\,df}{m_1}. \end{cases}$$

Nun sind aber

$$x_s = \frac{\int x\,df}{F_1}, \quad y_s = \frac{\int y\,df}{F_1}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes der von der betreffenden Spannungslinie begrenzten Fläche $F_1$ und

$$\xi_s = \frac{\int \tau x\,ds}{m_1}, \quad \eta_s = \frac{\int \tau y\,ds}{m_1}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes der Spannungsmasse der die Fläche $F_1$ begrenzenden Spannungslinie. Aus den Gleichungen (14) folgt daher:

$$x_s = \xi_s$$
$$y_s = \eta_s$$

d. h. *der Schwerpunkt der Spannungsmasse einer Spannungslinie fällt zusammen mit dem Schwerpunkt der von der Spannungslinie begrenzten Fläche.*

*Insbesondere fällt der Schwerpunkt der Spannungsmasse der Randkurve des Querschnittes in den Schwerpunkt des Querschnittes.*

Es ist leicht ersichtlich, daß in dem Falle eines in bezug auf die Koordinatenachsen symmetrischen Querschnittes alle diese Schwerpunkte in den Schwerpunkt des Querschnittes fallen.

§ 6.

Sätze, die sich auf die Trägheitsellipse der Spannungsmasse einer Spannungslinie beziehen, ergeben sich, wenn $U = xy$, $U = x^2$, $U = y^2$ gesetzt wird.

Es sei zunächst

$$U = xy$$

angenommen und als Integrationsgrenze eine Spannungslinie gewählt, auf welcher die Funktion $V$ einen Wert $V_0$ haben möge. Dann wird aus Gleichung (5c):

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} xy\,ds - V_0 \int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu} ds = \int xy\,df. \tag{15}$$

Nun ist

$$\frac{\partial (xy)}{\partial \nu} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} \cos \nu x + \frac{\partial (xy)}{\partial y} \cos (\nu y)$$
$$= y \cos (\nu x) + x \cos (\nu y)$$

und daher

$$\int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu} ds = \int y \cos (\nu x)\,ds + \int x \cos (\nu y)\,ds.$$

Da aber die beiden Integrale auf der rechten Seite Null sind, wie man sich leicht bei der Verwandlung derselben in Flächenintegrale überzeugen kann, so ist

$$\int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu} ds = 0$$

und somit

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} xy\,ds = \int xy\,df$$

oder

$$\int \tau xy\,ds = A \int xy\,df. \tag{16}$$

Ist demgemäß

$$\int xy\,df = 0,$$

so ist auch

$$\int \tau xy\,ds = 0,$$

d. h. *Die Hauptträgheitsachsen der Spannungsmasse einer Spannungslinie fallen zusammen mit den Hauptträgheitsachsen der von der Spannungslinie begrenzten Fläche.*

Da bislang überhaupt kein Gebrauch davon gemacht ist, daß der Nullpunkt des Koordinatensystemes in den Schwerpunkt des Querschnittes fällt, so gilt dieser Satz allgemein für jeden beliebig gewählten Punkt als Mittelpunkt der Trägheitsellipse.

Es sei gesetzt

$$U = x^2 \quad \text{bezw.} \quad U = y^2$$

und als Integrationsgrenze eine Spannungslinie gewählt, auf welcher die Funktion $V$ einen Wert $V_0$ hat, und welche eine Fläche $F_1$ begrenzt. Dann ergeben die Gleichungen (5a) und (5b)

$$2\int \frac{\partial V}{\partial x} x\,df = \int x^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x^2 ds = -2\int V df - V_0 \int \frac{\partial x^2}{\partial \nu} ds,$$

$$2\int \frac{\partial V}{\partial y} y\,df = \int y^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y^2 ds = -2\int V df - V_0 \int \frac{\partial y^2}{\partial \nu} ds.$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial x^2}{\partial \nu} ds = 2\int x \cos(\nu x) ds = -2F_1,$$

$$\int \frac{\partial y^2}{\partial \nu} ds = 2\int y \cos(\nu y) ds = -2F_1$$

und daher

$$2\int \frac{\partial V}{\partial x} x\,df = \int x^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x^2 ds = -2\int V df + 2F_1 V_0,$$

$$2\int \frac{\partial V}{\partial y} y\,df = \int y^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y^2 ds = -2\int V df + 2F_1 V_0$$

und in Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (9)

$$(17)\quad \begin{cases} 2\int \tau_x x\,df = A\int x^2 df - \int \tau x^2 ds = -2A\int V df + 2AF_1 V_0, \\ -2\int \tau_y y\,df = A\int y^2 df - \int \tau y^2 ds = -2A\int V df + 2AF_1 V_0. \end{cases}$$

Es seien die Trägheitsmomente der Fläche $F_1$ für die Koordinatenachsen mit $J_x$ und $J_y$, diejenigen der Spannungsmasse der die Fläche $F_1$ begrenzenden Spannungslinie mit $\Theta_x$ und $\Theta_y$ bezeichnet. Dann ist

$$J_x = \int y^2 df, \quad J_y = \int x^2 df,$$

$$\Theta_x = \int \tau y^2 ds, \ \Theta_y = \int \tau x^2 ds$$

und

$$(18) \qquad \begin{cases} 2\int \tau_x x\,df = AJ_y - \Theta_y = k, \\ -2\int \tau_y y\,df = AJ_x - \Theta_x = k, \end{cases}$$

wo

$$k = -2A\int V df + 2AF_1 V_0$$

gesetzt ist.

Für die Trägheitsmomente $\Theta_x$ und $\Theta_y$ folgt

$$(19) \qquad \begin{cases} \Theta_x = AJ_x - k, \\ \Theta_y = AJ_y - k, \end{cases}$$

und die Gleichung der Trägheitsellipse der Spannungsmasse der Spannungslinie wird

$$\Theta_x x^2 + \Theta_y y^2 = 1,$$

bezw.

$$(20) \qquad (AJ_x - k)x^2 + (AJ_y - k)y^2 = 1,$$

falls die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen gelegt sind.

Da in der ganzen Rechnung keine Voraussetzung über die Lage des Nullpunktes gemacht ist, so gelten die Gleichungen (19) und (20) für jede Lage desselben; sie liefern daher nach Bestimmung von $A$ und $k$ das Trägheitsmoment der Spannungsmasse für jede beliebige Achse und die Trägheitsellipse der Spannungsmasse für jeden beliebigen Mittelpunkt derselben.

Durch Addition der Gleichungen (18) folgt

$$(21) \qquad 2\int (\tau_x x - \tau_y y)\,df = AJ_p - \Theta_p = 2k,$$

wenn $J_p$ und $\Theta_p$ die polaren Trägheitsmomente bedeuten. Nun ist aber

$$M = \int (\tau_x x - \tau_y y)\,df$$

das Drehmoment des Kräftepaares, zu welchem sich alle Spannungskräfte, die auf die von einer Spannungslinie begrenzten Fläche $F_1$ wirken, zusammensetzen. Es ist somit für dieses Drehmoment

$$(22) \qquad M = \tfrac{1}{2}(AJ_p - \Theta_p)$$

bezw.

$$M = k = -2A\int V df + 2AF_1 V_0$$

§ 7.

Um den Wert von $V$ für einen beliebigen Punkt $a$, $b$, $c$ des Querschnittes aus den Spannungen einer Spannungslinie zu finden, werde, wie bei den Untersuchungen C. Neumanns über das logarithmische Potential[1]), gesetzt

$$U = \log\operatorname{nat} r, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Dann ergibt Gleichung (5c);

$$(23) \qquad \int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\lg\operatorname{nat} r - V\frac{\partial \lg\operatorname{nat} r}{\partial n}\right)ds = \int \lg\operatorname{nat} r \cdot df,$$

da

$$\varDelta \lg\operatorname{nat} r = 0.$$

Hierbei darf jedoch der Bereich, über welchen die Integrationen erstreckt sind, den Punkt $a$, $b$, $c$ nicht enthalten, da für den Punkt $a\,b\,c$ die Funktion $U = \lg\operatorname{nat} r$ unendlich wird.

Es sei die Gleichung (23) angewandt auf einen Bereich, der von einer Spannungslinie begrenzt ist, welche den Punkt $a\,b\,c$ umgibt, und außerdem von einem kleinen Kreise mit dem Radius $R$, der um den Punkt $a\,b\,c$ als Mittelpunkt geschlagen ist. Dann folgt aus (23), nachdem für das Linienelement des Kreises $R d\varphi$ gesetzt ist:

$$\int\frac{\partial V}{\partial \nu}\lg\operatorname{nat} r\,ds - V_0\int\frac{\partial \lg\operatorname{nat} r}{\partial \nu}ds + R\lg\operatorname{nat} R\int\frac{\partial V}{\partial r}df - \int V d\varphi$$
$$= \int \lg\operatorname{nat} r\,df.$$

wobei $ds$ das Linienelement der Spannungslinie und $V_0$ den Wert von $V$ auf der Spannungslinie bedeutet.

Wird nun zur Grenze $R = 0$ übergegangen, so fällt das dritte Integral links weg, da

$$\lim_{R=0} R\lg\operatorname{nat} R = 0,$$

das vierte wird $2\pi V$, wo $V$ der Wert der Funktion $V$ im Punkte $abc$ ist, während das Integral rechts über das ganze Innere der Kreisfläche mit ausgedehnt werden darf. Es ergibt sich daher

$$(24) \qquad 2\pi V = \int\frac{\partial V}{\partial \nu}\lg\operatorname{nat} r\,ds - V_0\int\frac{\partial \lg\operatorname{nat} r}{\partial \nu}ds - \int\lg\operatorname{nat} r\,df$$

oder

$$2\pi V = \frac{1}{A}\int \tau \lg\operatorname{nat} r\,ds - V_0\int\frac{\partial \lg\operatorname{nat} r}{\partial \nu}ds - \int\lg\operatorname{nat} r\,df.$$

---

1) C. Neumann. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig 1877.

Durch diese Formel ist $V$ für jeden Punkt im Innern der betreffenden Spannungslinie bestimmt, wenn $V_0$ gegeben ist und die Spannung $\tau$ in jedem Punkt dieser Spannungslinie.

Ist insbesondere die Spannung $\tau$ auf der Randkurve des Querschnittes gegeben, so wird:

$$2\pi V = \frac{1}{A}\int^{*} \tau \lg \operatorname{nat} r ds - \int^{*} \lg \operatorname{nat} r df,$$

wobei das erste Integral rechts über die ganze Randkurve des Querschnittes, das zweite über die Fläche des Querschnittes auszudehnen ist.

Darmstadt, im Februar 1904.

# Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck.

Von C. Runge in Hannover.

Von meinem Kollegen Herrn Barkhausen wurde mir vor kurzem die Frage vorgelegt, wie man die Formänderung der zylindrischen Wand eines im senkrechten Querschnitte rechteckigen Wasserbeckens sowie das Biegungsmoment und die Querkraft im Zusammenhang mit der Ausweichung und Richtungsänderung am Boden berechnen könnte. Aus diesem Anlaß ist die folgende Arbeit entstanden.

Die Formänderung, die ein zylindrisches Gefäß, das mit Wasser gefüllt wird, durch den Wasserdruck erleidet, läßt sich in bekannter Weise berechnen, wenn man die Wandstärke überall gleich voraussetzt. Das Profil genügt einer linearen Differentialgleichung, deren Lösung sich durch die Exponentialfunktion ausdrücken läßt. Eine gleichmäßige Wandstärke würde aber im Falle eines großen Behälters unwirtschaftlich sein, weil der obere Teil der Wand viel weniger zu halten hat als der untere. In dem Folgenden soll gezeigt werden, wie man die Rechnung auch für ungleichmäßige Wandstärken durchführen kann.

Man denke sich einen senkrechten Streifen von geringer Breite aus der Zylinderwand herausgeschnitten und stelle die Gleichungen auf, die aussprechen, daß die durch die Formänderung hervorgerufenen elastischen Kräfte dem Wasserdruck das Gleichgewicht halten. Sei $y$ die Vergrößerung des Radius des in der Höhe $x$ unter dem oberen Rande befindlichen Querschnittes. Wir können annehmen, daß $y$ klein

gegen den Radius sei und daß jeder Querschnitt seine Höhe $x$ bei der Formänderung des Gefäßes nicht ändere. Der Umfang des Querschnittes ändert sich im Verhältnis $y/R$, wenn $R$ den Radius des Querschnittes bezeichnet. Die horizontale Spannung wird daher gleich $Ey/R$, unter $E$ den Elastizitätsmodul verstanden. Sie ruft einen rechtwinkelig zur Wand nach innen gerichteten Druck hervor, der auf die Flächeneinheit berechnet gleich der Dicke der Wandung multipliziert mit dem Verhältnis der Spannung zum Radius ist. Die Wandstärke werde mit $\delta$ bezeichnet; dann ist dieser Druck gleich $\frac{E y \delta}{R^2}$. Er ist horizontal, da die kleinsten Ringbestandteile der Wand auch nach der Verbiegung horizontal bleiben. Dieser durch die Formänderung hervorgerufene elastische Druck wirkt dem Wasserdruck entgegen. Die Differenz

$$\gamma x - \frac{E y \delta}{R^2} \qquad (\gamma = \text{Gewicht der Volumeinheit Wasser})$$

gibt mit der Breite des senkrechten Streifens und mit $dx$ multipliziert den Ausdruck für die horizontale Kraft, die an dieser Stelle an ihm angreift. Diese Kraft werde mit $dQ$ bezeichnet und die Breite des Streifens werde der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt, so daß also

$$dQ = \left(\gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}\right) dx.$$

Die Summe aller $dQ$ vom oberen Rande bis zum Querschnitt in der Höhe $x$ und vermehrt um die horizontale Kraft, die am oberen Rande an dem Streifen angreift, die Querkraft der bezeichneten Stelle, werde mit $Q$ bezeichnet. Dann ist die Änderung, die das Biegungsmoment $M$ des Streifens in dem Stückchen $dx$ erfährt gleich $Q dx$:

$$dM = Q dx.$$

Endlich ist, wenn mit $J$ das Trägheitsmoment des Streifenquerschnitts bezeichnet wird

$$M = E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Dabei ist die Krümmung des Streifens gleich $d^2 y/dx^2$ gesetzt, was bei der geringen Abweichung von der Vertikalen unbedenklich ist.

Statt der drei Gleichungen

$$\frac{dQ}{dx} = \gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

kann man auch die eine schreiben:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Wandstärke $\delta$ und damit auch das Trägheitsmoment $J = \frac{\delta^3}{12}$ von $x$ unabhängig ist, läßt sich die allgemeine Lösung angeben:

$$(1) \quad y = \frac{\gamma R^2}{E\delta} x + c_1 e^{\frac{x}{n}} \cos\frac{x}{n} + c_2 e^{\frac{x}{n}} \sin\frac{x}{n} + c_3 e^{-\frac{x}{n}} \cos\frac{x}{n} + c_4 e^{-\frac{x}{n}} \sin\frac{x}{n}.$$

Dabei ist $n = \sqrt[4]{\frac{4JR^2}{\delta}}$, und $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ bedeuten von $x$ unabhängige Werte, die durch die näheren Bedingungen des Problems zu bestimmen sind. Man kann zum Beispiel vorschreiben, daß der obere und untere Rand in Richtung und Lage ungeändert bleiben sollen. Dann müssen oben und unten $y$ und $dy/dx$ verschwinden. Das gibt vier Gleichungen für $c_1 c_2 c_3 c_4$. Oder man kann verlangen, daß der obere Rand allein in Richtung und Lage ungeändert bleiben soll und kann zugleich vorschreiben, welche Werte $M$ und $Q$ am Boden haben sollen. In vielen Fällen werden aus der Durchbildung des Bodens am unteren Ende Bedingungen für die Bodenwerte von $y$ und $dy/dx$ zu gewinnen sein, indem man die Formänderungen des Bodens und seiner Unterstützung in den noch unbekannten Bodenwerten von $M$ und $Q$ ausdrückt. Das gibt wieder vier lineare Gleichungen für die vier Konstanten $c_1 c_2 c_3 c_4$, die infolge dessen als lineare Funktionen der Bodenwerte von $M$ und $Q$ ausgedrückt werden können. Oder man kann, statt den Wert von $M$ vorzuschreiben, verlangen, daß die Richtung der Wand am Boden senkrecht sein soll. Dann werden die Konstanten $c_1 c_2 c_3 c_4$ als lineare Funktionen des Bodenwertes von $Q$ ausgedrückt werden können. $Q$ ist die Summe der horizontalen Kräfte, die an dem Streifen angreifen, gerechnet von dem oberen Rande bis zu einer beliebigen Höhe $x$ unter dem oberen Rande, also die Querkraft der Stelle $x$. Der Bodenwert von $Q$ ist also gleich der Summe aller horizontalen Kräfte mit Ausnahme der Kraft, die am untersten Rande des Streifens angebracht werden muß, um das Gleichgewicht herzustellen. Das Gleichgewicht verlangt, daß die Gesamtsumme der horizontalen Kräfte Null ist. Folglich muß der Bodenwert von $Q$ der äußeren am unteren Rande angreifenden Kraft entgegengesetzt sein. Statt den Bodenwert von $Q$ vorzuschreiben, kann man auch einführen, daß der Boden des Gefäßes elastisch sei. Das liefert eine lineare Relation zwischen den Bodenwerten von $y$ und $Q$, und da $y$ schon infolge der drei ersten Bedingungen als lineare Funktion von $Q$ darstellbar ist, so erhält man auf diese Weise eine lineare Gleichung für $Q$ selbst.

Wenn die Wandstärke mit $x$ veränderlich ist, so springt sie stets stufenweise. Innerhalb jeder Stufe gilt die allgemeine Lösung (1),

wobei aber $\delta$ und damit $n$ für verschiedene Stufen verschiedene Werte annehmen. Es handelt sich nun darum zu berechnen, wie sich die Konstanten von Stufe zu Stufe ändern. Zunächst dürfen $y$ und $dy/dx$ beim Übergang von einer Stufe zur andern keinen Sprung erleiden. Allerdings würde ja der Querschnitt an der Stelle, wo eine Platte an die andere genietet ist, sich sprungweise ändern; aber dieser Sprung ist ja schon in dem undeformierten Gefäß vorhanden. Wenn wir also unter $y$ nur die Veränderung des Profils verstehn, so wird $y$ keinen Sprung erfahren. Der Differentialquotient $dQ/dx$ wird dagegen bei dem Übergang von einer Platte zur andern sich sprungweise ändern müssen, weil $\gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2}$ unstetig ist. Da aber der Differentialquotient endlich bleibt, so muß $Q$ selbst beim Übergang stetig bleiben und folglich bleibt auch $M$ (das Integral über $Q$) beim Übergang stetig. Im ganzen haben wir also anzusetzen, daß die Werte von $y$, $dy/dx$, $M$, $Q$ an der Übergangsstelle die gleichen Werte haben. Das gibt vier Gleichungen zwischen den acht Konstanten zweier aufeinanderfolgender Platten. Damit lassen sich die vier Konstanten der einen Platte durch die vier Konstanten der benachbarten Platte ausdrücken. Soll am oberen Rande $y$ und $dy/dx$ Null sein, so können die vier Konstanten der obersten Platte durch die beiden Werte von $M$ und $Q$ am oberen Rande ausgedrückt werden. Damit kann man dann die Konstanten aller folgenden Platten und schließlich die Bodenwerte von $y$, $dy/dx$, $M$, $Q$ durch die Werte von $M$ und $Q$ am oberen Rande ausdrücken, oder man kann auch durch irgend zwei von den vier Bodenwerten die übrigen Werte ausdrücken.

Es empfiehlt sich statt $y$ und $x$ zwei andere Veränderliche $z$ und $t$ einzuführen:

$$z = \frac{E\delta}{n\gamma R^2}y, \quad t = x/n.$$

Dann ist $z$ innerhalb einer Platte mit $t$ durch die Gleichung verknüpft:

$$z = t + C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t + C_3 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t.$$

$t$ nimmt an der Übergangsstelle zweier Platten zwei verschiedene Werte an. Die Übergangsbedingungen bestehen darin, daß

$$\frac{z}{m}, \quad \frac{1}{mn}\frac{dz}{dt}, \quad \frac{\delta^3}{mn^2}\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{\delta^3}{mn^3}\frac{d^3z}{dt^3} \qquad \left(m = \frac{E\delta}{n\gamma R^2}\right)$$

an der Übergangsstelle dieselben Werte behalten. Da $m$ und $n$ beide proportional $\sqrt{\delta}$ sind, so kann man auch sagen, daß

$$\frac{z}{\sqrt{\delta}}, \quad \frac{1}{\delta}\frac{dz}{dt}, \quad \delta\sqrt{\delta}\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \delta\frac{d^3z}{dt^3}$$

an der Übergangsstelle dieselben Werte haben sollen.

Die Rechnung besteht nun aus einer Wiederholung der folgenden beiden Operationen. Es seien die Werte von $z$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$ an dem einen Ende einer Platte gefunden, so werden durch die erste Operation die Werte derselben Ausdrücke an dem andern Ende berechnet. Durch die zweite Operation werden dann vermittels der Übergangsbedingungen die Werte an dem angrenzenden Ende der nächsten Platte gefunden. Die zweite Operation besteht nur darin, daß $z$ im Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Wandstärken geändert wird, $dz/dt$ im Verhältnis der Wandstärken selbst, $\frac{d^3z}{dt^3}$ im umgekehrten Verhältnis der Wandstärken und $\frac{d^2z}{dt^2}$ im umgekehrten Verhältnis der $\delta^{3/2}$. Um die erste Operation zweckmäßig auszuführen, führe ich die folgenden Bezeichnungen ein:

$$p = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t, \qquad r = C_3 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t$$
$$q = -C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t, \quad s = -C_3 e^{-t} \sin t + C_4 e^{-t} \cos t.$$

Dann ist:

$$p + qi = (C_1 + C_2 i) e^{(1-i)t}, \quad r + si = (C_3 + C_4 i) e^{(-1-i)t}.$$

Bei der Differentiation nach $t$ tritt der Faktor $1 - i$ oder $-1 - i$ hinzu:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} i = (1 - i)(p + qi), \qquad \frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt} i = (-1 - i)(r + si)$$
$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{d^2q}{dt^2} i = -2i(p + qi), \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2} i = +2i(r + si)$$
$$\frac{d^3p}{dt^3} + \frac{d^3q}{dt^3} i = (-2 - 2i)(p + qi), \qquad \frac{d^3r}{dt^3} + \frac{d^3s}{dt^3} i = (+2 - 2i)(r + si).$$

Also ist:

$$\frac{dp}{dt} = p + q \qquad \frac{dr}{dt} = -r + s$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^2p}{dt^2} = q \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2} = -s$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^3p}{dt^3} = -p + q \qquad \frac{1}{2}\frac{d^3r}{dt^3} = r + s.$$

Mithin haben wir

$$z - t = p + r, \quad \frac{dz}{dt} - 1 = p + q - r + s, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = q - s,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = -p + q + r + s$$

und umgekehrt

$$p = \frac{1}{2}(z - t) + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right), \quad q = \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$
$$r = \frac{1}{2}(z - t) - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right), \quad s = -\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right).$$

Bei der ersten Operation geht man von den Werten von $z$ und seinen drei ersten Differentialquotienten aus und bildet zunächst die Werte von $p, q, r, s$. Ist nun $t$ der Wert an dem einen Ende der Platte, $t'$ der an dem andern Ende, so ist der Übergang von $p + qi = (C_1 + C_2 i)e^{(1-i)t}$ zu $p' + q'i = (C_1 + C_2 i)e^{(1-i)t'}$ einfach dadurch zu bewirken, daß die komplexe Zahl $p + qi$ mit der komplexen Zahl $e^{(1-i)(t'-t)} = e^{t'-t}(\cos(t'-t) - \sin(t'-t)i)$ multipliziert wird. In analoger Weise ist $r + si$ mit $e^{-(t'-t)}(\cos(t'-t) - \sin(t'-t)i)$ zu multiplizieren. Nachdem das geschehen, werden aus den vier Werten $p'q'r's'$ die neuen Werte $z' - t'$, $\frac{dz'}{dt} - 1$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z'}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z'}{dt^3}$ gefunden.

Ich setze ein Beispiel hierher:

| $z - t$ | $\frac{dz}{dt} - 1$ | $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ | $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ |
|---|---|---|---|
| $+ 0,59$ | $- 5,08$ | $- 2,60$ | $- 1,69$ |

$$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = -1,69$$

Diff.: $-3,39$ Summe: $-6,77$

ein Viertel davon: $-0,848$ $\quad -1,692$

$\frac{1}{2}(z - t) = 0,295$ $\quad \frac{1}{4}\frac{d^2z}{dt^2} = -1,300$

Summe: $p = -0,553$ $\quad q = -2,992$

Diff.: $-r = -1,143$ $\quad s = -0,392$

$$(p + qi)e^{(1-i)(t'-t)}$$

$$= (-0,553 - 2,992\,i) \times (-4,65 - 7,19\,i) = 2,57 + 13,72\,i$$
$$-21,50 + 3,98\,i$$
$$p' + q'i = -18,93 + 17,70\,i$$

$$(r + si)e^{(-1-i)(t'-t)}$$

$$= (1,14 - 0,39\,i) \times (-0,038 + 0,024\,i) = -0,07 - 0,11\,i$$
$$-0,04 + 0,02\,i$$
$$r' + s'i = -0,11 - 0,09\,i$$

$$p' + q'i = -18,93 + 17,70\,i$$
$$r' + s'i = -\phantom{1}0,11 - \phantom{1}0,09\,i$$

Summe: $-19,04 + 17,61$

Diff.: $-18,82 + 17,79$

$$z' - t' = -19,04,\quad \frac{dz'}{dt} - 1 = 17,61 - 18,82 = -1,21,\quad \frac{1}{2}\frac{d^2z'}{dt^2} = 17,79,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^3z'}{dt^3} = 17,61 + 18,82 = 36,43.$$

Die Multiplikationen sind mit dem Rechenschieber gemacht, dessen Genauigkeit für den Fall der Formänderung eines Wasserbehälters ausreicht. Will man mit Logarithmen rechnen, so wird die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen besser trigonometrisch ausgeführt, indem man $r$ und $\varphi$ so berechnet, daß

$$p = r\cos\varphi, \quad q = r\sin\varphi.$$

Dann ist:

$$p' = re^{t'-t}\cos(\varphi - (t'-t)), \quad q' = re^{t'-t}\sin(\varphi - (t'-t))$$

und in analoger Weise werden $r'$ und $s'$ aus $r$ und $s$ gefunden.

Der Plan der ganzen Rechnung ist nun der folgende. Am oberen Rande sollen $z$ und $dz/dt$ null sein. Dagegen sind die Werte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ unbekannt. Man beginnt nun damit, zu berechnen, welchen Einfluß eine Änderung der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und von $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ haben. Die Änderungen von $z$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ sind genau so durch $t$ auszudrücken wie die Größen selber, nur daß in dem Ausdruck für die Änderung von $z$ das Glied $t$ fehlt und in dem Ausdruck für die Änderung von $dz/dt$ das Glied 1 und daß natürlich die Konstanten andere Werte haben. Der Einfluß der Vergrößerung des oberen Randwertes von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ oder von $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ um 1, läßt sich also durch dieselben beiden Operationen, die eben besprochen sind, durch die ganze Reihe der Platten verfolgen. Am besten rechnet man gleichzeitig die drei Sätze durch: 1. den Einfluß, wenn $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ am oberen Rande um 1 vergrößert wird, 2. den Einfluß, wenn $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am oberen Rande um 1 vergrößert wird, 3. den Einfluß, wenn gleichzeitig $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am oberen Rande um 1 vergrößert werden. Die dritte Rechnung dient zur Kontrolle. Ihre Resultate müssen immer gleich der Summe der entsprechenden beiden Zahlen der ersten und zweiten Rechnung sein.

In dem von mir betrachteten Falle sollte die Wand des Behälters aus 9 Ringen von je 111,5 cm Höhe bestehen, deren Wandstärken in der Reihenfolge von oben nach unten sein sollten: 1,05 cm, 0,95 cm, 0,85 cm, 1,02 cm, 1,27 cm, 1,53 cm, 1,78 cm, 2,04 cm, 2,30 cm. Der Radius sollte 2030 cm betragen.

Die Veränderungen, die eine Vergrößerung des oberen Randwertes von $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$ oder von $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3}$ um 1 hervorrufen, sind in den folgenden beiden Tabellen gegeben.

| | Änderungen von: | | | | Änderungen von: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $z$ | $\frac{dz}{dt}$ | $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$ | $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3}$ | $z$ | $\frac{dz}{dt}$ | $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$ | $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3}$ |
| r Rand | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| tte unten | $-0,4$ | $-12,4$ | $-12,0$ | $-11,6$ | $5,8$ | $-0,4$ | $-6,2$ | $-12,0$ |
| " | 68 | 427 | 359 | 292 | $-126$ | 103 | 229 | 355 |
| " | $-65,6.10^2$ | $-182.10^2$ | $-117.10^2$ | $-51,2.10^2$ | $9,1.10^5$ | $-89,8.10^2$ | $-98,9.10^2$ | $-108.10^2$ |
| " | $223.10^3$ | $481.10^3$ | $258.10^3$ | $36.10^3$ | $16.10^3$ | $234.10^3$ | $218.10^3$ | $201.10^3$ |
| " | $-352.10^4$ | $-908.10^4$ | $-555.10^4$ | $-203.10^4$ | $14.10^4$ | $-339.10^4$ | $-352.10^4$ | $-366.10^4$ |
| " | $161.10^5$ | $1090.10^5$ | $928.10^5$ | $767.10^5$ | $-189.10^5$ | $203.10^5$ | $391.10^5$ | $580.10^5$ |
| " | $421.10^6$ | $-503.10^6$ | $-924.10^6$ | $-1346.10^6$ | $398.10^6$ | $226.10^6$ | $-173.10^6$ | $-572.10^6$ |
| " | $-845.10^7$ | $-607.10^7$ | $238.10^7$ | $1083.10^7$ | $-352.10^7$ | $-569.10^7$ | $-216.10^7$ | $+136.10^7$ |
| " | $521.10^8$ | $1059.10^8$ | $538.10^8$ | $18.10^8$ | $18.10^8$ | $391.10^8$ | $373.10^8$ | $356.10^8$ |

Der Einfluß einer Veränderung des oberen Randwertes um $x$ Einheiten ist $x$-mal so groß und bei gleichzeitiger Änderung des zweiten und dritten Differentialquotienten addieren sich die beiden Einflüsse. Alle Werte der Tabelle sind mit dem Rechenschieber gerechnet, so daß die letzte der hingeschriebenen Stellen nicht mehr verbürgt werden soll.

Jetzt beginnt die eigentliche Rechnung. Man setzt am oberen Rande $z = 0$ und $dz/dt = 0$ und rechnet nun zunächst mit irgend welchen Anfangswerten von $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3}$ z. B. $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3} = 0$. Dies führt schon am Ende der zweiten Platte zu beträchtlich großen Werten $z - t = -189$ und $dz/dt = -321$, die unmöglich sind, wenn die Bodenwerte von $z$ und $dz/dt$ Null sein sollen. Man tut deshalb gut nicht weiter zu rechnen, sondern schon hier Korrekturen $\xi$ und $\eta$ der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3 z}{dt^3}$ zu berechnen, mit denen man am Ende der zweiten Platte zu kleinen Werten von $z$ und $dz/dt$ gelangt. Man bedient sich zu dem Behufe der dritten Zeile der Tabelle, indem man setzt

$$68\,\xi - 126\,\eta = 189, \quad 427\,\xi + 103\,\eta = 321.$$

Man braucht die Rechnung nun nicht wieder von vorn anzufangen, sondern kann mit den gefundenen Änderungen $\xi$ und $\eta$ die Änderungen

berechnen, die $z$, $dz/dt$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am Ende der ersten Platte annehmen. Von da aus rechnet man nun weiter, bis wieder die Werte von $z-t$ und $dz/dt$ zu groß werden. Am Ende der dritten Platte z. B. werden sie $-17{,}0$ und $-64{,}6$. Daraus rechnet man wieder neue Änderungen der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$, die aber jetzt schon erheblich kleiner ausfallen als die ersten. Mit diesen Änderungen korrigiert man die vorhergehenden Werte. Jetzt setzt man etwa vom Ende der zweiten Platte an die Rechnung wieder fort und korrigiert wieder, sobald $z-t$ und $dz/dt$ zu groß werden. Auf diese Weise gelangt man schließlich an das Ende der neunten Platte, wo $z$ und $dz/dt$ nun irgend welche nicht zu große Werte annehmen. Diese korrigiert man endlich auf 0. Dadurch werden wieder auch die Werte in den vorhergehenden Platten geändert, aber wiederum sind die Änderungen schon in der achten Platte klein gegen die Änderungen in der neunten, die in der siebenten wieder klein gegen die in der achten, so daß die Änderungen bei den ersten Platten gar nicht in Betracht kommen.

Damit ist die ganze Aufgabe gelöst. Man hat so die Formänderung gefunden, die durch den Wasserdruck hervorgebracht wird, wenn man sich den oberen und unteren Rand fest eingespannt denkt. Aus den Werten von $\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{d^3z}{dt^3}$ ergeben sich nach den obigen Formeln die Werte von $M$ und $Q$.

Zugleich kann man aus der Tabelle berechnen, wie sich die Bodenwerte von $y$ und $dy/dx$ ändern, wenn die Bodenwerte von $M$ und $Q$ geändert werden. Die letzte Zeile der Tabelle gibt, wenn $\varDelta z$, $\varDelta\frac{dz}{dt}$, $\varDelta\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\varDelta\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ die Änderungen der Bodenwerte bedeuten

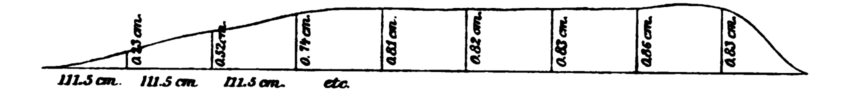
$$\varDelta z = 521.10^8\,\xi + 18.10^8\,\eta,\quad \varDelta\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = 538.10^8\,\xi + 373.10^8\,\eta$$

$$\varDelta\frac{dz}{dt} = 1059.10^8\,\xi + 391.10^8\,\eta,\quad \varDelta\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = 18.10^8\,\xi + 356.10^8\,\eta.$$

Man kann damit $\xi$ und $\eta$ durch die Änderungen der Bodenwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ und folglich auch durch die Änderungen der Bodenwerte von $M$ und $Q$ ausdrücken, und damit kann man auch $\varDelta z$ und $\varDelta\frac{dz}{dt}$ und die Änderungen des ganzen Profils durch die Änderungen der Bodenwerte von $M$ und $Q$ ausdrücken.

Die Figur stellt das Profil der Wand dar, wenn der obere und untere Rand fest eingespannt sind. Die Ausweichungen sind dabei in

natürlicher Größe, die Höhen dagegen in ein Hundertstel der natürlichen Größe gezeichnet. Am Boden ergibt sich $M = 1281$ kg und $Q$




$= 50$ kg/cm. Die Änderungen $\varDelta M$ und $\varDelta Q$ der Bodenwerte von $M$ und $Q$ rufen in dem Profil die Änderungen hervor:

$$\begin{aligned} \varDelta y_7 &= 0{,}000006\ \varDelta M + 0{,}0001\ \varDelta Q \\ \varDelta y_8 &= -0{,}00011\ \varDelta M + 0{,}0025\ \varDelta Q \\ \varDelta y_9 &= 0{,}00067\ \varDelta M - 0{,}0347\ \varDelta Q. \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} y \text{ in cm} \\ M \text{ in cm kg/cm} \\ Q \text{ in kg/cm} \end{pmatrix}$$

Die Änderungen der vorhergehenden $y$ sind gegen die der letzten zu vernachlässigen.

Wenn man den Unterschied zwischen dem Wasserdruck und dem elastischen Druck für die gefundene Formänderung ausrechnet, so bemerkt man, daß beide in allen Platten, die unterste ausgenommen, nahezu einander gleich sind. In dem vorliegenden Fall wird

| | $\gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}$ |
|---|---|
| Ende der ersten Platte | $-0{,}01$ |
| Anfang der zweiten Platte | $0{,}00$ |
| Ende der zweiten Platte | $-0{,}02$ |
| Anfang der dritten Platte | $+0{,}01$ |
| Ende der dritten Platte | $+0{,}02$ |
| Anfang der vierten Platte | $-0{,}04$ |
| Ende der vierten Platte | $+0{,}04$ |
| Anfang der fünften Platte | $-0{,}05$ |
| Ende der fünften Platte | $+0{,}06$ |
| Anfang der sechsten Platte | $-0{,}05$ |
| Ende der sechsten Platte | $+0{,}05$ |
| Anfang der siebten Platte | $-0{,}05$ |
| Ende der siebten Platte | $+0{,}04$ |
| Anfang der achten Platte | $-0{,}07$ |
| Ende der achten Platte | $+0{,}07$ |
| Anfang der neunten Platte | $-0{,}04$ |
| Ende der neunten Platte | $+1{,}00$ |

Das muß für ähnliche Dimensionen wie die vorliegenden immer gelten. Daraus folgt ein abgekürztes Verfahren der Rechnung. Man kann

nämlich die Ordinaten $y$ für alle Platten, abgesehn von der untersten, in der Mitte der Platten nahezu gleich $\frac{\gamma x R^2}{E\delta}$ setzen und $dy/dx$ nahe gleich $\frac{\gamma R^2}{E\delta}$. Nur die unterste und vielleicht die vorletzte und die oberste Platte würden dann in der oben besprochenen Weise durchzurechnen sein. Man würde aber der Mühe enthoben sein, alle neun Platten durchzurechnen.

---

## Ein Beitrag zur Theorie der schnell umlaufenden elastischen Welle.

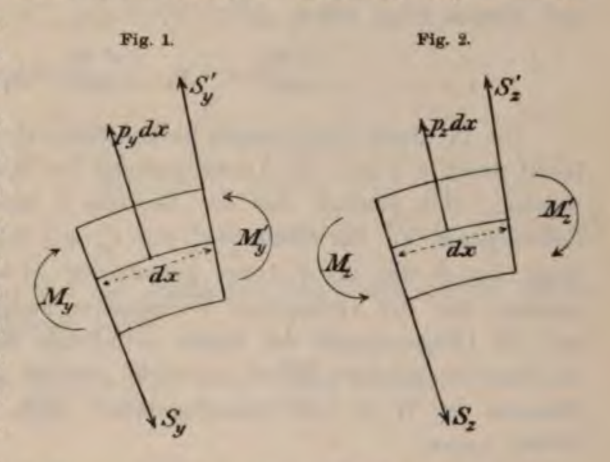
Von Adolf Kneser in Berlin.

**1.** Stodola behandelt in der Schrift „Die Dampfturbinen" (Berlin 1903, S. 63, Nr. 18a) folgende Aufgabe. Eine biegsame Welle sei mit aufgesetzten Scheibenrädern, die ihre Biegsamkeit nicht beeinflussen sollen, gleichmäßig belastet; die Mittelpunkte der Räder seien ein wenig von der geometrischen Achse der Welle ausgewichen, sodaß bei der Umdrehung die Zentrifugalkräfte sich nicht völlig ausgleichen; es wird die Gestalt gesucht, die die Welle unter der Wirkung dieser Kräfte und ihrer Elastizität annimmt. Die Abweichungen der Welle von ihrer Gleichgewichtslage werden zunächst klein vorausgesetzt; die Untersuchung ergibt aber, daß im Gegensatz zu dieser Annahme bei gewissen Umlaufsgeschwindigkeiten große, in der Praxis gefährliche Ausschläge auftreten, und hierdurch sind die „kritischen Geschwindigkeiten" der Welle definiert. Die erhaltenen Resultate gelten (Nr. 19) auch für eine glatte, nur unter dem Einfluß ihrer Eigenmasse rotierende Welle, bei der man anstatt aufgesetzter Räder ihre Querschnitte betrachtet, die ein wenig exzentrisch zur geometrischen Achse gelagert sind.

Stodola nimmt, um die Rechnung zu vereinfachen, an, daß die Schwerpunkte aller Scheibenräder in derselben axialen Ebene liegen und zwar von der Achse der Welle um dieselbe Strecke entfernt. Wir wollen zeigen, daß auch wenn die Schwerpunkte nach beliebigen Richtungen von der Achse ausgewichen sind, die von Stodola erhaltenen Resultate betreffs der kritischen Geschwindigkeiten erhalten bleiben. Der Beweis dafür ist sehr leicht, gewinnt aber vielleicht einiges Interesse durch eine Tatsache, die bei der spezielleren Voraussetzung verborgen bleibt, die Tatsache nämlich, daß bei gewissen Verteilungen der Schwerpunkte der Scheiben einzelne der kritischen Geschwindigkeiten

ihren gefährlichen Charakter verlieren und ausnahmsweise keine großen Ausschläge der Welle verursachen. Es läßt sich auch ein Verfahren angeben, bei einer gegebenen Welle durch Umformung der Scheibenräder eine bestimmte kritische Geschwindigkeit unschädlich zu machen.

**2.** Die ursprüngliche Achse der Welle sei die $x$-Achse eines rotierenden rechtwinkligen Koordinatensystems, bezüglich dessen die Welle, wie wir annehmen, eine Lage relativen Gleichgewichts angenommen habe, die von der $x$-Achse nur wenig abweicht, sodaß, wenn $x, y, z$ die Koordinaten des Mittelpunkts eines Querschnitts der Welle sind, die Größen $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ vernachlässigt werden können, und $dx$ als Länge eines Elements der verbogenen Welle anzusehen ist, das in der Ruhelage, d. h. wenn keine Rotation vorhanden ist, ebenfalls die Länge $dx$ hat. Denken wir uns ein solches Element durch Querschnitte senkrecht zur Richtung der Welle begrenzt, so wirken in diesen Querschnitten Scherkräfte und senkrecht zu ihren Flächen Biegungsmomente, und die Zentrifugalkräfte können wir uns im Schwerpunkt des Elements angreifend denken. Die Gleichgewichtsbedingungen aller dieser Kräfte ergeben dann, wie in dem einfacheren von Stodola behandelten Falle, die Differentialgleichungen der Wellenachse. $S$ und $M$ seien Scherkraft und Biegungsmoment in dem der Abszisse $x$ zugehörigen Querschnitt, $S'$ und $M'$ dieselben Größen für den zweiten Querschnitt mit der Abszisse $x + dx$, $p dx$ die Zentrifugalkraft. Ein angehängter Buchstabe $y$ oder $z$ bezeichne von jeder Kraft und jedem Moment die Komponente nach einer entsprechenden Achse oder Ebene des Koordinatensystems. Dann zeigen die Figuren 1 und 2 die in den Ebenen $xy$ und $xz$ wirkenden Kräfte und Momente, wobei der Pfeil jedesmal angibt, in welchem Sinne Kraft oder Moment positiv zu rechnen sind, und die verschiedene Richtung der Pfeile bei $M_y$ und $M_z$ darauf beruht, daß in der einen der betrachteten Ebenen die Achsen $z$ und $x$ den Achsen $x$ und $y$ der andern entsprechen.



Setzt man nun in jeder der beiden Ebenen $xy$ und $xz$ die Summen der Komponenten und der Momente bezüglich des Schwerpunktes gleich Null, indem man gemäß der oben eingeführten Voraussetzung, daß die ganze Verbiegung klein sei, den Schwerpunkt mit der Abszisse $x + \frac{1}{2}dx$ in Ansatz bringt, so findet man

$$S_y' - S_y + p_y dx = 0, \quad S_z' - S_z + p_z dx = 0,$$
$$M_y' - M_y - S_y' \frac{dx}{2} - S_y \frac{dx}{2} = 0,$$
$$- M_z' + M_z - S_z' \frac{dx}{2} - S_z \frac{dx}{2} = 0$$

oder

$$\frac{dS_y}{dx} = -p_y, \quad \frac{dS_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = S_y, \quad \frac{dM_z}{dx} = -S_z,$$

und hieraus folgt sofort

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -p_y, \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = p_z.$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden vier Größen $M$, $p$ können leicht durch $y$, $z$ und die Ausweichungen der Scheibenräder ausgedrückt werden. Hat nämlich das der Abszisse $x$ entsprechende Rad seinen Schwerpunkt an der Stelle $(x,\ y + e_y,\ z + e_z)$, sodaß $e_y$ und $e_z$ die längs der $y$- und der $z$-Achse gemessenen Abweichungen des Schwerpunktes von der verbogenen Wellenachse bedeuten; ist ferner $m$ die auf die Längeneinheit der Achse entfallende Masse der Räder und $\omega$ die Rotationsgeschwindigkeit, so wirkt offenbar auf das oben betrachtete Element der Welle eine Zentrifugalkraft, deren Komponenten folgende Werte haben:

$$p_y dx = m dx \cdot \omega^2 (y + e_y), \quad p_z dx = m dx \cdot \omega^2 (z + e_z).$$

Für $M_y$ und $M_z$ aber kann man bekannte Formeln der Festigkeitslehre benutzen; ist $E$ der Elastizitätsmodul des Materials, und $\Theta$ das Trägheitsmoment des Querschnitts der Welle, den man mit Masse von der Flächendichtigkeit Eins belegt, bezüglich eines Durchmessers, so gelten die Formeln

$$M_y = -E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad M_z = E\Theta \frac{d^2 z}{dx^2},$$

in denen wiederum benutzt wird, daß die Quadrate von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ vernachlässigt werden dürfen. Mit diesen Ausdrücken ergeben die obigen Beziehungen zwischen $M_y$, $M_z$, $p_y$, $p_z$ die Differentialgleichungen der verbogenen Welle:

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = m\omega^2 (y + e_y), \quad E\Theta \frac{d^4 z}{dx^4} = m\omega^2 (z + e_z).$$

Erstreckt sich die Welle von $x = 0$ bis $x = L$ und ist sie in den Endpunkten nur aufgelegt, so verschwinden in diesen die Biegungsmomente $M$, und man hat als Grenzbedingungen für $x = 0$ und $x = L$ die Gleichungen

$$y = z = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

3. Um die erhaltenen Differentialgleichungen zu integrieren, setzen wir

$$\frac{m\omega^2}{E\Theta} = k^4$$

und nehmen $k$ positiv; die Gleichung für $y$ wird dann

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 y + k^4 e_y$$

und hat das partikuläre Integral

$$p(x) = \frac{1}{4}\sum_{(k)} k e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

wenn $\sum\limits_{(k)}$ bedeutet, daß für $k$ der Reihe nach die Werte $k, -k, ik$ und $-ik$ geschrieben und die erhaltenen Ausdrücke addiert werden sollen. Man findet nämlich leicht

$$\sum_{(k)} k = \sum_{(k)} k^2 = \sum_{(k)} k^3 = 0, \quad \sum_{(k)} k^4 = 4k^4$$

und hieraus

$$p'(x) = \frac{1}{4}\sum_{(k)} k^2 e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p''(x) = \frac{1}{4}\sum_{(k)} k^3 e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p'''(x) = \frac{k^4}{4}\sum_{(k)} e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p^{\text{IV}}(x) = k^4 p(x) + k^4 e_y(x);$$

das allgemeine Integral der Gleichung für $y$ hat also nach bekannten Sätzen die Form

$$p(x) + \sum_{(k)} C^{(k)} e^{kx}$$

wobei $C^{(k)}$ Konstante sind, oder auch, wenn man die hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \mathfrak{Cof}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

einführt und durch $A$, $B$, $C$, $D$ wiederum Konstante bezeichnet,

$$y = A\, \mathfrak{Cof}\, kx + B \cos kx + C\, \mathfrak{Sin}\, kx + D \sin kx$$
$$+ \tfrac{1}{2} k \int_0^x e_y(\alpha)\, \mathfrak{Sin}\, k(x-\alpha) d\alpha - \tfrac{1}{2} k \int_0^x e_y(\alpha) \sin k(x-\alpha) d\alpha.$$

Die Grenzbedingungen sind nach Nr. 2

$$y\,|^0 = y''\,|^0 = y\,|^L = y''\,|^L = 0$$

und ergeben jetzt folgende Gleichungen für die Konstanten:

$$A + B = 0, \quad A - B = 0,$$
$$C\, \mathfrak{Sin}\, kL + D \sin kL + p(L) = 0,$$
$$C\, \mathfrak{Sin}\, kL - D \sin kL + \frac{1}{k^2} p''(L) = 0;$$

hieraus folgt

$$2C\, \mathfrak{Sin}\, kL = -k \int_0^L e_y(\alpha)\, \mathfrak{Sin}\, k(L-\alpha) d\alpha,$$

$$2D \sin kL = k \int_0^L e_y(\alpha) \sin k(L-\alpha) d\alpha.$$

Da nun

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{E\Theta}}$$

stets positiv ist, und dasselbe demnach von $\mathfrak{Sin}\, kL$ gilt, so erhält man für $C$ stets einen endlichen Wert; dagegen hat man für $D$ einen unendlich großen Wert zu gewärtigen, wenn die Gleichung

$$\sin kL = 0$$

besteht, d. h. wenn

$$kL = n\pi,$$

und $n$ eine positive ganze Zahl ist. Die kritischen Geschwindigkeiten sind also durch die Formel

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{E\Theta}{m}} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E\Theta}{m}}$$

gegeben, und die entsprechende für die Koordinate $z$ durchgeführte Betrachtung gibt offenbar dieselben Werte, da unsere Rechnung nur so

geändert zu werden braucht, daß man $y$ durch $z$ und $e_y$ durch $e_z$ ersetzt. Damit ist das von Stodola unter der speziellen Voraussetzung

$$e_y = \text{const.}, \quad e_z = 0$$

abgeleitete Resultat auf unsern allgemeinen Fall übertragen.

4. Ersetzt man in der für $D$ erhaltenen allgemeinen Formel die Größe $\sin k(L-\alpha)$ durch ihren ausgerechneten Wert, so findet man

$$2D = k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha - k \operatorname{cotg} kL \int_0^L e_y(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha.$$

Analog erhält man bei der $z$-Koordinate für die Konstante $\overline{D}$, die in dem Ausdruck von $z$ als Funktion von $x$ an derselben Stelle auftritt wie oben $D$, den Ausdruck

$$2\overline{D} = k\int_0^L e_z(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha - k \operatorname{cotg} kL \int_0^L e_z(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

während sich für die der Konstanten $B$ entsprechende wie bei dieser stets ein endlicher Wert ergibt.

Wenn nun $k$ einen der kritischen Werte

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

annimmt, und die Gleichungen

$$\int_0^L e_y(\alpha)\sin\ k\alpha\ d\alpha = \int_0^L e_z(\alpha)\sin\ k\alpha\ d\alpha = 0$$

oder

$$\int_0^L e_y(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\, d\alpha = \int_0^L e_z(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\, d\alpha = 0$$

gelten, so bleiben die im allgemeinen unendlichen Werte von $y$ und $z$ ausnahmsweise endlich. Die zweiten Glieder der soeben aufgestellten Ausdrücke für $D$ und $\overline{D}$ nehmen dann nämlich, als Brüche mit dem Nenner $\sin kL$ geschrieben, die Gestalt $0:0$ an; da aber schon die erste Ableitung des Nenners an den kritischen Stellen von Null verschieden, nämlich $\pm L$ ist, Zähler und Nenner aber um jeden Wert von $k$ herum in die Taylorsche Reihe entwickelt werden können, so ist der Wert dieser Glieder bei den kritischen Werten von $k$ unter der obigen Voraussetzung sicher endlich. Gelten also die letzten Gleichungen, so verliert die kritische Geschwindigkeit ihren gefährlichen Charakter,

und gibt durchweg endliche Werte von $y$ und $z$, gestattet also der Welle nahe der ursprünglichen Ruhelage eine Lage relativen Gleichgewichts.

Besonders leicht lassen sich die Bedingungen der Ungefährlichkeit einer kritischen Geschwindigkeit formulieren, wenn man die Ausweichungen $e_y$ und $e_z$ in Fouriersche Sinusreihen entwickelt denkt; setzt man

$$e_y = A_1 \sin\frac{\pi x}{L} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots,$$

$$e_z = B_1 \sin\frac{\pi x}{L} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots,$$

so ist bekanntlich

$$A_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L e_y(\alpha)\sin\frac{\pi\nu\alpha}{L}\,d\alpha, \quad B_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L e_z(\alpha)\sin\frac{\nu\pi\alpha}{L}\,d\alpha,$$

und die $n$te kritische Geschwindigkeit, d. h. die dem Werte

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

entsprechende, ist unschädlich, wenn $A_n = B_n = 0$.

Direkt ersichtlich wird dies Resultat, wenn man die trigonometrischen Entwicklungen von $e_y$ und $e_z$ in die obigen Ausdrücke $D$ und $\overline{D}$ einsetzt; man erhält z. B.

$$2D = k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha - k\,\mathrm{cotg}\,kL\int_0^L \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu \sin\frac{\nu\pi\alpha}{L}\sin k\alpha\,d\alpha,$$

also wenn man rechts gliedweise integriert,

$$\begin{aligned} 2D &= k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \\ &\quad - \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{cotg}\,kL\sum_\nu^{1,\infty} A_\nu\left[\frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{L}-k\right)L}{\frac{\nu\pi}{L}-k} - \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{L}+k\right)L}{\frac{\nu\pi}{L}+k}\right] \\ &= k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha - \tfrac{1}{2}k\cos kL\sum_\nu^{1,\infty}\frac{2A_\nu(-1)^{\nu-1}\nu\pi}{L\left(\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}-k^2\right)} \end{aligned}$$

Hier sieht man unmittelbar, daß $D$ bei der Annahme

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

endlich bleibt oder unendlich wird, jenachdem $A_n$ verschwindet oder nicht. Eine ähnliche Formel läßt sich natürlich für $\overline{D}$ aufstellen.

**5.** Ob bei einer gegebenen Welle diese Ausnahmefälle eintreten, läßt sich im allgemeinen nicht entscheiden, da ja $e_y$ und $e_z$ als unbekannte Funktionen von $x$ anzusehen sind, die nur wenig von Null abweichen. Man kann aber beliebig viele der Größen $A_n$, $B_n$ zum Verschwinden bringen, wenn es möglich ist, $e_y$ auf beliebig begrenzten Strecken, etwa von $a_1$ bis $b_1$, von $a_2$ bis $b_2$ usw. um die konstanten Beträge $c_1, c_2, \ldots$ zu vermehren. Dann geht das Integral

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha$$

in die folgende Summe über:

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha + \sum_\nu c_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} \sin k\alpha\, d\alpha;$$

setzt man diese gleich Null, indem man für $k$ beliebig viele kritische Werte nimmt, und ist die Anzahl der Teilintervalle groß genug, so erhält man lineare Gleichungen, aus denen man die Größen $c_\nu$ bestimmen könnte, sobald die ersten Glieder unserer Ausdrücke bekannt wären. Das sind sie allerdings nicht, aber man übersieht doch, daß es Wertsysteme $c_\nu$ gibt, die bewirken, daß bei beliebig vielen kritischen Geschwindigkeiten die Ausdrücke $D$ endlich, die Ausschläge der Welle in der Richtung der $y$-Achse also klein bleiben. Dasselbe bewirkt man auch für die Ausschläge in der Richtung der $z$-Achse, wenn es möglich ist, die Ausweichungen $e_z$ auf beliebigen Teilstrecken um konstante Beträge zu ändern; beliebig vorgeschriebene kritische Geschwindigkeiten sind dann völlig unschädlich gemacht.

Wir führen diese Betrachtungen genauer durch, indem wir uns auf die Frage beschränken, wann die kleinste kritische Geschwindigkeit ungefährlich wird. Für sie ist

$$k = \frac{\pi}{L}$$

und die Bedingungen der Unschädlichkeit sind

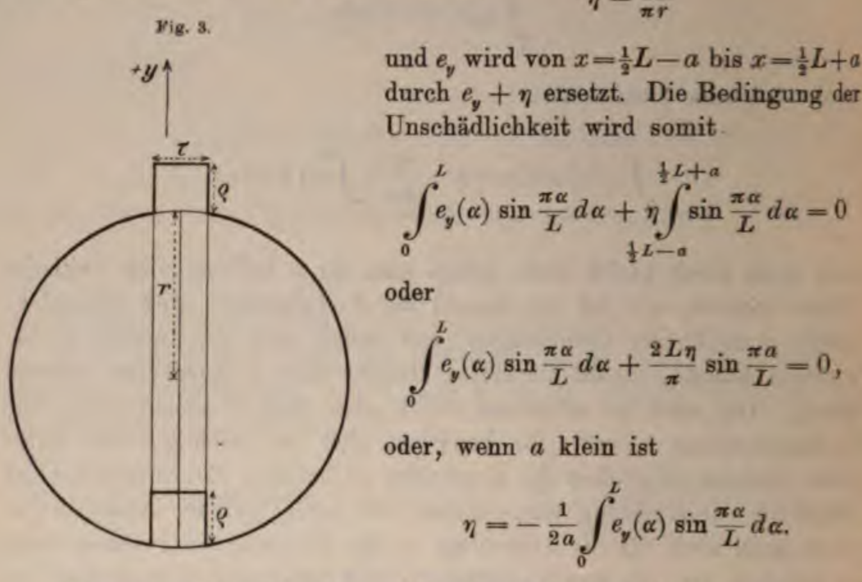
$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha = 0, \quad \int_0^L e_z(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha = 0,$$

die zunächst einmal nicht erfüllt seien. Dann denken wir uns auf der Strecke von $x = \frac{1}{2}L - a$ bis $x = \frac{1}{2}L + a$ die Scheibenräder so abgeändert, daß ihre Massen dieselben bleiben wie zuvor, ihre Schwer-

punkte aber um das konstante Stück $\eta$ in der Richtung der $y$-Achse fortschreiten. Man könnte etwa den Rädern die Gestalt der Fig. 3 geben; ist $\varrho$ die radial, $\tau$ die tangential gerichtete Seite des an den Kreis angesetzten Rechtecks, $r$ der Radius des Kreises, und wird $\varrho$ positiv oder negativ gerechnet, jenachdem das angesetzte Rechteck in der Richtung $+y$ oder $-y$ über den ursprünglichen Radkreis hinausragt, so findet man leicht für die Entfernung $\eta$ des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Kreises den Ausdruck

$$\eta = \frac{\varrho\tau}{\pi r}$$

Fig. 3.




und $e_y$ wird von $x = \frac{1}{2}L - a$ bis $x = \frac{1}{2}L + a$ durch $e_y + \eta$ ersetzt. Die Bedingung der Unschädlichkeit wird somit

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha + \eta \int_{\frac{1}{2}L-a}^{\frac{1}{2}L+a} \sin\frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha = 0$$

oder

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha + \frac{2L\eta}{\pi} \sin\frac{\pi a}{L} = 0,$$

oder, wenn $a$ klein ist

$$\eta = -\frac{1}{2a}\int_0^L e_y(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha.$$

Ebenso ergibt sich eine zweite Unschädlichkeitsbedingung, wenn man längs der $z$-Achse etwa auch auf der Strecke von $\frac{1}{2}L - a$ bis $\frac{1}{2}L + a$ die Räder in ähnlicher Weise modifiziert und bewirkt, daß die Schwerpunkte um die Strecke $\zeta$ in der Richtung der $z$-Achse fortschreiten; man erhält dann

$$\zeta = -\frac{1}{2a}\int_0^L e_z(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\, d\alpha,$$

und das abgeänderte Rad hat etwa die Gestalt der Fig. 4 oder die einfachere der Fig. 3, in der aber das angesetzte Rechteck keiner der Koordinatenachsen parallel liegt. Die Werte $\eta$ und $\zeta$ sind nun freilich immer noch unbekannt, aber man kann sie sich, da sie sicher existieren, durch Versuche bestimmt denken, in ähnlicher Weise wie man eine starre Welle durch Probieren ausbalanziert. Weiß man nur, daß die Ausweichungen $e_y$ und $e_z$ zwischen $-g$ und $+g$

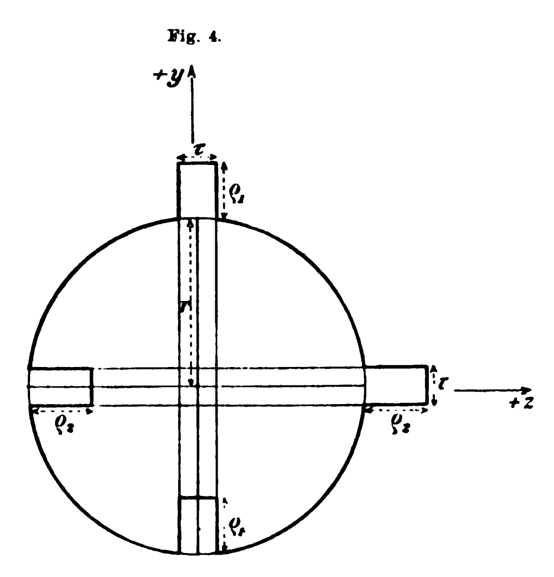
bleiben, so liegen $\eta$ und $\zeta$ zwischen den Grenzen $\pm \frac{gL}{2a}$, womit auch, wenn man $\tau$ festhält, für die beiden Strecken $\varrho$, die in Fig. 4 als $\varrho_1$ und $\varrho_2$ unterschieden werden, bestimmte Grenzen durch die Gleichungen

$$\varrho_1 = \frac{\pi r \eta}{\tau}, \quad \varrho_2 = \frac{\pi r \zeta}{\tau}$$

gegeben sind.

Ob es möglich ist und sich lohnt, solche Versuche anzustellen, mag zweifelhaft erscheinen; das Interessanteste scheint mir die Tatsache zu sein, daß die kritischen Geschwindigkeiten durch gewisse theoretisch einfache Modifikationen eines gegebenen Systems von Rädern unschädlich gemacht werden können.

Fig. 4.




6. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für den Fall der eingespannten Welle anstellen; doch werden die Formeln dann weniger einfach, und die Untersuchung möge deshalb nur im Umriß angedeutet werden.

Die Differentialgleichungen für $y$ und $z$ bleiben dieselben wie oben; an Stelle der in Nr. 2 angegebenen Anfangsbedingungen treten aber die folgenden:

$$y|^0 = y'|^0 = y|^L = y'|^L = 0;$$

dazu kommen Gleichungen derselben Form für $z$. Aus ihnen erhält man für die Konstanten $A$, $B$, $C$, $D$ die Gleichungen

$$A + B = 0, \quad C + D = 0,$$

$$A(\mathfrak{Sin}\, kL + \sin kL) + C(\mathfrak{Cof}\, kL - \cos kL) + \frac{p'(L)}{k} = 0,$$

$$A(\mathfrak{Cof}\, kL - \cos kL) + C(\mathfrak{Sin}\, kL - \sin kL) + p(L) = 0.$$

Die Determinante der Koeffizienten von $A$ und $C$ in den letzten beiden Gleichungen ist

$$-2 + 2\,\mathfrak{Cof}\, kL \cos kL,$$

sodaß unendliche Werte von $A$ und $C$ zu befürchten sind, wenn

$$\mathfrak{Cof}\, kL \cos kL = 1$$

ist, eine Gleichung, die dieselben kritischen Werte von $k$ ergibt wie die von Stodola im Falle $e_y =$ const. aufgestellte

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}kL}{\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}kL} = \pm \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}kL.$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{Cof}\, kL \cos kL - 1 = \varpi(k),$$

so bleiben die Produkte $A\varpi(k)$ und $C\varpi(k)$ bei allen Werten von $k$ endlich, ebenso die Größe

$$Y = y\varpi(k),$$

in der $y$ die durch die obigen Grenzbedingungen bestimmte Lösung der Gleichung

$$y^{\mathrm{IV}} = k^4 y + k^4 e_y$$

ist, und offenbar gelten die Gleichungen

$$Y^{\mathrm{IV}} = k^4 Y + k^4 \varpi(k) e_y,$$
$$Y|^0 = Y'|^0 = Y|^L = Y'|^L = 0.$$

Nimmt man nun speziell für $k$ einen der positiven kritischen Werte, für die $\varpi(k)$ verschwindet, und die wir $k_1, k_2, \ldots$ nennen wollen, so wird die Differentialgleichung für $Y$ einfach

$$Y^{\mathrm{IV}} = k_n^4 Y$$

und $Y$ muß bis auf einen konstanten Faktor mit einer bei den Schwingungen elastischer Stäbe vorkommenden Größe übereinstimmen, die schon in Poissons Mechanik (Bd. II, Nr. 521) und neuerdings in Rayleighs Theory of sound (Bd. I, Kap. 8) eingehend untersucht ist. Wenn nämlich ein Stab von der Länge $L$ an beiden Enden eingespannt und die positive Abszissenachse von $x = 0$ an seine Ruhelage ist, so wird bei einer Schwingung, die einem einfachen Ton entspricht, die Ordinate irgend eines Teilchens des Stabes durch ein Produkt zweier Faktoren dargestellt, von denen der eine nur von der Zeit, nicht aber von $x$ abhängt, während der andere, den wir $u_n$ nennen, ein genau denselben Bedingungen wie $Y$ unterworfenes Integral der Gleichung

$$u_n^{\mathrm{IV}} = k_n^4 u_n$$

ist. Man bezeichnet $u_n$ als die $n$te Normalfunktion des Schwingungsproblems; sie ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, den man so festlegt, daß sie nicht identisch verschwindet. Man kann somit die

oben eingeführte Größe $Y$, wenn $k$ den $n$ten kritischen Wert $k_n$ annimmt, in der Form

$$Y = C_n u_n$$

schreiben, wobei $C_n$ eine Konstante ist, die aber auch verschwinden kann.

Um $C_n$ allgemein zu bestimmen, lassen wir zunächst $k$ beliebig und integrieren die Gleichung

$$u_n(Y^{\mathrm{IV}} - k^4 Y - k^4 \varpi(k) e_y) = 0$$

von 0 bis $L$. Dann ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_0^L u_n Y^{\mathrm{IV}} dx = u_n Y''' - u_n' Y'' \Big|_0^L + \int_0^L u_n'' Y'' dx,$$

$$\int_0^L u_n^{\mathrm{IV}} Y \, dx = u_n''' Y - u_n'' Y' \Big|_0^L + \int_0^L u_n'' Y'' dx;$$

da nun $u_n$ und $u_n'$ ebenso wie $Y$ und $Y'$ an den Enden des Stabes verschwinden, so folgt

$$\int_0^L u_n Y^{\mathrm{IV}} dx = \int_0^L u_n^{\mathrm{IV}} Y dx = k^4 \int_0^L u_n (Y + \varpi(k) e_y) dx.$$

Setzt man hier den Wert von $u_n^{\mathrm{IV}}$ ein, den die für $u_n$ geltende Differentialgleichung ergibt, so folgt weiter

$$(k^4 - k_n^4) \int_0^L u_n Y dx + k^4 \varpi(k) \int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Differenziert man endlich nach $k$ und setzt dann $k = k_n$, wodurch $Y$ in $C_n u_n$ übergeht, so erhält man die Gleichung

$$4 k_n^3 C_n \int_0^L u_n^2 dx + k_n^4 \varpi'(k_n) \int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Hiermit ist $C_n$ bestimmt, und da $\varpi'(k_n)$, wie man leicht sieht, von Null verschieden ist, verschwindet $C_n$ dann und nur dann, wenn

$$\int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Gilt diese Gleichung, so ist die $n$te kritische Geschwindigkeit unschädlich; denn der Definition von $Y$ zufolge kann gesetzt werden

$$Y = C_n u_n + a_1(k - k_n) + a_2(k - k_n)^2 + \cdots,$$

$$y = \frac{C_n u_n + a_1(k - k_n) + a_2(k - k_n)^2 + \cdots}{\varpi'(k_n)(k - k_n) + b_2(k - k_n)^2 + \cdots},$$

wobei $a$ und $b$ von $k$ unabhängige Koeffizienten sind, und der Faktor $k - k_n$ hebt sich, wenn $C_n$ verschwindet, sodaß bei dieser Voraussetzung $y$ endlich bleibt, auch wenn man $k = k_n$ setzt.

Analog findet man, daß der Ausschlag in der Richtung der $z$-Achse bei der $n$ten kritischen Geschwindigkeit endlich bleibt, wenn

$$\int_0^L e_z u_n dx = 0.$$

**7.** Die Größen, die durch ihr Verschwinden die Unschädlichkeitsbedingungen für die eingespannte Welle geben, haben eine ähnliche Bedeutung wie die Größen $A_n$ und $B_n$ in Nr. 4. Bei dem in Nr. 6 bezeichneten Schwingungsproblem wird nämlich verlangt, eine gegebene Funktion von $x$ auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = L$ nach den Normalfunktionen $u_n$ zu entwickeln; ist diese Funktion $e_y$ oder $e_z$, und setzt man die Gleichungen

$$e_y = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots,$$
$$e_z = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \cdots$$

an, so findet man

$$A_n = \frac{\int_0^L e_y u_n dx}{\int_0^L u_n^2 dx}, \quad B_n = \frac{\int_0^L e_z u_n dx}{\int_0^L u_n^2 dx}.$$

Die $n$te kritische Geschwindigkeit ist also unschädlich, wenn bei der Entwicklung von $e_y$ und $e_z$ nach den definierten Normalfunktionen die $n$te von diesen nicht auftritt. Akustisch würde das, wie aus dem zitierten Kapitel von Rayleigh hervorgeht, folgendes bedeuten. Der bei $x = 0$ und $x = L$ eingespannte Stab schwinge in der $xy$-Ebene, indem er mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnt und das der Abszisse $x$ entsprechende Teilchen die Anfangsordinate $e_y$ hat; dann tritt der $n$te Eigenton des Stabes nicht auf, wenn $A_n$ verschwindet. Analoges läßt sich über eine Schwingung in der $xz$-Ebene aussagen, bei der $e_z$ die Anfangsordinate ist.

Endlich übersieht man leicht, daß es durch ähnliche Abänderungen der Räder, wie sie in Nr. 5 betrachtet wurden, auch bei der eingespannten Welle theoretisch möglich ist, beliebig viele kritische Geschwindigkeiten unschädlich zu machen.

---

# Die biometrische Analyse einer Pflanzenspecies.

Von F. Ludwig in Greiz.

Die Variationsstatistik hat auch unter den Botanikern in den letzten Jahren immer mehr Freunde gewonnen wie die von mir in dieser Zeitschrift f. Math. u. Physik 49 Bd. 1903 2. Heft S. 269—277 ff. gegebene „Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie“ beweist. Bei der Beurteilung der Variabilität von Individuengruppen, für die Feststellung und sichere Abgrenzung einzelner Arten oder Rassen, für die Frage nach Abänderung und Vererbung von Eigenschaften, nach dem Einfluß der äußeren Lebensbedingungen auf meristische Merkmale ist sie unentbehrlich. Einen neuen Beweis hierfür liefert eine Arbeit von Friedrich Reinöhl: „Die Variation im Andröceum der Stellaria media Cyr.“ (Doktordissertation Tübingen 1903, 344 S. 4$^0$ u. 3 Tafeln), die sich mit der Zahl der Staubgefäße dieser Art (ausschließlich der Stellaria media neglecta u. St. pallida) beschäftigt. Die mathematische Analyse der empirisch gefundenen Resultate folgt der Methode Pearsons.

Der erste Teil der Arbeit umfaßt die Zählungen an 44 542 Blüten „ohne Wahl“, die die Zeit vom Juni 1900 bis November 1902 unausgesetzt erforderten. Das Gesamtpolygon ist zweigipfelig mit einem Hauptgipfel bei 3 und einem Nebengipfel bei 5, fällt nach links steil ab, während es sich nach rechts allmählig senkt. Die Konstanten betragen $\mu_2 = 1{,}31679$, $\mu_3 = 1{,}57439$, $\mu_4 = 8{,}48245$, $\beta_1 = 1{,}08577$, $\beta_2 = 4{,}8919$; $F = 0{,}5271$. Der kritische Wert $F$ bestimmt mit den Momentquotienten $\beta_1$ und $\beta_2$ den Kurventypus. Sie weisen hier auf den IV. Pearsonschen Typus. Die weitere Rechnung ergibt aber den maßgebenden Abschnitt $a$ imaginär und mit ihm alle Ordinatenwerte, einen unwiderleglichen Beweis dafür, daß die Kurve eine Komplexkurve ist, die sich aus einzelnen einfachen Variationspolygonen zusammensetzt. Nach den Beobachtungen des Verf. lag es am nächsten, zur Isolierung der einzelnen Formeneinheiten und Gewinnung der einfachen Variationspolygone an einen Zusammenhang der Variation mit der Jahreszeit zu denken. Es wurde daher zunächst das Material nach Jahreszeiten in 3 Abteilungen zusammengestellt: Blüten vom März bis Ende Mai als Frühjahrsblüten (A), solche von Anfang Juni bis Ende August als Sommerblüten (B) und solche von Anfang September bis Ende Februar als Herbst- und Winterblüten (C). Die Übereinstimmung des Polygons der Sommerblüten mit dem Polygon der Gesammtblüten war dabei in die Augen springend. Auch A und C ergaben noch zweigipfelige

Polygone, aber in A und C hatte die Ordinate 3 auf Kosten der höheren Varianten eine Vergrößerung erfahren. Die relative Häufigkeit der Blüten mit 3 Staubgefäßen ist also im Frühjahr und Herbst größer als im Sommer. Es wurden nun ausschließlich die Zählungen der ersten Frühlingsblüten (bis Mitte April) und letzten Winterblüten (Nov. bis Febr.) berücksichtigt. In beiden Polygonen war der Gipfel bis 5 verschwunden, der beherrschende Gipfel blieb bei der Ordinate 3 und der Variabilitätsindex wies auf eine verminderte Variabilität hin. Die mathematische Analyse ergab jedoch, daß auch diese eingipfeligen Polygone noch keiner einheitlichen Kurve entsprachen, daß mithin auch die Frühjahrs- und Winterpflanzen keine Individuengruppe darstellten, daß jedoch zwischen der Variationsreihe der Frühjahrs- und der Herbstblüten eine große Übereinstimmung besteht. Letzteres wird verständlich durch die Beobachtung des Verf., daß von Stellaria media bei uns jährlich nur 2 Generationen zur Entwickelung kommen. Von der Keimung einer Generation bis zur ersten Blüte der folgenden Generation vergehen nahezu 5 Monate und die Keimung tritt nur bei bestimmter Temparatur, nicht vor Ende Februar (meistens im März und April) ein. Die ersten Blüten treten meist erst Mitte und Ende Mai auf. Die ersten Blüten einer neuen Generation sind nicht vor August zu erwarten und von Mitte und Ende Oktober an erfolgt keine Keimung mehr. Die im Juli und August keimenden Pflanzen überwintern und liefern die ersten Frühjahrsblüten. Es gibt daher 1) Sommerpflanzen von etwa 5 Monaten Lebenszeit und 2) überwinternde Pflanzen, deren Lebenszeit nahezu ein Jahr dauert. Die Übereinstimmung der Frühjahrs- und Herbstblüten erklärt sich also daraus, daß beide denselben Pflanzen angehören.

Es fragt sich weiter, woher die Abweichung dieser Variation von der Gesammtvariation kommt. Da wir im Frühjahr vorwiegend alternde absterbende Pflanzen vor uns haben, werden wir von selbst darauf geführt, den Einfluß des Lebensalters auf die Variation zu untersuchen. Verfasser genannter Abhandlung beobachtete an vielen Plätzen Stellaria media vom Erscheinen der ersten Blüten bis zum Verschwinden der letzten und nahm an regelmäßigen Zwischenräumen Zählungen vor, an einzelnen Orten täglich. Der Höhepunkt der Variation wurde erst einige Zeit nach dem ersten Blühen erreicht, sie blieb eine Zeit lang auf der erreichten Höhe und sank zuletzt zurück. Es wurden nun die Blüten wieder in 3 Gruppen zusammengestellt (A erste B mittlere und C letzte Blüten). Die Summe stellte wieder die Variation der Gesamtreihe dar. Bei A bestimmte die Ordinate 3 fast ausschließlich die Form des zweigipfeligen Poly-

gons, bei B war der Gipfel bis 5 der herrschende, C war fast eingipfelig mit dem Gipfel bei 3. Im Sommer ist die Wahrscheinlichkeit, alle Entwickelungsstufen anzutreffen am größten, daher die Übereinstimmung der Variation mit der des Gesamtmaterials. Die 3 Polygone A, B, C erwiesen sich immer noch als komplex, daher beeinflussen außer dem Alter noch andere Faktoren die Variation.

Die Vermutung, daß der Standort von Einfluß sei, lag nicht fern, daher stellte Verfasser weiter das Material nach den Standorten zusammen. Der Erfolg war überraschend. Verfasser erhielt von den verschiedenen Generationen eines und desselben Ortes durchaus übereinstimmende Polygone, die häufig so geringe Abweichungen boten, daß sie als identisch bezeichnet werden konnten. Orte mit günstigen Wachstumsbedingungen lieferten Reihen mit Mittelwert bei 5 und großem Variabilitätsindex, Orte die nur kümmerliche Entwickelung gestatteten, Mittelwert bei 3 und kleinem Variabilitätsindex, wenn alle Altersstufen berücksichtigt werden. Die Variation war also in erster Linie vom Standort abhängig. Da die Abhängigkeit vom Alter nicht eliminiert wurde, das Material nicht homogen war, ließen sich vollständig befriedigende Resultate der mathematischen Analyse nicht erwarten, die Übereinstimmung der Polygone mit den berechneten Kurven ergab jedoch, daß für die einzelnen Standorte die Resultate der reinen Variation nahe kamen (Deckungsfehler 7—10 %, bei regulärer Variation unter 2 %). Bei Berücksichtigung des Alters an den einzelnen Standorten wurde die früher gefundene Abhängigkeit der Variation vom Alter bestätigt. Die Kurvenberechnung führte auf die Typen I und IV mit Deckungsfehlern von 4, 4,6 %, die nur wenig über die zulässige Grenze 2,2 % bezw. 2 % hinausgingen, sodaß in Anbetracht der willkürlichen Trennung der Altersstufen die Variation nunmehr als regulär betrachtet werden konnte. Gleichaltrige Blüten an demselben Standort ergaben also normale eingipfelige Variationspolygone, bei Vernachlässigung des Blütenalters und des Standortes ergeben sich die aus jenen zusammengesetzten komplexen Polygone.

Die aus den Formeneinheiten bestehende komplexe Species ergibt trotzdem ein konstantes, der Art eigenes Variationspolygon, wenn sehr zahlreiche Beobachtungen an den verschiedensten Standorten und zu den verschiedensten Zeiten des Blühens gemacht werden wie ich dies früher mehrfach hervorgehoben habe.

Im zweiten Teil der Reinöhlschen Abhandlung kommen 29 949 Blüten kultivierter Pflanzen zur Besprechung. Ein großer Teil der Kulturpflanzen stand unter herabgesetzter Beleuchtung, ein anderer stammte von Kulturen auf fettem und magerem Boden, wobei

für beide Fälle wieder eine volle und verminderte Beleuchtung in Betracht kam. Ein Teil der Kulturpflanzen wuchs bei höherer, ein anderer bei niedriger Temperatur auf. Bei allen Kulturpflanzen wurden alle Blüten, die angelegt wurden, von der ersten bis zur letzten gezählt. Daher waren die Zahlen auch durchweg geeignet zur Prüfung der im ersten Teil über die Altersstufen erreichten Resultate. Bei stark reduziertem Lichte blieben die Blüten geschlossen (blühten kleistogamisch), und es mußten die Staubgefäße unter dem Präpariermikroskop gezählt werden.

Wir gehen hier auf die einzelnen sehr interessanten Untersuchungswege und Untersuchungsreihen nicht näher ein, sondern fassen gleich die Resultate des experimentellen Teiles zusammen. Die Beleuchtungsverhältnisse waren auf die Variation von bestimmendem Einfluß. Verminderter Lichtzufluß setzte unter allen Umständen die Variation wesentlich herab, er erniedrigte Mittelwert und Variabilitätsindex. Die Abnahme schritt bis zur regulären Variation um die Maximalordinate 3 fort. Schon in der ersten Generation verschwanden die oberen Varianten vollständig. Die dritte Generation lieferte bei Abstammung von hoch variierenden wie von niedrig variierenden Pflanzen eine reguläre Variation nach dem IV. Pearsonschen Kurventypus, in beiden Fällen mit großer Annäherung an die Normalkurve (Abweichungen innerhalb der gesetzlichen Grenze ca. 2%). Geringer ist der Einfluß der Bodenbeschaffenheit. Doch gingen auf gutem Boden bei kräftiger Düngung die Werte in die Höhe und sanken auf magerem Boden herab. In einem Falle wurde eine reguläre Variation ebenfalls nach dem IV. Typus um die Maximalordinate 5 erreicht. Es gelang jedoch, die Variation über diesen Punkt zu erhöhen, sodaß ein bis 8 abgestuftes Polygon zu stande kam. (Die Fibonnacizahlen sind auch für die Variation der Stellaria media von Bedeutung). Auf magerem Boden wurde bei Reduktion der Beleuchtung in späteren Generationen die Variabilität so gering, daß der Variabilitätsindex nicht mehr die Hälfte einer Varianteneinheit ausmachte. Die Pearsonschen Formeln lieferten kein befriedigendes Resultat mehr. In allen Fällen ist die Variation vom Alter abhängig. Zu Beginn der Entwickelung findet ein Steigen, gegen Ende ein Zurückgehen der Variationswerte statt. Je geringer aber der Umfang der Variation im ganzen ist, um so kleiner werden die durch das Alter hervorgerufenen Unterschiede, sodaß schließlich das Material in seiner Gesamtheit eine geschlossene Formeneinheit darstellt.

Experiment wie Beobachtung gaben keinen Anhalt für einen Einfluß von Temperaturunterschieden auf die Variation. Nach den Ergebnissen der Beobachtungen des I. wie des II. Teils sind Alter,

Bodenbeschaffenheit, Beleuchtung die für die Variation maßgebenden Faktoren. Sie bestimmen die Formeneinheiten, aus deren Variation im einzelnen sich die Gesamtvariation zusammensetzt. Die Variationsmittelpunkte bilden die Zahlen 3 und 5. Die Gesetzmäßigkeit, die im Hervortreten dieser Zahlen zum Ausdruck kommt, kann nur in inneren Ursachen begründet sein. Beobachtung und Experiment zeigten, daß die einzelnen Gruppen einen einheitlichen Ursprung hatten. Ob letztere das erste Resultat eines Vorganges innerhalb der Art darstellen, dessen Ende die Auflösung der Art in einzelne selbständige Arten bedeutet?

---

# Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. Erményi, Ingenieur in Wien.

## Einleitung.

In dem Vorworte zu der in Bd. 50 dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung „*Theorie der Störungen der Stützlinien von † Josef Petzval*", in welchem eine gedrängte Charakteristik dieses Mathematikers enthalten ist, wird erwähnt, daß derselbe unter den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik auch die Akustik bearbeitet und auch darin Hervorragendes geleistet habe. Hatte er schon im Jahre 1859 eine Theorie der Schwingungen gespannter Saiten aufgestellt, so beschäftigte er sich gegen Ende der 1860er Jahre, wie dies aus den vom Herausgeber kürzlich gefundenen Handschriften hervorgeht, insbesondere mit folgenden Gegenständen: *Theorie der Tonsysteme*, *Bildung der Akkorde*, *rationelle Tastatur*, *mathematische Grundsätze zur Bildung einer neuen Harmonielehre*.

Leider sind durch die in Petzvals Biographie[1]) geschilderten beklagenswerten Umstände auch seine akustischen Arbeiten fast gänzlich verloren gegangen, und haben sich von manchen nur noch einzelne Bruchstücke gefunden. Am verhältnismäßig vollständigsten sind die handschriftlichen Aufzeichnungen über seine Theorie der Tonsysteme, wahrscheinlich deshalb, weil sie aus der letzten Zeit seiner lehramtlichen Tätigkeit stammen. Diese Theorie hatte er in den Jahren 1870—1877 an der Wiener Universität zum Gegenstande seiner Vorträge gewählt, die sehr zahlreich besucht wurden, nicht nur weil der Gegenstand neu

---

1) Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste von Dr. Erményi. 2. wesentlich vermehrte Ausgabe. Halle a. S. 1903, W. Knapp.

war, sondern auch, weil Petzval, gewohnt selbst den trockensten Gegenstand durch seine Vortragsweise fesselnd zu gestalten, der mathematischen Entwickelung dieser Theorie durch geistreiche Ausfälle gegen d'Alembert, Rameau, Helmholtz u. a., sowie durch humoristische Einstreuungen eine besondere Anziehungskraft zu verleihen verstand.

Daß man damals die Ergebnisse seiner akustischen Untersuchungen für bedeutende hielt, geht auch aus dem Umstande hervor, daß im Jahre 1871 sein früherer Assistent, der Realschul-Professor Ševčik, an der Wiener technischen Hochschule die venia legendi für die mathematische Theorie der Tonsysteme und Schwingungen gespannter Saiten erlangen und darin durch eine Reihe von Jahren eine entsprechende Lehrtätigkeit entfalten konnte. Die Erklärung dafür kann nur in dem Umstande erblickt werden, daß in dem Habilitations-Gesuche ausdrücklich und auch von der zur Beurteilung desselben eingesetzten Kommission, welcher Petzvals Leistungen auf diesem Gebiete bekannt sein mußten, besonders hervorgehoben worden ist, daß Ševčik die Vorlesungen „genau nach Petzval" zu halten gedenke.

Als Petzval nach Vollendung seiner Tonsysteme sich auch an die anderen vorgenannten Arbeiten machte, schwebte ihm wohl die Überzeugung vor, daß hiezu ein Musiker von Fach der viel geeignetere Mann wäre, als ein schlichter Mathematiker, der zu dergleichen Darstellungen gar keinen Beruf in sich fühlt. Er war auch bemüht, einen solchen zu gewinnen. Aber da ergab sich die gewiß sehr merkwürdige Erscheinung, daß alle von ihm eingeladenen Musiker, die mathematisch gebildeten nicht ausgenommen, sich dem Einflusse des herrschenden chromatischen Tonsystems nicht zu entziehen vermochten und sich mit einem anderen als dem 12-stufigen System zu befreunden gänzlich außer stande waren. So blieb ihm nichts übrig, als eine solche Darstellung seiner Studien in einer den mathematischen Wissenschaften möglichst homogenen Fassung, wenn auch ohne Beruf, Neigung und Geschick, selbst zu versuchen, und in einer von den musikalischen Inkonsequenzen tunlichst befreiten Darstellung wenigstens die Elemente einer mathematischen Harmonielehre aufzustellen, wie sie zum gründlichen Verständnisse der Tonsysteme überhaupt notwendig sind. Dieser Umstand ist die Ursache, daß sich Petzval mit seinen musikalischen Ansichten und den geltenden Anschauungen der Musiker in mancher Beziehung nicht in voller Übereinstimmung befindet. Indessen ihm war es auch gar nicht darum zu tun, in diesen Kreisen irgendwie aufklärend oder belehrend zu wirken, vielmehr stellte er sich lediglich die Aufgabe, ein Problem der Akustik auf mathematischem Wege einmal gründlich und erschöpfend zu lösen. Den Anlaß hiezu haben ihm zunächst die damals

neuen und epochemachenden Arbeiten von Helmholtz gegeben, der in seiner Lehre von den Tonempfindungen u. a. auch ein neues 30-stufiges Tonsystem aufgestellt und dieses an einem Harmonium „in natürlicher reiner Stimmung“ praktisch durchgeführt hat.

Die Frage der Tonsysteme wollte also Petzval allgemein behandeln und kritisch untersuchen. Er sagte, daß das beste Tonsystem zu allen Zeiten der Gegenstand der Bemühungen der Tonliebhaber war, und daß denn auch eine ziemliche Anzahl in Vorschlag gebracht worden sei. Da sie aber alle erhalten worden seien auf dem Wege des Versuches und des arithmetischen Herumtastens, auf welchem man zwar sehr gute Tonsysteme, ja sogar das beste erfinden, aber nie beweisen kann, daß man das beste habe, so könne dieser offenbar sehr interessante Gegenstand noch nicht als erledigt betrachtet werden. Es bleibe der mathematischen Analysis vorbehalten, die allgemeine Formel, oder die Formeln, wenn es mehrere voneinander verschiedene gibt, anzugeben, in welcher oder in welchen alle erdenklichen Tonsysteme, sowohl die, welche man bereits kennt, sowie auch jene, welche man noch nicht kennt, enthalten sind, wodurch dann die Auffindung des besten unter ihnen sich als ein einfaches Maximum-Problem gestaltet.

Die Methoden, die er dabei anwandte, sind durchaus originell, und sind die gefundenen Ergebnisse ohne Zweifel ein bemerkenswerter Beitrag für die Tonlehre. Eine nachträgliche Veröffentlichung seiner Theorie ist jedenfalls begründet. Die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen sind im Anfange so gehalten, als ob Petzval die Abhandlung zur Veröffentlichung bestimmt hätte, was er auch an der einen und anderen Stelle ausdrücklich sagt. Aber im weiteren Verlaufe scheint er diese Absicht wieder fallen gelassen zu haben, zumal die Aufzeichnungen immer lückenhafter, unzusammenhängender werden, und schließlich ganz augenscheinlich nur zu dem Zweck gemacht worden sind, für den mündlichen Vortrag als Behelf zu dienen. Druckreif sind also diese Aufzeichnungen nicht. Es blieb daher nichts übrig, als dieselben umzuarbeiten, beziehungsweise das Skelett aus dem vielen, sonst sehr interessanten Beiwerke herauszuschälen, es teilweise zu ergänzen, und so die eigentliche Theorie in ihrer rein mathematischen Form herzustellen.

Die sämtlichen gefundenen Handschriften, die sich auf die erwähnten Gegenstände beziehen, hat der Herausgeber dem Musik-Archiv der Stadt Wien übergeben, weil er der Meinung ist, daß die Gedanken, die Petzval in seinen Aufzeichnungen niedergelegt hat, nicht spurlos verschwinden sollten, zumal es nicht ausgeschlossen ist, daß sich einmal ein in der Mathematik wie in der Musik gleich bewanderter Fachmann findet, der dieselben verwertet und im Geiste Petzvals weiterführt.

## I. Begriff eines Tonsystems.

Bekanntlich hat ein jeder elastischer Körper mehrere einfache Schwingungsreihen, die er entweder einzeln oder auch mehrere zusammen anzunehmen vermag, und zu denen ebensoviele Töne gehören. Ihre Schwingungszahlen in der Sekunde sind die Wurzeln einer transzendenten Gleichung und können in eine steigende Reihe, nach einem gewissen Gesetze fortschreitender Glieder geordnet werden. Die erste und kleinste dieser Schwingungszahlen entspricht dem sogenannten *Grundtone*, die anderen entsprechen den verschiedenen *Obertönen* dieses elastischen Körpers. Z. B. eine wagerecht gespannte, homogene und überall gleich dicke Saite kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen in der Sekunde

$$(1) \qquad \xi,\ 2\xi,\ 3\xi,\ 4\xi,\ 5\xi,\ 6\xi,\ 7\xi, \ldots$$

sind, unter $\xi$ die Anzahl der Schwingungen des tiefsten oder Grundtones verstanden. Hervorgerufen werden diese Töne und zwar der Grundton durch einfaches Anschlagen der Saite, die Obertöne hingegen, wenn man die Saite in der Hälfte, im Drittel, Viertel ... ihrer Länge leicht mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Sie heißen auch Aliquot- oder Flageolett-Töne. Der erste Oberton, dem die Schwingungszahl $2\xi$ angehört, hat die Eigenschaft, das menschliche Ohr beinahe auf dieselbe Weise anzuregen, wie der Grundton selbst, daher man in einem jeden Tongebilde einen derselben für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Deshalb werden auch in der Musik beide mit ein und demselben Namen bezeichnet. Heißt z. B. der eine $C$, so heißt der andere ebenso.

Daher folgende allgemeine Regel: *Man kann die Schwingungszahl $\xi$ eines beliebigen Tones ein oder auch mehrere Mal mit 2 multiplizieren oder dividieren, ohne den Namen des Tones zu ändern.* Gehört also die Schwingungszahl $\xi$ zum Tone $X$, so gehört auch die Schwingungszahl $2^n\xi$ zu einem Tone namens $X$, unter $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Das zweite dieser beiden $X$ heißt nach dem musikalischen Sprachgebrauche die $n^{te}$ *Oktave* des ersten, das Warum ist hier nicht wesentlich. Hieraus folgt unmittelbar, daß die unter (1) aufgezeichneten Töne einer Saite nicht alle verschiedene Namen tragen, sondern in Gruppen mit einem und demselben Namen zerfallen. Insbesondere gehören die Schwingungszahlen: $\xi$, $2\xi$, $4\xi$, $8\xi$, $16\xi$, ... alle zu Tönen einerlei Namens, z. B. namens $C$, und diese Töne heißen: Grundton, $1^{te}$, $2^{te}$, $3^{te}$ und höhere Oktave von $C$.

Ebenso tragen alle Töne mit den Schwingungszahlen $3\zeta$, $6\zeta$, $12\zeta$, $24\zeta$, ... einerlei Benennung *G*; zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{3}{2}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, wiewohl er in der Reihe (1) nicht vorkommt, mithin kein Oberton der Saite ist, und da $\frac{3}{2}\zeta$ zwischen $\zeta$ und $2\zeta$ enthalten ist, so fällt dieser Ton in den Bereich der 1[ten] Oktave und heißt Quinte des Grundtones *C*. Hieraus folgt, daß *allgemein die Schwingungszahl der Quinte aus jener des Grundtones erhalten wird durch Multiplikation mit* $\frac{3}{2}$.

So hat also die Quinte von *G* oder die zweite Quinte von C die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$. Dieser Ton wird samt den Tönen mit $\frac{9}{8}\zeta$, $\frac{9}{16}\zeta$, $\frac{9}{32}\zeta$, ..., $\frac{9}{2}\zeta$, $9\zeta$, $18\zeta$, ... Schwingungen in der Musik mit *D* bezeichnet und der erste von ihnen die *Sekunde* des Grundtones *C* genannt. Zu diesem *C* gehört ferner ein Ton, von welchem das *C* die Quinte ist, seine Schwingungszahl ist $\frac{2}{3}\zeta$. Dieser Ton heißt *F*, seine Oktave hat $\frac{4}{3}\zeta$ Schwingungen und wird die *Quarte* des Grundtones genannt. Obschon kein Oberton der Saite, steht er mit dem Grundton doch in naher Verwandtschaft, weil *C* ein Oberton von *F* ist.

In der Reihe (1) befinden sich noch die Schwingungszahlen

$$5\zeta, \quad 10\zeta, \quad 20\zeta, \ldots$$

Die ihnen entsprechenden Töne heißen alle *E*. Zu ihnen gehört auch der in die erste Oktave fallende mit $\frac{5}{4}\zeta$ Schwingungen, welcher die *große Terz* des Grundtones genannt wird. Man erhält mithin die Schwingungszahl der großen Terz aus jener des Grundtones durch Multiplikation mit $\frac{5}{4}$.

Endlich werden in der Reihe (1) auch Schwingungszahlen $7\zeta$, $14\zeta$, $28\zeta$, ... wahrgenommen. Die diesen Zahlen entsprechenden Töne nennt Petzval *Ais*. Zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{7}{4}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, der ebenfalls in den Bereich der ersten Oktave fällt, und den er die *reine Septime* des Grundtones nennt.[1])

---

1) Hier weicht Petzval von der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungsweise wesentlich ab. Nach dieser versteht man unter *ais* den Ton mit der reinen Schwingungszahl $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$ und nennt ihn die übermäßige Sexte; die Töne

Um die Aufzählung der dem Grundtone verwandten Töne vollständiger zu machen, ist noch zu bemerken, daß die Quinte *G* auch eine große Terz besitzt mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}\zeta = \frac{15}{8}\zeta$; sie heißt *H*.

Auch die Quarte *F* besitzt eine große Terz mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}\zeta = \frac{5}{3}\zeta$. Sie führt den Namen *A*.

Stellt man nun die aufgezählten, dem Grundtone *C* verwandten Töne, die sämtlich in der ersten Oktave enthalten sind, in eine Gruppe zusammen, geordnet nach ihren Schwingungszahlen, von der kleinsten angefangen, so erhält man die Tonreihe:

$$\begin{array}{cccccccc} C & D & E & F & G & A & H & C. \\ \zeta & \frac{9}{8}\zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{4}{3}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{5}{3}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & 2\zeta. \end{array} \tag{2}$$

Hier fehlt die Septime mit der Zahl von $\frac{7}{4}\zeta$ Schwingungen. Sie würde den Platz zwischen *A* und *H* einnehmen und nach dem in der Musik angenommenen Bezeichnungsgebrauche *Ais*, d. h. erhöhtes *A*, heißen ist aber nicht eingeschaltet worden, weil sie auch in den herrschenden Tonsystemen der modernen Musik eigentlich nicht vorkommt.

Diese hier angeführten Töne bilden eine kleine, nur aus 7 Noten bestehende Melodie, welche nicht gar so übel klingt und den Leuten nur deshalb unangenehm ist, weil sie sie gar zu oft hören müssen. Demungeachtet bildet sie aber doch ein schon deshalb merkwürdiges Liedchen, weil es nach Belieben heiter oder schwermütig klingt. Heiter, lustig, munter, hart (dur), wenn man es in der Ordnung (2) der Töne von *C* angefangen absingt. Traurig, weich (moll), wenn man es von *A* anfängt und in der Ordnung

$$\begin{array}{cccccccc} A & H & C & D & E & F & G & A \\ \eta & \frac{9}{8}\eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{27}{20}\eta & \frac{3}{2}\eta & \frac{8}{5}\eta & \frac{9}{5}\eta & 2\eta \end{array} \tag{3}$$

abspielt. Unter den Tönen stehen auch hier dieselben Schwingungszahlen wie in (2), nur $\eta$ anstatt $\frac{5}{3}\zeta$ gesetzt und reduziert auf die 1. Oktave.

---

*h* und *b* heißen Septime, und zwar *h* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8}$ die große Septime, und *b* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{5}$ die kleine Septime.

Die Reihe (2) heißt die *C*-Dur-, die Reihe (3) hingegen die *A*-Moll-Tonleiter (Skala) und heißen in denselben beziehentlich

| der 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. Ton |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prim | Sekunde | Terz | Quarte | Quinte | Sexte | Septime | Oktave. |

Die Tonabstände in diesen 2 Tonleitern sind selbstverständlich nicht dieselben. Mithin gibt es mehrerlei Terzen, Quarten usw., verminderte, kleine, große, übermäßige usw., was in die musikalische Nomenklatur einige Verwirrung zu bringen geeignet ist. Bei der Lösung des arithmetischen Problems jedoch, die hier angestrebt wird, können wir sie abseits lassen. Nur soviel ist nötig zu erwähnen, daß die kleine Terz der Moll-Tonleiter als dritter Ton in derselben entnommen ist und die Schwingungszahl $\frac{6}{5}\eta$ hat, während die große Terz der dritte Ton der Dur-Tonleiter ist mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4}\xi$.

Auch kann erwähnt werden, daß die Moll-Tonleiter nicht immer die (3) gewesen ist. Unter Papst Gregor dem Großen, der anstatt der griechischen die jetzt noch üblichen Buchstabenbenennungen einführte, wurde sie so: *A. B. C. D. E. F. G. A* gesungen, wobei unter *B* das heutige *H* verstanden wurde. Die moderne Musik hingegen braucht nur im Absteigen die Form (3), im Aufsteigen aber einen Zwitter aus halb Dur, halb Moll.

Ungeachtet der allgemeinen Abneigung gegen die beiden Tonleitern bleibt es aber doch Tatsache, daß die sieben verschiedenen Töne derselben sowohl nacheinander, als auch mehrere derselben mit Auswahl gleichzeitig angeschlagen, einen dem Ohre angenehmen Eindruck hervorbringen. Mehrere gleichzeitig erklingende Töne geben einen *Akkord*. So gibt der Grundton mit der großen Terz und Quinte einen Akkord

$$\begin{matrix} C & E & G \\ \xi & \frac{5}{4}\xi & \frac{3}{2}\xi, \end{matrix}$$

in dem die Schwingungszahlen im Verhältnisse 4, 5, 6 zu einander stehen; er wird der *C*-Dur-Dreiklang genannt und gilt mit allen seinen Versetzungen und insbesondere in der Ordnung der Töne *C, G, E* und dem Verhältnisse 2, 3, 5 der Schwingungszahlen für den angenehmsten oder konsonantesten aller Akkorde.

Solcher Dur-Dreiklänge lassen sich aus den sieben Tönen der Skala noch zwei bilden, nämlich:

$$\begin{matrix} G & H & D \\ \frac{3}{2}\xi & \frac{15}{8}\xi & \frac{9}{4}\xi \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} F & A & C \\ \frac{4}{3}\xi & \frac{5}{3}\xi & 2\xi, \end{matrix}$$

ihre Schwingungszahlen stehen ebenfalls im Verhältnisse 4, 5, 6. Diese Akkorde heißen daher der *G*-Dur- und der *F*-Dur-Dreiklang. Alle bestehen aus: Grundton, große Terz und Quinte, nur ist im ersten der Grundton *C*, im zweiten *G*, im dritten *F*, Töne, von welchen der erste oder Grundton *C* auch Tonika, der zweite *G* die Oberdominante, der dritte *F* die Unterdominante heißt. Die Tonleiter ist mithin zusammengesetzt aus den Bestandtönen dreier Dur-Dreiklänge.

Auch in der Molltonleiter kann aus Grundton *A*, kleiner Terz *C* und Quinte *E* ein Dreiklang, der auf das Ohr einen angenehmen Eindruck macht, gebildet werden; sein Klang ist aber weich (moll), düster, melancholisch, und es können auch hier wieder 3 solche Molldreiklänge aus den 7 Tönen der Skala zusammengestellt werden, nämlich:

$$\begin{matrix} A & C & E \\ \eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{3}{2}\eta, \end{matrix} \quad \begin{matrix} D & F & A \\ \frac{27}{20}\eta & \frac{8}{5}\eta & 2\eta \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} E & G & H \\ \frac{3}{2}\eta & \frac{9}{5}\eta & \frac{9}{4}\eta. \end{matrix}$$

Die Töne des ersten und dritten unter ihnen stehen genau im Verhältnisse der ganzen Zahlen 10, 12, 15. Diese Akkorde klingen gut. Der zweite derselben hat aber die Töne in etwas anderen Schwingungsverhältnissen und klingt auch minder gut. Das Verhältnis 10, 12, 15 ist aber samt dem Wohlklange wieder hergestellt, wenn man anstatt des Tones $D$ mit $\frac{27}{20}\eta$ Schwingungen einen anderen, $d$ mit $\frac{4}{3}\eta$ Schwingungen setzt, der die genaue Quarte des Grundtones $A$ ist. Dieses $d$ ist $= \frac{80}{81} D$, mithin sehr wenig von $D$ unterschieden.

Die Theorie verlangt also zum vollständigen Wohlklang der *C*-Dur- und *A*-Moll-Tonleiter und der darin enthaltenen Dreiklänge sehr nahe aneinanderliegende Töne *D* und *d*, ein Fall, der sich auch bei anderen Anlässen öfter wiederholt. Nebst diesen 6 Dreiklängen ist auch in der Musik von Wichtigkeit der Septimenakkord, der aus Grundton, der großen Terz, Quinte und Septime zusammengesetzt ist:

$$\begin{matrix} C & E & G & Ais \\ \xi & \frac{5}{4}\xi & \frac{3}{2}\xi & \frac{7}{4}\xi. \end{matrix}$$

Die Schwingungszahlen dieser Töne stehen in dem einfachen Verhältnisse 4, 5, 6, 7. Dieser vierstimmige Akkord hat die besondere Eigenschaft, daß nach ihm der Dreiklang *FAC* besonders gut klingt, so daß er denselben vorzubereiten, zu verlangen, gewissermaßen dazu zu leiten scheint, und namentlich ist es die Septime, die ihm diesen Charakter verleiht, die daher auch der harmonische *Leitton* heißt, oder mindestens heißen sollte.

Der Septimenakkord scheint eine neue Entdeckung zu sein. Im Altertume unbekannt, kommt er auch in der Kirchenmusik Palestrinas noch nicht vor. In der neueren Musik findet er sich entschieden häufiger, als irgend ein anderer. Nur wird in demselben die reine Septime *Ais* durch einen anderen, wesentlich verschiedenen Ton *B* ersetzt, wodurch er einen schärferen Klang bekommt, dabei aber seinen oberwähnten Charakter nicht wesentlich verändert.

Es kommen in der Musik sehr viele verschiedene Akkorde vor; die hier zur Sprache gebrachten drei, nämlich der Dur-Dreiklang, der Moll-Dreiklang und der reine Septimenakkord, deren Töne beziehentlich in den Verhältnissen 4, 5, 6, dann 10, 12, 15 und endlich 4, 5, 6, 7 stehen, sind die einzigen vorzugsweise wohlklingenden, welche man mit dem Namen *konsonante Akkorde* belegt; die übrigen sogenannten *dissonanten Akkorde* sollen an einem anderen Orte zur Sprache gebracht werden.

Nicht nur in Akkorden, sondern auch nacheinander erklingend, erregen die Töne der zwei in Rede stehenden Tonleitern eine angenehme Empfindung, und es gibt eine große Mannigfaltigkeit von Gesängen, die vorzugsweise aus den Tönen derselben zusammengesetzt sind, und die man auch durch Begleitung mit den eben angeführten Akkorden verschönert. Man sagt von ihnen, daß sie je nach ihrem Charakter, ob heiter oder düster, und je nachdem die Begleitung mit Dur- oder mit Moll-Akkorden vorzugsweise stattfindet, aus *C*-Dur oder *A*-Moll gedichtet seien.

Anstatt des Grundtones *C* kann man auch einen jeden beliebigen anderen wählen und auf demselben eine Tonleiter gründen, gleichviel ob er in der *C*-Dur-Skala enthalten ist oder nicht. Man hat nur die gegebene Schwingungszahl dieses neuen Grundtones anstatt $\zeta$ in die Reihe (2) einzusetzen, um die Schwingungszahlen der neuen Tonleiter zu erhalten. Es sei z. B. *D* der neue Grundton mit der Schwingungszahl $\frac{9}{8}\zeta$, so erhält man, $\frac{9}{8}\zeta$ statt $\zeta$ setzend, die neue *D*-Tonleiter

| *D* | *e* | *Fis* | *G* | *a* | *H* | *Cis* | *D* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{9}{8}\zeta$ | $\frac{81}{64}\zeta$ | $\frac{45}{32}\zeta$ | $\frac{3}{2}\zeta$ | $\frac{27}{16}\zeta$ | $\frac{15}{8}\zeta$ | $\frac{135}{64}\zeta$ | $\frac{9}{4}\zeta$. |

Vier Töne derselben, *D, G, H, D*, sind auch in der *C*-Skala enthalten, der zweite, mit der Schwingungszahl $\frac{81}{64}\zeta$ versehen, ist mit dem *E* der *C*-Tonleiter, welches die Zahl $\frac{5}{4}\zeta$ trägt, beinahe identisch. Nennt man ihn also *e*, so ist $\frac{e}{E} = \frac{81}{80}$. Ebenso ist der fünfte mit *a* bezeich-

nete beinahe das $A$ der $C$-Skala, und es ist wieder $\frac{a}{A} = \frac{81}{80}$. Die beiden mit *Fis* und *Cis* bezeichneten Töne endlich sind von allen in der $C$-Tonleiter enthaltenen wesentlich verschieden und liegen beziehentlich zwischen $F$ und $G$, und zwischen $C$ und $D$, mit der gewissen Bedeutung eines erhöhten $F$ und erhöhten $C$.

Ähnliche Bewandtnis hat es nun mit allen von verschiedenen Grundtönen ausgehenden Tonleitern. Sie bestehen teils aus Tönen, die auch schon in anderen Tonleitern vorrätig sind, mitunter aus wesentlich verschiedenen, aber oft auch aus solchen, die von den Tönen anderer Skalen nur sehr wenig abweichen. Diese letzteren bilden nun ein sehr lästiges Tonproletariat, welches, wenn zugelassen, in der musikalischen Praxis sowohl wie auch in der Theorie störend auftritt, indem es bei einigen Instrumenten eine Unzahl beinahe gleichklingender Saiten, bei andern eine Unzahl von Bünden verlangt, die beinahe an dieselben Stellen des Griffbrettes fallen usw., und was das schlimmste ist, eine Unzahl von Tonnamen und -zeichen erheischt, welche die Elemente der Tonschrift in eine Art chinesischen, unübersehbaren Alphabets verwandeln würden. Es ist daher immer für wichtig erachtet worden, diese beinahe gleichlautenden Töne zu beseitigen.

Zu diesem Zwecke ist das nächstliegende, zuerst sich darbietende Verfahren folgendes: In der $C$-Leiter kommt der Ton $A$ als große Terz von $F$ vor mit der Schwingungszahl $\frac{5}{3}\zeta$. In der $D$-Leiter erscheint ein ähnlicher $a$ als Quinte von $D$ mit der Schwingungszahl $\frac{27}{16}\zeta$, die von $\frac{5}{3}\zeta$ nur um $\frac{1}{48}\zeta$ abweicht. Beide schafft man ab, und ersetzt sie durch einen einzigen Ton $A'$ mit der Schwingungszahl $\frac{161}{96}\zeta$, die zwischen $\frac{27}{16}\zeta$, und $\frac{5}{3}\zeta$ liegt und von jeder dieser beiden Zahlen nur mehr um $\frac{1}{96}\zeta$ verschieden ist.

Dieses Verfälschen der Töne nennt man in der Kunstsprache *temperieren*, und es ist nunmehr $A'$ sowohl die verfälschte oder temperierte Terz von $F$, wie auch die temperierte Quinte von $D$. Und es heißt diejenige von der Einheit nur sehr wenig abweichende Zahl, mit welcher man die reine Terz, Quinte, Septime usw. multiplizieren muß, um die temperierte Terz, Quinte, Septime usw. zu erhalten, *die Temperatur* dieser reinen Terz, Quinte, Septime usw. So ist im gegenwärtigen Beispiele $\frac{161}{160}$ die Temperatur der Terz $A$ von $F$, und $\frac{161}{162}$ die Temperatur der Quinte $a$ von $D$.

Die Notwendigkeit des Temperierens wiederholt sich sehr oft; denn die Musik benötigt die Töne mehrerer Tonleitern teils um der Höhe der menschlichen Stimme, die sie zu begleiten hat, gerecht zu werden, hauptsächlich aber, weil sie durch den Übergang zu den Akkorden anderer Tonleitern ihre schönsten und überraschendsten Wirkungen erzielt. Jede neue Tonleiter erheischt aber in der Regel auch neue Töne, die mitunter von den Tönen bereits vorhandener und im Gebrauche stehender Tonleitern sehr wenig abweichen und deshalb nicht durch einen besonderen Aufwand von Klangmitteln, z. B. Saiten, Bünde usw. erzeugt, sondern lediglich durch Temperieren hergestellt werden. Nur geschieht dasselbe nicht in der hier auseinandergesetzten, etwas primitiven Weise, weil es meistenteils auch nicht 2 Töne sind, die einen gemeinschaftlichen Repräsentanten erhalten, sondern mehrere. Es spielt dieser Repräsentant einem dieser Töne gegenüber die Rolle einer temperierten kleinen Terz, zum dritten stellt er eine temperierte Quinte, zum vierten eine Septime dar.

Hierbei ist es nun freilich unerläßlich, daß ein jedes der so temperierten Intervalle etwas von seiner Reinheit abgebe; jedoch soll dies in rationeller Weise so eingeleitet werden, daß der Gesamtbetrag der so gebrachten Opfer ein möglichst kleiner sei, das heißt, daß die Temperaturen der sämtlichen Reintöne möglichst wenig von der Einheit abweichen. Einen Ton, der von demjenigen Reintone, den er vorzustellen berufen ist, in merklicher, leicht hörbarer Weise abweicht, nennen die Musiker in ihrer Kunstsprache nicht mehr einen temperierten Ton, sondern einen *heulenden Wolf.*[1]) So wird z. B. ein Ton, dessen Temperatur $\frac{81}{80}$ ist, mithin um $\frac{1}{80}$ oder um noch mehr von der Einheit abweicht, bereits zu den heulenden Wölfen gezählt. Dieser Abstand von der Reinheit wird ein Komma genannt.

Hat man nun auf dem Wege des Temperierens die sehr nahe aneinander liegenden Töne beseitigt, so bleiben offenbar nur solche übrig, die sich in beträchtlichem Abstande von den Werten ihrer Schwingungszahlen befinden. Diese liegen aber vermöge der vorgenommenen Reduktion auf der ersten Oktave zwischen $\zeta$ und $2\zeta$, können somit

1) Diese Bezeichnung entspricht dem historisch-mathematischen (physikalischen) Standpunkte. Heute nennen die Musiker einen solchen Ton schlechtweg einen „falschen". Unter heulendem Wolf verstehen sie den einem Instrumente infolge eines Material- oder Konstruktionsfehlers zufällig anhaftenden unreinen Ton, wie z. B. bei der Orgel, wenn das Spielventil nicht ordentlich schließt, oder bei Blasinstrumenten, wenn sie noch nicht genügend warm geworden sind usw. Dieses ist der moderne physiologische (akustische) Standpunkt; den historisch-physikalischen hat man aufgegeben.

nicht anders als in beschränkter Anzahl vorhanden sein. Sie stellen sozusagen das Tonalphabet vor, und man nennt ihren Inbegriff ein *Tonsystem*.

### II. Das 12-stufige, chromatische Tonsystem. Seine Eigenschaften.

Der Begriff des besten Tonsystems ist ein relativer, insofern verschiedene Tonliebhaber auch verschiedene Anforderungen an ein solches stellen werden, je nach dem Instrumente, das sie behandeln, je nach dem Zwecke, den sie verfolgen, und der entweder sein kann, praktische Musik zu machen oder theoretische Forschungen anzustellen, ferner je nachdem sie einer Notenschrift bedürfen oder nicht usw.

Die Allgemeinheit der mathematischen Untersuchung verlangt, daß wo möglich alle diese Anforderungen berücksichtigt werden. Man muß sich daher vor allem die Frage stellen: Welches sind die wünschenswerten Eigenschaften eines guten Tonsystems? Die Antwort darauf findet man am leichtesten, wenn man sich irgend ein Tonsystem, etwa das herrschende, als Beispiel vorlegt und untersucht. Hiedurch wird man nämlich mit einem Male in medias res versetzt, und lernt die Vorzüge kennen, die beizubehalten oder wenn möglich noch zu steigern wünschenswert sind, und die Mängel, welche man entweder ganz zu vermeiden oder wenigstens zu verringern streben wird.

Das gegenwärtig allgemein übliche, im Klavier verkörperte Tonsystem besteht aus nur 12 Tönen; sie sind der Reihe nach mit ihren Schwingungszahlen:

| *C* | *Cis* | *D* | *Dis* | *E* | *F* | *Fis* | *G* | *Gis* | *A* | *B* | *H* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha\xi$ | $\alpha^2\xi$ | $\alpha^3\xi$ | $\alpha^4\xi$ | $\alpha^5\xi$ | $\alpha^6\xi$ | $\alpha^7\xi$ | $\alpha^8\xi$ | $\alpha^9\xi$ | $\alpha^{10}\xi$ | $\alpha^{11}\xi$ | $\alpha^{12}\xi = 2\xi$. |

Mithin ist $\alpha^{12} = 2$, also $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

Diese Zahlen stehen in einer geometrischen Progression, die auch ins Unendliche fortgesetzt werden kann, aber darum doch nur diejenigen Töne liefert, die in der ersten Gruppe von zwölfen enthalten sind, und zwar in derselben Ordnung; denn es ist $\alpha^{13}\xi = \alpha^{12} \cdot \alpha\xi = 2\alpha\xi = Cis$, $\alpha^{14}\xi = \alpha^{12} \cdot \alpha^2\xi = 2\alpha^2\xi = D$ usw., was also dieselben Töne in der zweiten Oktave gibt. Man kann sie sich in einen Kreis wie die 12 Ziffern eines Uhrzifferblattes angeordnet denken, und kann jetzt von jeder beliebigen unter ihnen anfangend sehen, daß auf dieselbe Weise, wie die zweite Gruppe aus der ersten gebildet wird, auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten usw. und schließlieh die erste aus der letzten hervorgeht.

Ähnlich wie diese 12 Bestandtöne bilden auch die Quinten einen in sich zurückkehrenden Kreis, der von einem beliebigen Tone als

nulltem gezählt der siebente ist, nämlich die Quinte dieses nullten. Das gibt den Quintenzirkel:

*C G D A E H Fis Cis Gis Dis B F C,*

nach welchem offenbar dieselbe Reihe von Quinten abermals erscheint.

Auch die Terzen schließen sich zyklisch zusammen, es sind dies jedoch kleinere, aus nur einigen der 12 Töne gebildete Kreise. Die großen Terzen bilden deren 4, nämlich:

*C E Gis C*
*Cis F A Cis*
*D Fis B D*
*Dis G H Dis.*

Die kleinen Terzen ergeben hingegen deren 3, nämlich:

*C Dis Fis A C*
*Cis E G B Cis*
*D F Gis H D,*

Es gehen mithin 3 große und 4 kleine Terzen auf die Oktave.

Da zu jedem der 12 Töne die Quinte, die kleine und die große Terz unter eben den 12 Tönen gefunden wird, so kann man auch über jedem derselben als Grundton einen Dur- und einen Moll-Dreiklang konstruieren, und da aus je 3 solchen Dreiklängen eine Tonleiter gebildet werden kann, so ergeben sich aus nur 12 Tönen 12 vollständige Dur- und 12 vollständige Moll-Tonleitern, was unstreitig eine bedeutende Leistung mit wenigen Mitteln ist, die hauptsächlich durch den Umstand möglich wird, daß das Tonsystem ein in sich zurückkehrendes ist, und infolgedessen ein jeder Ton in allen möglichen Eigenschaften erscheint und Dienste leistet, einmal als Grundton, dann als Quinte eines anderen Grundtones, dann als große Terz eines dritten, ferner als kleine Terz eines vierten usw. Diese Eigenschaft des in sich Zurückkehrens ist also eine wünschenswerte, wenigstens insofern, als unter sonst ähnlichen Umständen das in sich zurückkehrende Tonsystem vor einem anderen den Vorzug verdient.

Eine in ähnlicher Weise schätzbare Eigenschaft ist das Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression. Sie werden dadurch im musikalischen Sinne, das heißt nach dem Urteile eines geübten Gehörs, äquidistant, und das aus solchen äquidistanten Tönen zusammengesetzte Tonsystem bietet vor einem anderen ähnliche Vorteile, wie ein in gleiche Teile eingeteilter Maßstab vor einem anderen mit ungleicher Teilung. Es erhalten alle gleichnamigen Intervalle einerlei Wert, alle Quinten,

großen und kleinen Terzen usw. werden gleich, d. h. entweder gleich rein, oder gleich temperiert, alle Akkorde, alle Tonleitern haben, abgesehen von der Tonhöhe, einerlei Klang und stellen eben darum im Grunde auch nur eine einzige Leiter vor, und ein jedes Tonstück klingt, in jeder beliebigen Tonart vorgetragen, gleich gut oder gleich übel.

Ob sich aber die reine Tonleiter, die doch offenbar im Tonsysteme möglichst getreu wiedergegeben sein sollte, mit der Einteilung in gleiche Teile überhaupt, und mit der 12-Teilung insbesondere vertrage, ist erst die Frage. Untersucht man, um hierüber vorläufigen Aufschluß zu erhalten, die reine Dur-Tonleiter (2), so gewahrt man in derselben mehrerlei Abstände nächster Nachbartöne voneinander. So stehen $C$ und $D$ und $F$ und $G$, ebenso $A$ und $H$ im Verhältnis $\frac{9}{8}$ zueinander. Diesen Abstand nennt man einen *großen ganzen* Ton. In dieser Weise besteht zwischen $D$ und $E$, desgleichen zwischen $G$ und $A$ das Verhältnis $\frac{10}{9}$ der Schwingungszahlen. Dieser Abstand wird ein *kleiner ganzer* Ton genannt. Zwischen $E$ und $F$, ebenso zwischen $H$ und $C$ ist das Verhältnis $\frac{16}{15}$, was ein *großer Halbton* heißt. Beachtet man noch endlich die ebenfalls wichtige kleine Terz mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{6}{5}$ gegen die große Terz mit $\frac{5}{4}$, so stehen diese beiden Terzen im Abstande $\frac{25}{24}$, der ein *kleiner Halbton* heißt.

Die Oktave wäre mithin aus 3 großen ganzen, 2 kleinen ganzen und 2 großen Halbtönen zusammengesetzt. Das 12stufige Tonsystem hebt den Unterschied zwischen großen und kleinen Ganz- und Halbtönen auf und unterscheidet nur ganze und halbe Töne schlechtweg, läßt mithin die Oktave aus 6 ganzen oder 12 halben Tönen bestehen, was, als erste Annäherung betrachtet, auch ohne Widerrede mathematisch korrekt ist. Natürlich ist von diesen Tönen keiner rein, sondern es sind alle mehr oder minder temperiert. Um zu sehen in welchem Maße, berechnet man ihre Schwingungszahlen. Sie sind:

$$
(4)\quad \begin{array}{llll}
C &= \zeta & Fis &= \alpha^6\zeta = 1{,}41421\,\zeta \\
Cis &= \alpha\,\zeta = 1{,}05946\,\zeta & G &= \alpha^7\zeta = 1{,}49831\,\zeta \\
D &= \alpha^2\zeta = 1{,}12246\,\zeta & Gis &= \alpha^8\zeta = 1{,}58740\,\zeta \\
Dis &= \alpha^3\zeta = 1{,}18921\,\zeta & A &= \alpha^9\zeta = 1{,}68179\,\zeta \\
E &= \alpha^4\zeta = 1{,}25992\,\zeta & B &= \alpha^{10}\zeta = 1{,}78180\,\zeta \\
F &= \alpha^5\zeta = 1{,}33484\,\zeta & H &= \alpha^{11}\zeta = 1{,}88775\,\zeta .
\end{array}
$$

Es sei nun die Temperatur der Quinte, das heißt diejenige der Einheit nahe Zahl, mit welcher die Schwingungszahl der reinen Quinte $\frac{3}{2}\zeta$ mul-

tipliziert werden muß, um die Schwingungszahl der temperierten Quinte des Systems zu erhalten, $q$, so ist:

$$\frac{3}{2}q = 1{,}49831, \text{ mithin } q = 1 - \frac{1}{886} = \frac{885}{886}.$$

Diese Temperatur $q$ gilt für alle Quinten wegen der absoluten Gleichheit aller gleichnamigen Intervalle.

Nennt man ebenso die Temperatur der großen Terz $T$, so ist:

$$\frac{5}{4}T = 1{,}25992, \text{ mithin } T = 1 + \frac{1}{126} = \frac{127}{126}.$$

Die Temperatur der kleinen Terz sei mit $t$ bezeichnet; es wird denn für alle kleinen Terzen des ganzen Systems:

$$\frac{6}{5}t = 1{,}18921, \text{ mithin } t = 1 - \frac{1}{111} = \frac{110}{111}.$$

Endlich sei die Temperatur der Septime, welche die reine Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta = 1{,}75\zeta$ besitzt, die nur mit der Schwingungszahl des Tones $B$ im Verzeichnisse (4), nämlich $1{,}78180\zeta$ vergleichbar ist, $s$, so wird:

$$\frac{7}{4}s = 1{,}78180, \text{ mithin } s = 1 + \frac{1}{55} = \frac{56}{55}.$$

Man sieht hier, daß im 12stufigen Tonsysteme die Quinten der Reinheit sehr nahe kommen, die Terzen sind zwar eben noch nicht heulende Wölfe, aber sehr nahe daran auf diese Benennung Anspruch machen zu dürfen. Die Septime endlich ist entschieden ein heulender Wolf, vorausgesetzt, daß man den Ton $B$ wirklich als den Repräsentanten des sechsten Obertones von $C$ mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ ansieht. Nach einer anderen Ansicht kommt man dem eigentlichen Sachverhalte aber am nächsten, wenn man annimmt, daß die reine Septime in dem 12stufigen Tonsysteme, welches auch das *chromatische* heißt, gar nicht vertreten sei, und daß dieser Ton $B$ gar kein Repräsentant der reinen Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ sei, sondern der eines anderen Reintones mit der einfachen Schwingungszahl $\frac{9}{5}\zeta$, der vermöge dieser Einfachheit ähnlich der kleinen Terz mit der Schwingungszahl $\frac{6}{5}\zeta$, so wie diese, eine selbständige Rolle in der Musik zu spielen berufen ist. Die Theorie wiederspricht indessen dieser Ansicht, indem sie dieses $B$ des chromatischen Systems für den wirklichen Repräsentanten der reinen Septime erklärt und somit zu einem heulenden Wolfe macht. Das soll in der Folge gezeigt werden.

Alle diese, denselben Namen tragenden Intervalle sind auch gleich temperiert, was sich, wie man sagt, dadurch kennzeichnet, daß sie mit den ihnen entsprechenden Reintönen zugleich angeschlagen, gleichviel Schwebungen hören lassen. Darum nennt man dieses Tonsystem auch ein *gleichschwebend temperiertes.* Dies ist aber irrig; die Anzahl der Schwingungen ist vielmehr der Schwingungszahl, der Tonhöhe proportional, und wenn man daher das chromatische System oder irgend ein ähnliches gleichschwebend temperiert nennt, so ist dies nur in demselben Sinne richtig, in welchem man dasselbe *auch gleichstufig* nennen kann.

Es dient vielleicht zur Klarheit, besonders für diejenigen Leser, die mehr mathematisch als musikalisch gebildet sind und für welche diese Abhandlung vorzugsweise verfaßt ist, zu bemerken, daß der Begriff von Intervall und Stufe ein anderer ist in der Musik als in der Geometrie. Sind nämlich $M$ und $M'$ Punkte einer geraden Linie, $x$ und $x'$ ihre Koordinaten, so ist bekanntlich $x' - x$ das zwischen ihnen vorhandene geometrische Intervall. Sind hingegen $x'$ und $x$ Schwingungszahlen zweier Töne statt Koordinaten, so ist das musikalische Intervall zwischen diesen Tönen $\frac{x'}{x}$. Im ersteren Sinne sind also Punkte, denen Koordinaten $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ entsprechen, äquidistant, wenn $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \ldots$ besteht, d. h. wenn diese Koordinaten eine arithmetische Progression bilden; in der Musik hingegen sind Töne mit diesen Schwingungszahlen äquidistant, wenn $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \cdots$ ist, d. h. wenn diese Schwingungszahlen in geometrischer Progression stehen.

Nennt man hiemit im Zusammenhange $x$ die Schwingungszahl eines Tones in einem temperierten Tonsysteme und $n$ die Anzahl der Schwebungen in der Sekunde, die derselbe mit dem Reintone macht, den er darzustellen berufen ist, so ist das System ein gleichschwebend temperiertes, wenn nicht $n$, wohl aber $\frac{n}{x}$ eine konstante Größe ist, die nur für verschieden benannte Intervalle: Terz, Quinte, Septime, ... andere und andere Werte anzunehmen vermag.

Gegenüber den Vorteilen des 12stufigen Tonsystems sind indessen auch Schattenseiten desselben zu verzeichnen, sogar solche, daß Petzval nicht anstand, dieses heute allgemein verbreitete System keineswegs als das beste zu erklären, nicht etwa in der Absicht, dieses durch ein vollkommeneres zu ersetzen, was er für ein ganz aussichtsloses Beginnen hielt, sondern bloß um zu zeigen, daß die wissenschaftliche Untersuchung unabhängig von der allgemeinen Anschauung ihre eigenen

Wege gehen muß, und um für den Fall, als vielleicht dereinst doch durch mächtige und langandauernde Einflüsse eine zweckmäßige, allgemeine Reform der Musik möglich werden sollte, die Vorarbeiten zu liefern, welche die Art und den Umfang einer solchen Reform zu bestimmen haben.

Die Vereinfachung des Tonalphabets und Zurückführung desselben auf möglichst wenige, z. B. auf nur 12 Töne, wie im chromatischen Systeme, ist allerdings ein Vorteil; es kann aber in der Vereinfachung auch zu weit gegangen sein. Wenn man beispielsweise das Alphabet der deutschen Sprache dadurch vereinfachen wollte, daß man Buchstaben von ähnlichem Klange, wie b und p, d und t, f, v und w usw. je durch ein einziges Zeichen ersetzte, so wäre dies offenbar ein zu weit getriebenes Vereinfachungsbestreben, weil man dann nicht mehr imstande wäre, den richtigen Laut der Worte in der Schrift wiederzugeben. In ähnlicher Weise kann auch in der Vereinfachung des Tonalphabets durch Reduktion auf nur 12 Töne zu weit gegangen sein, wenn dadurch Tonmangel erzeugt ist, infolge dessen wichtige Intervalle und brauchbare Akkorde ausgeschlossen und gewisse musikalische Wirkungen und Feinheiten unerreichbar werden und wenn ferner der Wohllaut der Akkorde dadurch beeinträchtigt wird. Beides ist wirklich der Fall.

Wie bereits bemerkt worden ist, schließt das chromatische Tonsystem den sechsten Oberton des Grundtones, die reine Septime nämlich, die auf die erste Oktave reduziert das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{4}$ hat, aus und ersetzt denselben im Dominant-Septimen-Akkord durch einen heulenden Wolf. Hiemit wird aber nicht nur das Intervall $\frac{7}{4}$, sondern werden alle Intervalle, die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückt werden und wo entweder der Zähler oder der Nenner die Primzahl 7 ist, ausgeschlossen. In der Tat stehen die Schwingungszahlen der 4 Töne des Dominant-Septimen-Akkordes, z. B. *G*, *H*, *D*, *Eis* im Verhältnisse der Zahlen 4, 5, 6, 7. Fehlt mithin der vierte Ton *Eis*, so fehlt zu *G* das Intervall $\frac{7}{4}$, mithin auch seine Ergänzung zur Oktave: $\frac{8}{7}$, die mit $\frac{7}{4}$ multipliziert das Produkt 2 gibt. Da aber das System über jedem seiner Bestandtöne konstruiert ist, so fehlen die Intervalle $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}$ nicht nur zu *G*, sondern zu jedem anderen Tone im ganzen Systeme überhaupt. Zu *H* hat *Eis* das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{5}$,

dessen Ergänzung zur Oktave $\frac{10}{7}$ ist. Da *Eis* nicht vorhanden ist, so sind auch die Intervalle $\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{7}$ im Systeme nicht vorhanden. Zu *D* endlich steht *Eis* im Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{6}$, dessen Ergänzung $\frac{12}{7}$ ist. Mithin fehlen im chromatischen Systeme die Intervalle:

$$\overline{\frac{7}{4}\;\frac{8}{7}}\quad \overline{\frac{7}{5}\;\frac{10}{7}}\quad \overline{\frac{7}{6}\;\frac{12}{7}}.$$

Nun ist aber erfahrungsmäßig eine Tonverbindung dem Gehöre desto faßlicher, in je einfacheren Zahlenverhältnissen ihre Bestandtöne stehen, weshalb die durch sehr einfache Brüche $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle in der Musik die meiste Wichtigkeit haben. Die wichtigsten sind:

$$\overline{1\;2},\quad \overline{\frac{3}{2}\;\frac{4}{3}},\quad \overline{\frac{5}{4}\;\frac{8}{5}},\quad \overline{\frac{6}{5}\;\frac{5}{3}},$$

paarweise so zusammengestellt, wie sie sich zur Oktave ergänzen. Nach ihnen folgen sogleich die obigen im chromatischen Systeme nicht vertretenen. Und es geht daraus hervor, daß ein jedes andere Tonsystem, in welchem auch die reine Septime Platz findet, bloß durch die Anwesenheit dieses einen Tones das chromatische Tonsystem in der Anzahl brauchbarer Intervalle im Verhältnisse 4 : 7 überbieten wird.

Diese oder ähnliche Betrachtungen waren es vermutlich, die den berühmten Kontrapunktisten Joh. Philipp Kirnberger und vielleicht auch seinen großen Lehrmeister Sebastian Bach veranlaßten, diesem wichtigen Tone die verdiente Aufmerksamkeit zu schenken. Ersterer suchte ihn in das Tonsystem unter dem Namen *J* einzuführen, zeigte seine Verwendung in einigen von ihm komponierten Musikstücken und stellte zu Berlin ein Orgelregister mit dieser *J* benannten reinen Septime auf, welches aber, nachdem die auf Kirnberger folgenden Organisten nichts damit anzufangen wußten, später wieder beseitigt worden ist. Fasch, ein Schüler Kirnbergers, erneuerte die Bestrebungen seines Lehrers, diesen Ton der Musik zu erhalten, mit demselben geringen Erfolge. Das Urteil der musikalischen Zeitgenossen Faschs und Kirnbergers war über dieses Intervall ungefähr auf folgende zwei Punkte zurückzuführen: a) das Intervall $\frac{7}{4}$ ist ein von Kirnberger neu erfundenes, ein Ton, der Vorzeit unbekannt; b) ist aber nichts anderes als eine temperierte Septime, d. h. ein temperierter heulender Wolf. Dieses Urteil hält nicht Stich, denn es kann dagegen folgendes bemerkt werden. Zu a): Das Intervall $\frac{7}{4}$ ist zwar weder auf den Tasten des

Klaviers, noch auf den in Bünde geteilten Griffbrettern anderer Saiteninstrumente, noch auch in der musikalischen Notenschrift vorhanden; denn wäre es wirklich da, so hätte ja Kirnberger es nicht unter der Bezeichnung $J$ einzuführen gebraucht. Es klingt aber als Oberton mit einer jeden angeschlagenen Saite im allgemeinen mit und kann als Klangbestandteil durch einen Helmholtzschen Resonator nachgewiesen werden. Auch isoliert als Flageolett-Ton ist es jedem Musiker bekannt und wird erhalten, wenn man eine Saite im siebenten Teile der Länge leise mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Ja man kann sich auf diese Weise den ganzen reinen Septimen-Akkord vollkommen frei von jeder Temperatur oder Verfälschung vorführen, indem man eine Saite der Reihe nach im vierten, fünften, sechsten und siebenten Teile ihrer Länge berührt und anschlägt und kann bei dieser Gelegenheit mit sich eins werden, ob man die reine Septime für eine Konsonanz oder Dissonanz zu halten hat. Neu oder unbekannt waren daher alle diese Töne nicht, nur eines scheint den um die Theorie der Schwingungen gespannter Saiten wenig bekümmerten Musikern unbekannt gewesen zu sein, daß nämlich diese Töne im Verhältnisse 4, 5, 6, 7 ihrer Schwingungszahlen zueinander stehen. Zu b) kann bemerkt werden, daß dies den Begriff des Temperierens völlig umkehren hieße. Sonst ist nämlich der untemperierte oder unverfälschte Ton rein, der temperierte verfälscht; hier wären hingegen der untemperierte falsch und der temperierte rein. Das sind die Folgen des Gebrauches oder Mißbrauches sinnabschwächender, fremdsprachlicher Benennungen, anstatt der ehrlichen deutschen Ausdrücke! Sagte man schlicht und gerade: Verfälschen und nicht Temperieren, so wäre eine solche Begriffsverwirrung unmöglich. Es scheint also hier wieder einer der so häufig vorkommenden Fälle vorzuliegen, daß das Urteil eines einzigen gründlichen Denkers, wie Kirnbergers, richtiger ist, als das Gesamturteil aller seiner Zeitgenossen. Die reine Septime mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ ist also und bleibt ein Ton von hoher Wichtigkeit in der Musik, und eine Theorie der Tonsysteme, die auf dieselbe keine Rücksicht nimmt, kann auch auf Allgemeinheit keinen Anspruch erheben. Es wird daher in dieser Abhandlung der Septime $\frac{7}{4}$ dieselbe Aufmerksamkeit geschenkt, wie den anerkannt konsonanten Intervallen und namentlich den beiden Terzen.

Nicht nur die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle, in denen die Primzahl 7 vertreten ist, sind

der Beachtung wert; auch die Primzahlen 11 und 13, mithin die Intervalle:

$$\overline{\tfrac{11}{6}\ \tfrac{12}{11}},\quad \overline{\tfrac{11}{7}\ \tfrac{14}{11}},\quad \overline{\tfrac{11}{8}\ \tfrac{16}{11}},\quad \overline{\tfrac{11}{9}\ \tfrac{18}{11}},\quad \overline{\tfrac{11}{10}\ \tfrac{20}{11}},$$

$$\overline{\tfrac{13}{7}\ \tfrac{14}{13}},\quad \overline{\tfrac{13}{8}\ \tfrac{16}{13}},\quad \overline{\tfrac{13}{9}\ \tfrac{18}{13}},\quad \overline{\tfrac{13}{10}\ \tfrac{20}{13}},\quad \overline{\tfrac{13}{11}\ \tfrac{22}{13}}$$

sind womöglich nicht ganz außer Acht zu lassen, und ein Tonsystem, das sie besitzt, wird wenigstens zu Studien über die Charakteristik der Akkorde, welche einfachen Zahlenreihen entsprechen, einigen Vorzug verdienen. Selbstverständlich kommt ihnen die Wichtigkeit, welche die Konsonanzen haben, nicht zu, diese wird sogar beinahe Null, wo die 7 nicht vertreten ist. Den genauen numerischen Wert der Wichtigkeit dieser Intervalle aber hier anzugeben ist schon deshalb unmöglich, weil gründliche Studien über die psychische Charakteristik der Intervalle, Akkorde und Tonarten bisher sehr vernachlässigt worden sind. Daher denn auch die moderne Musik nach **Petzvals** Ansicht über die Charaktere Dur und Moll, hart und weich damals noch nicht hinausgekommen war. Nur von **Koch** ist ihm eine Auswahl verschiedener 7- und mehrtöniger Tonleitern mit ihrer psychischen Charakteristik und naturgemäßen harmonischen Begleitung vorgelegen, die aber nicht veröffentlicht worden war. Käme es nun, meinte er, dereinst zur Geltung, was dieser scharfsinnige und vielerfahrene Tonforscher findet, z. B. die folgende über dem Grundtone *as* aufgebaute Tonleiter, welche die unten angesetzten Schwingungszahlen hat und in angemessener Begleitung im echten Stile einer würdigen Kirchenmusik gehalten ist:

| *as* | *ais* | *ces* | *des* | *es* | *eis* | *ges* | *as* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{z}$ | $\frac{12}{11}\mathfrak{z}$ | $\frac{6}{5}\mathfrak{z}$ | $\frac{4}{3}\mathfrak{z}$ | $\frac{3}{2}\mathfrak{z}$ | $\frac{18}{11}\mathfrak{z}$ | $\frac{9}{5}\mathfrak{z}$ | $2\mathfrak{z}$, |

so gewänne die Primzahl 11 in der Musik eine vorher nie geahnte Geltung.

In ähnlicher Weise vermöchten aber vielleicht auch andere einfache Intervalle sich Geltung zu erringen. Deren besitzt nun aber das chromatische Tonsystem nur wenige. Man bekommt eine Übersicht über dieselben, wenn man die Dezimalbrüche in den Schwingungszahlen des Verzeichnisses (4) in Kettenbrüche und diese in einfache Näherungsbrüche verwandelt; dies gibt:

| *C* | *Cis* | *D* | *Dis* | *E* | *F* | *Fis* | *G* | *Gis* | *A* | *B* | *H* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{z}$ | $\frac{18}{17}\mathfrak{z}$ | $\frac{9}{8}\mathfrak{z}$ | $\frac{44}{37}\mathfrak{z}$ | $\frac{63}{50}\mathfrak{z}$ | $\frac{4}{3}\mathfrak{z}$ | $\frac{58}{41}\mathfrak{z}$ | $\frac{3}{2}\mathfrak{z}$ | $\frac{100}{63}\mathfrak{z}$ | $\frac{37}{22}\mathfrak{z}$ | $\frac{16}{9}\mathfrak{z}$ | $\frac{17}{9}\mathfrak{z}$ | $2\mathfrak{z}$, |

eine Reihe, in der man die oben angeführten einfachen und wichtigsten Intervalle nur spärlich vertreten sieht. Es ist also nicht unbegründet, wenn man sagt, daß das chromatische System an Tonmangel leide.

Diese Betrachtungen hatte indessen Petzval nicht dazu angestellt, um den Mangel zu beweisen, der sich in einem nur 12stufigen Systeme von selbst versteht, sondern zu dem Zwecke, um mit Klarheit darzutun, was unter Tonmangel und Tonreichtum zu verstehen ist, wie es Systeme geben kann, die bei einer großen Anzahl von Tönen dennoch an Tonmangel leiden, endlich wie man diese in Rücksicht auf Tonreichtum oder -mangel zu beurteilen habe.

Daß im chromatischen Tonsysteme der Wohlklang der Akkorde durch die übertemperierten und auch wirklich übel klingenden Terzen beeinträchtigt sei, wird wohl ziemlich allgemein von den Musikern zugestanden, jedoch in einer Weise, die zu einem gründlichen Urteile über dasselbe System in dieser Beziehung keinen genügenden Anhalt gewährt. Sie sagen nämlich gewöhnlich: „Die Quinten wären schon gut und rein genug, wenn nur die Terzen reiner wären!“ Hierauf kann man erwidern: Wenn die Quinten nur eben rein genug sind und nichts weiter, so müssen die Terzen auch gut genug sein, denn im Tonreiche gilt dasselbe, was anderwärts als Regel feststeht, nämlich, man kann niemand etwas geben, was man nicht einem anderen wegnimmt. Haben daher die Quinten an Reinheit nur eben genug und kann man ihnen nichts nehmen, so kann man auch den Terzen nichts geben. Andererseits könne man auf eine Tatsache hinweisen, die beinahe zu beweisen scheint, daß das Urteil der Musiker keineswegs das Urteil des Volkes sei, nämlich auf die, daß oft in Konzerten nach einem in möglichst reinen Tönen ausgeführten Streichquartette sich ein Klavierspieler hören läßt mit seinen falschen Terzen und heulenden Septimen, dem aber gleichwohl vom versammelten Publikum wütend applaudiert wird. Hieraus scheine beinahe hervorzugehen, daß die chromatischen Terzen nur dem verfeinerten Gehör der Musiker von Fach übel klingen, für das übrige Menschengeschlecht jedoch rein und wohlklingend genug seien, wenn man nicht etwa annehmen will, daß der Applaus gar nicht der Musik gelte, sondern nur der brillanten Technik des Virtuosen. Wiewohl nun übrigens inbezug auf Wohlklang und Übelklang niemand anderer, als eben der Musiker urteilsfähig ist, so hat doch sein Urteil hier nur dann wissenschaftlichen Wert, wenn es auf der genauen Kenntnis der Charakteristik der konsonanten Intervalle und der Gewichte ihrer Verfälschungen gegründet ist, und wenn er infolge dieser Kenntnis imstande ist, seine Angaben in wenigstens sehr angenäherten Zahlenwerten zu machen. Es kommt also, wenn auch

nicht alles, doch mindestens sehr viel auf die genaue numerische Kenntnis der Empfindlichkeit der Konsonanzen an, ohne sie kann man weder über ein vorgelegtes Tonsystem ein endgültiges Urteil fällen, noch auch die Berechtigung der zahlreichen, der ersten Klasse angehörigen Systeme dieser Art, mit denen sich diese Abhandlung beschäftigt, über jeden Zweifel erheben. In der Tat, wenn sich nachweisen ließe, daß die Quinte keine größere Verfälschung verträgt, als $\frac{1}{886}$, wie im chromatischen Systeme, so wären alle Tonsysteme der ersten Klasse unbrauchbar, weil in ihnen allen die Quinte stärker belastet ist. Und hiemit wäre dann natürlich auch die Berechtigung dieser Abhandlung teilweise aufgehoben. Die ältere Musikliteratur bietet nun über diesen wichtigen Punkt wenig Brauchbares; in der neueren Zeit sind jedoch dankenswerte Bestrebungen aufzuzeichnen, die hiezu als Vorarbeiten gelten können. Man hat nämlich versucht, die Abstufungen der Intervalle in Reinheit festzustellen. Helmholtz hat diese sogar durch eine Kurve bildlich dargestellt. Das jedoch, was man in der Theorie der Tonsysteme braucht, ist nicht diese Kurve, weil hier wenig darauf ankommt, ob eine Dissonanz etwas mehr oder weniger dissoniert, sondern es sind dies die möglichst genauen Werte der Krümmungshalbmesser an den Scheitelpunkten, oder was dasselbe ist, die zweiten Differentialquotienten der Ordinaten, und um beurteilen zu können, ob positive und gleich große negative Verfälschungen auch gleich unangenehm wahrgenommen werden, auch noch allenfalls die dritten. Nicht aus einer gewissen Analogie mit einem im widerstehenden Mittel schwingenden Punkte, von welcher leicht zu beweisen ist, daß sie nicht besteht, sind diese fundamentalen Kenntnisse zu ziehen, wie Helmholtz getan, sondern aus einer gründlichen, auf sorgfältig angestellte Beobachtungen gestützten Theorie.

Es ist nicht zu bezweifeln, daß die rastlos fortschreitende Akustik mit der Zeit auch diese Daten mit zureichender Genauigkeit liefern wird.

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen erfährt der Begriff eines Tonsystems eine Erweiterung; man sieht nämlich, daß nicht nur Tonsysteme von der Art des hier als Beispiel gewählten chromatischen, in welchem sämtliche gleichnamige Intervalle einerlei Wert besitzen, sondern daß auch andere mit verschieden temperierten Quinten und Terzen in Anwendung gekommen sind. Sie heißen in der musikalischen Sprache *ungleich temperierte Tonsysteme.* Sie werden aufgestellt zu dem doppelten Zwecke: Um einigen Tonarten einen vollkommeneren Wohllaut zu verschaffen und den anderen einen verschiedenen psychischen Charakter zu verleihen. Berühmte Musiker, wie Kirnberger und

Malcolm, ebenso Euler und Györy sind auf dem äußerst mühsamen Wege des arithmetischen Versuches zu solchen Tonsystemen gelangt. In allen sind einige wenige Tonarten wohllautend, die übrigen desto übelklingender; eine reine Septime ist nirgends zu finden.

Allgemeineren Anklang fanden jedoch diese Versuche nicht. Dies hindert übrigens nicht, daß sie die Aufmerksamkeit des Arithmetikers für sich in Anspruch nehmen, schon weil die ungleich schwebend temperierten Tonsysteme die allgemeine Form, die gleichschwebend temperierten nur der besondere Fall sind, sich also mit den ersten mehr Zwecke und diese zugleich genauer erreichen lassen müssen, als mit den letzteren.

Solange man also die Theorie der Tonsysteme als ein arithmetisches Problem behandelt, wird man immerhin, um wissenschaftlich zu Werke zu gehen, die Tonsysteme einteilen können, ja sogar müssen, in gleichschwebend und ungleichschwebend temperierte. In den einen besitzen sämtliche gleichnamigen Intervalle: Quinten, Terzen, Septimen usw. einerlei Wert, in den anderen sind diese Werte von Tonart zu Tonart verschieden. Um dem in allen mathematischen Wissenschaften notwendigen Streben erst nach Einfachheit, dann aber nach Allgemeinheit gerecht zu werden, sind zuerst die gleichschwebend temperierten Tonsysteme in Angriff zu nehmen. Dann kann man aber zu den ungleichschwebend temperierten übergehen, wenn auch nur um das vorgelegte arithmetische Problem zur allgemeinen Lösung zu bringen, ohne Rücksicht darauf, ob sie die Musik als brauchbar anerkennt oder nicht.

Aus dem bisher Gesagten geht nun wohl genügend hervor, sowohl was man ein Tonsystem nennt, wie auch welches die allgemeinen Forderungen sind, welche man an ein solches zu stellen bisher für gut befunden hat. Man wird sagen: Ein Tonsystem ist eine geschlossene und in sich zurückkehrende Tonperiode, deren Bestandtöne sowohl ihrer Zahl nach, wie auch vermöge ihrer Schwingungsverhältnisse sich geeignet erweisen, um damit gute Musik zu machen. Unter guter Musik versteht man aber nicht nur wohlklingende Musik, sondern auch die unbeschadet ihres Wohlklanges oder vielleicht auch ohne Rücksicht auf denselben einen mannigfachen psychischen Charakter hat. Der Tonsetzer will nämlich mit der Gewalt der Töne das Gemüt des Menschen beherrschen und will ihn nach seinem Belieben in eine lustige, traurige, andächtige, kriegerische usw. Stimmung versetzen. Das Tonsystem darf daher nicht zu wenig Töne enthalten, weil daraus Tonarmut entsteht, zufolge welcher die musikalischen Wirkungen nicht mehr erzielt werden können, es darf aber auch nicht zu viele Töne

zählen, weil die Verschwendung der Tonmittel zu anderen schweren Übelständen führt. Ferner ist es nicht notwendig, daß die Töne, aus welchen das Tonsystem besteht, *reine* Töne seien, sie können vielmehr alle *temperiert*, das heißt verfälscht sein, jedoch nur um einen so geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl, daß die Verfälschung von dem menschlichen Gehör unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr, wenigstens nicht mehr mißklingend wahrgenommen werden kann, also zum Beispiel um weniger als $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl.

Warum Petzval gerade diese Zahl $\frac{1}{240}$ gewählt hat, bedarf einer Erläuterung. Er behauptete, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl sei selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Oktave nicht ausgenommen, auch durch das feinste musikalische Gehör unter solchen Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr wahrzunehmen. Nur im Unisono ist auch eine noch geringere Abweichung von der Reinheit unschwer zu entdecken. Er beweist dies durch folgende Betrachtung.

Es kann allen Musikern unwiderleglich nachgewiesen werden, daß nicht nur sie, sondern auch alle ihre Vorgänger falsche Intervalle, und zwar nicht nur falsche Terzen und Quinten, denn dies würde sich von selbst verstehen, sondern auch falsche Oktaven, und zwar falsch um wenigstens $\frac{1}{240}$ bald im positiven, bald im negativen Sinne im eigenen und fremden Spiele geduldet haben, und zwar ohne Not, denn sie hätten ohne alle Mühe und Kosten diese falschen Töne auch vermeiden und durch reine Oktaven ersetzen können. Da sie dies aber nicht taten, bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß sie diese falschen Töne gar nicht bemerkt haben. Daß wirklich eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ in der Musik ohne Not bis heute noch geduldet wird, zeigen alle Saiteninstrumente, welche in Bünde geteilte Griffbretter haben, wie Zithern, Guitaren, Lauten usw. Wird bei diesen Instrumenten eine Saite auf das Griffbrett niedergedrückt, so wird dadurch ihre Spannung etwas vergrößert, mithin der Ton erhöht. Bei dem gewöhnlich vorkommenden Abstande der Saiten vom Griffbrette beträgt diese Tonerhöhung etwa $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl oder auch Saitenlänge, kann aber auch bedeutend größer werden. Es scheint nun, daß bei der Verfertigung der ersten Instrumente dieser Art auf die eben besprochene Wirkung keine Rücksicht genommen worden ist,

sie waren daher vermutlich nach der pythagoräischen Vorschrift so eingeteilt, daß der Oktavenbund genau in die Mitte der Saite, der Quintenbund genau auf $\frac{1}{3}$ ihrer Länge usw. fiel. Bei dieser Anordnung erhöhten sich die sämtlichen gegriffenen Töne um gleichviel, nämlich um $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl, oder nahe um $\frac{1}{30}$ eines ganzen Tones, waren mithin unter sich richtig und wohlklingend, und nur wenn eine leere Saite angeschlagen wurde, erwies sich der Ton gegen die gegriffenen um $\frac{1}{240}$ Schwingungszahl $= \frac{1}{30}$ Ton zu tief. Dieser Unterschied war aber zu klein, um anders bemerkt und verläßlich nachgewiesen werden zu können, als im Unisono, und wurde auch wirklich nur durch die mangelnde Übereinstimmung des Flageolett mit der gegriffenen Oktave entdeckt. Hier wäre nun ganz leicht zu helfen gewesen. Da nämlich die gegriffenen Töne alle untereinander harmonierten, und nur die wenigen der leeren Saiten zu tief waren, so hätte man offenbar die ersteren unangetastet lassen, die letzteren aber alle gleich viel, nämlich um $\frac{1}{30}$ Ton erhöhen sollen, was durch Verkürzung des ersten und letzten Bundes bei der Guitarre um $\frac{1}{10}$ Zoll (2,6 mm), bei der Zither um etwa die Hälfte dieses Betrages zu bewerkstelligen war. Aber auch das noch zu seiner Zeit im Gebrauch gestandene Verfahren der unrichtigen Einteilung war noch nicht aufgegeben worden, weil man den Fehler nicht erkannt hatte. Mithin wurde auch die Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungsdauer, die daraus entsprang, trotzdem sie oft vorkam, nie gehört; mithin ist eine solche Verfälschung selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Quinte und Oktave mit eingeschlossen, unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, und bei den in Rede stehenden Saiteninstrumenten selbst vom geübten Ohre nicht wahrzunehmen — was zu beweisen war.

Damit wollte aber Petzval keineswegs sagen, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ an der Oktave oder Quinte sei überhaupt durch das menschliche Ohr nicht wahrzunehmen. Im Gegenteile, Akustiker, Klavierstimmer, Orgelbauer usw. können selbst zehnmal kleinere Differenzen nicht nur entdecken, sondern auch messen. Dies geschieht jedoch durch Anwendung künstlicher Mittel und Herbeiführung von Umständen, unter welchen man Musik nicht zu machen pflegt. Der mit den feinsten Meßinstrumenten versehene Ingenieur, dem noch dazu die

nötige Zeit zur Verfügung steht, kann seine Messungen mit viel größerer Genauigkeit vollbringen, als der bloß auf sein Augenmaß Angewiesene, dem noch überdies keine Zeit zur Beobachtung gegönnt ist. Dies ist hier beiläufig der Sachverhalt. Es besteht ein großer Unterschied zwischen sorgfältiger Tonmessung und oberflächlicher Tonschätzung, und wer Musik hört, kann nicht messen, sondern nur oberflächlich schätzen.

Kehren wir zum eigentlichen Gegenstande wieder zurück.

Wer also ein neues Tonsystem entweder bilden oder über ein solches ein gegründetes Urteil fällen will, der muß sich offenbar drei Fragen beantworten können: 1. welche Tongruppen oder Tonfolgen klingen gut, was klingt besser, was klingt am allerbesten und unter welchen Umständen ist der höchste Wohlklang zu erzielen? 2. wie groß ist die Empfindlichkeit der einzelnen Intervalle gegen Verfälschung? und 3. welche Tonverbindungen besitzen irgend einen angebbaren psychischen Charakter, und sprechen demzufolge eine dem Gehör leicht erfaßbare musikalische Sprache?

Was die zwei ersten Fragen anlangt, so wird man vermutlich meinen, daß die mehrere tausend Jahre alte Musik dieselben bereits längst wird beantwortet haben; man wird ferner vermuten, daß die letzte Frage die meisten Schwierigkeiten bietet, und deshalb entweder gar nicht oder bisher nur unvollständig erledigt sei. Man täuscht sich indessen hierin vollständig. Gerade über die dritte Frage wissen wir das meiste, denn wir besitzen einen wertvollen, von Euler aufgestellten allgemeinen Satz, der klar und bestimmt sagt, welche Intervalle und Tongruppen im allgemeinen einen angebbaren psychischen Charakter haben, während hinsichtlich der beiden ersten Fragen Petzval behauptete, daß man damals in musikalischen Kreisen noch immer nicht einig war über das, was wohl klingt, sowie auch über das, was empfindlich und empfindlicher ist gegen Verfälschung. Es schien ihm dies am besten aus den Antworten der Musiker hervorzugehen, die in der Regel etwa folgendermaßen lauteten:

„Die edelste und vollkommenste, d. h. wohlklingendste Konsonanz ist die Oktave. Sie ist darum auch so empfindlich, daß sie nicht die allergeringste Verfälschung vertragen kann und ganz untemperiert und vollkommen rein bleiben muß. Nach ihr ist die Quinte die edelste und vollkommenste Konsonanz; sie verträgt darum auch nur sehr geringe Verfälschungen und darf nur so wenig als möglich temperiert werden. Dann kommen die Terzen; sie sind vollkommene Konsonanzen und können und müssen auch temperiert werden bis zum Heulen. Die Septimen sind Dissonanzen, kommen mithin auch nur in dissonanten Akkorden vor.“

Petzval hat die Widersprüche, welche in diesen Ansichten liegen, eingehend widerlegt und hat auf die Fragen selbst die zutreffenden Antworten gegeben. Schon im Anfange ist hier eines höchst wichtigen Prinzipes der Harmonielehre Erwähnung geschehen, welches er das Prinzip der angenäherten Äquivalenz der Oktaven nennt, und welches er so formuliert hat: Jeder Ton bildet mit allen seinen höheren und tieferen Oktaven eine Reihe von Tönen, die nach dem Urteile des menschlichen Gehöres einander in hohem Grade ähnlich sind, dergestalt, daß man in einem jeden Tongebilde, z. B. Akkorde, einen von ihnen für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Es werden deshalb auch alle diese Töne der ganzen Oktavreihe mit demselben Namen belegt und mit demselben Buchstaben bezeichnet. Die Richtigkeit dieses Satzes wird von allen Harmonielehrern ohne Unterschied anerkannt, wiewohl sie denselben nie so aussprechen, sondern gewöhnlich in andere Worte kleiden.

Petzval wollte diesen Satz vorderhand als Ergebnis der Erfahrung hingestellt wissen, und meinte, daß die Zeit vielleicht nicht mehr ferne sei, wo man ihn aus dem gründlich und erschöpfend bekannten Baue des menschlichen Ohres mit Hilfe der mathematischen Analysis ableiten wird.

Schon in seiner Theorie der Schwingungen gespannter Saiten[1]) hat Petzval den Satz aufgestellt, der hier brauchbar ist, nämlich: Wenn eine gespannte Saite durch die Schwingungen des Mittels, in welchem sie sich befindet, zum Schwingen angeregt wird, so schwingt sie alle ihr entsprechenden harmonischen Töne und ihre Oktaven auf dieselbe Weise, d. h. Ton und Oktave beide ohne Schwingungsknoten, oder mit derselben Anzahl von Schwingungsknoten, die sich an derselben Stelle befinden.

Da das Gehörorgan auch ein System in einem widerstehenden Mittel schwingender Saiten oder Fasern ist, oder sein soll, die durch die Schwingungen dieses Mittels selbst in Bewegung gesetzt werden, so ist nur noch übrig, zwischen den Identitäten der dynamischen Erscheinung und der sinnlichen Wahrnehmung einen Zusammenhang festzustellen. Damit wird dann das Prinzip der Äquivalenz der Oktaven eine Festigkeit gewinnen, die es den mathematisch bewiesenen Sätzen an die Seite stellt. Dieses Prinzip hat daher mehr für sich, als das übereinstimmende Zeugnis aller Musiker und Harmonielehrer, und der in der Kunst eingeführte Gebrauch.

---

1) Denkschriften der Akademie d. W. in Wien, 1859.

Aus ihm folgt unmittelbar, daß, wenn Quinte, große Terz und kleine Terz Konsonanzen sind, auch Quarte, kleine und große Sexte ähnliche Konsonanzen von beinahe demselben Grade und psychischen Charakter des Wohlklanges sein müssen.

Dies veranlaßte auch Petzval, die konsonanten Intervalle nicht in vollkommene und unvollkommene, sondern in Urintervalle und Kointervalle einzuteilen. Zu den Urintervallen zählt er die ersten Obertöne des Grundtones mit ihren Oktaven und die kleine Terz. Hier folgen sie mit ihren Schwingungszahlen:

| Oktave | | Quinte | | große Terz | | kleine Terz | | Septime | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | *c* | *C* | *G* | *C* | *E* | *C* | *Es* | *C* | *Ais* |
| $\zeta$ | $2\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{3}{2}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{5}{4}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{6}{5}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{7}{4}\zeta$ |

Die zweite Gruppe bilden die Kointervalle, d. h. diejenigen, welche die Urintervalle zur Oktave ergänzen, d. h. welche man aus den Urintervallen erhält, indem man statt des Grundtones seine Oktave setzt. Sie heißen

| | Einklang | | Quarte | | kleine Sexte | | große Sexte | | überm. Sekunde | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *c* | *c* | *G* | *c* | *E* | *c* | *Es* | *c* | *Ais* | *c* |
| | $2\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{3}{2}\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{5}{4}\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{6}{5}\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{7}{4}\zeta$ | $2\zeta$ |
| oder | $\zeta$ | $\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{4}{3}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{8}{5}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{5}{3}\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{8}{7}\zeta$. |

Da sie alle aus den Urintervallen entstanden sind dadurch, daß man anstatt eines Bestandtones seine Oktave gesetzt hat, und da dies vermöge des Gesetzes der angenäherten Äquivalenz der Oktaven den Charakter der Tonverbindung nur unwesentlich zu ändern vermag, so ist die auf diesem Wege aus der Quinte hervorgegangene Quarte nahezu ebenso konsonant und vermutlich auch beinahe ebenso empfindlich gegen Verfälschung. Ebenso ist die aus der großen Terz abgeleitete kleine Sexte eine Konsonanz von ähnlichem Wohllaute und demselben psychischen Charakter, d. h. beide sind heitere oder Dur-Konsonanzen, und besitzen beinahe dieselbe Empfindlichkeit gegen Verfälschung. Die aus der kleinen Terz hervorgegangene große Sexte ist aber so wie diese eine Moll- oder schwermütige Konsonanz, und die übermäßige Sekunde hat in allen Stücken Ähnlichkeit mit der reinen Septime.

Nicht nur in einem reinen, sondern auch in einem temperierten Tonsysteme haben die Urintervalle mit den ihnen entsprechenden Kointervallen durchaus einerlei Eigenschaften, so zwar, daß sie auch einerlei Verfälschungen erleiden müssen. In der Tat, nennt man die

Temperaturen der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime in einem solchen Tonsysteme der Reihe nach:

$$q = 1 + \varkappa, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter $\varkappa$, $\theta$, $\tau$ und $\sigma$ sehr kleine Brüche verstanden, welche die Verfälschungen dieser Intervalle in Teilen der eigenen Schwingungszahl bezeichnen, so sind die Urintervalle mit ihren Schwingungszahlen:

| Oktave | | Quinte | | große Terz | | kleine Terz | | Septime | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | $c$ | $C$ | $G$ | $C$ | $E$ | $C$ | $Es$ | $C$ | $Ais$ |
| $\zeta$ | $2\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$, |

also ihre Verfälschungen beziehentlich:

$$\frac{3}{2}\varkappa\zeta \qquad \frac{5}{4}\theta\zeta \qquad \frac{6}{5}\tau\zeta \qquad \frac{7}{4}\sigma\zeta.$$

Die ihnen entsprechenden Kointervalle werden:

| Einklang | | Quarte | | kleine Sexte | | große Sexte | | überm. Sekunde | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $c$ | $G$ | $c$ | $E$ | $c$ | $Es$ | $c$ | $Ais$ | $c$ |
| $2\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$ | $2\zeta$ | $\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$ | $2\zeta$ |

oder alles auf den Grundton $\zeta$ reduziert:

| $c$ | $c$ | $G$ | $c$ | $E$ | $c$ | $Es$ | $c$ | $Ais$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ | $\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{4}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\varkappa)}$ | $\zeta$ | $\frac{8}{5}\cdot\frac{\zeta}{(1+\theta)}$ | $\zeta$ | $\frac{5}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\tau)}$ | $\zeta$ | $\frac{8}{7}\cdot\frac{\zeta}{(1+\sigma)}$. |

Da $\varkappa$, $\theta$, $\tau$ und $\sigma$ sehr kleine Brüche sind, so wird man ihre Quadrate gegen die Einheit vernachlässigen, und die vorliegenden Verhältniszahlen schreiben können:

| $c$ | $c$ | $G$ | $c$ | $E$ | $c$ | $Es$ | $c$ | $Ais$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ | $\zeta$ | $\zeta$ | $\frac{4}{3}\zeta(1-\varkappa)$ | $\zeta$ | $\frac{8}{5}\zeta(1-\theta)$ | $\zeta$ | $\frac{5}{3}\zeta(1-\tau)$ | $\zeta$ | $\frac{8}{7}\zeta(1-\sigma)$ |

Die Verfälschungen dieser Intervalle sind hier beziehentlich:

$$-\frac{4}{3}\varkappa\zeta \qquad -\frac{8}{5}\theta\zeta \qquad -\frac{5}{3}\tau\zeta \qquad -\frac{8}{7}\sigma\zeta.$$

Sie sind also dieselben Bruchteile der betreffenden Schwingungszahlen, wie bei den entsprechenden Urintervallen, nur mit anderem Vorzeichen. Es ist hier vorausgesetzt, daß man die Oktaven untemperiert läßt. Würde man auch diese in einem gewissen Grade verfälschen, so wäre die Kongruenz zwischen den Urintervallen und Kointervallen aufgehoben, und es würden dann die ersteren andere Verfälschungen erleiden als

die zweiten, was sich allenfalls durch eine verschiedene Empfindlichkeit dieser Intervalle motivieren ließe, die dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven zu widersprechen schiene. Es scheint, daß man den Schluß auch umkehren und sagen könnte: Da in der Musik allgemein die Oktaven als unverletzlich angesehen werden, so besitzen alle Urintervalle mit den entsprechenden Kointervallen einerlei Empfindlichkeit gegen Verfälschung, während andernfalls das Temperieren der Oktaven rätlich erscheinen könnte. Hiemit wäre die Unverletzlichkeit der Oktaven viel ungezwungener begründet, als durch die Annahme einer unendlichen Empfindlichkeit, von deren Unmöglichkeit wir uns oben überzeugt haben.

Der wesentliche Nutzen dieser Betrachtungen besteht darin, daß man bei der Berechnung eines jeden Tonsystems nur die Urintervalle, nämlich Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime ins Auge zu fassen hat; gelingt es, diese wohlklingend zu gestalten, so sind auch die ihnen entsprechenden Kointervalle, nämlich: Quarte, kleine Sexte, große Sexte und übermäßige Sekunde, in derselben guten Eigenschaft vorhanden. Nur bei der Oktave und dem ihr entsprechenden Kointervall, dem Einklange, stößt man auf eine ernste Schwierigkeit, einen unlösbaren logischen Widerspruch. Nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven nämlich sollten Einklang und Oktave ganz einerlei psychischen Charakter tragen, indem der eine aus der anderen entsteht, dadurch, daß man den einen Bestandton des Intervalls durch seine Oktave ersetzt. Nun ist aber, wie oben nachgewiesen, der Einklang keine Konsonanz, sondern nur *Tonverstärkung*, mithin sollte nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven auch die Oktave keine Konsonanz sein, sondern eine Tonverstärkung.

### III. Bildung der Tonsysteme. Einteilung in zwei Klassen.

Bei der Bildung eines Tonsystems wird man am besten von einer bestimmten Tonreihe, womöglich von einer Reihe musikalisch äquidistanter Töne, ausgehen und aus ihr diejenigen Töne in systematischer Weise auswählen, die man zur musikalischen Praxis zu benötigen glaubt. Eine solche Reihe äquidistanter Töne wäre zwar auch die Reihe der Oktaven; diese ist aber unbrauchbar, weil sie nur einen einzigen Ton und kein Tonsystem vorstellt.

Es bietet sich zunächst die Quintenreihe dar, und in der Tat ist man zu allen Zeiten, durch einen glücklichen Instinkt geleitet, in der Musik von einer Reihe reiner Quinten ausgegangen. Da sich diese alte Gepflogenheit wissenschaftlich rechtfertigen läßt, so soll auch hier davon nicht abgegangen werden.

Diese unendliche Quintenreihe bildet man nach altem Brauche aus der folgenden siebentönigen fundamentalen Quintengruppe:

*F, C, G, D, A, E, H,*

indem man sie nach rechts und links auf folgende Weise fortsetzt:

1. Um sie nach rechts ins Unendliche fortzusetzen, fügt man, bei *F* anfangend und nach rechts fortschreitend, zu jedem Tone sowohl der Fundamentalgruppe, wie auch ihrer bereits niedergeschriebenen Fortsetzung die Endsilbe *is* zu. Man erhält so:

*F, C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, Eis, His, Fisis, Cisis, Gisis, Disis, Aisis ...*

2. Um die Fortsetzung derselben Reihe nach links ins Unendliche zu erhalten, fügt man zu jedem Tone der Fundamentalgruppe, bei *H* anfangend und nach links fortschreitend, die Endsilbe *es* zu, und schreibt den so erhaltenen Ton als Fortsetzung der Reihe an die linke Seite. Und dies tut man sowohl bei den Tönen der Fundamentalgruppe, als auch bei der bereits erhaltenen Fortsetzung, nur daß anstatt *Hes* nach einem alten Gebrauche der Buchstabe *B* gesetzt wird. Es ergibt sich so:

..., *Eses, Bes, Fes, Ces, Ges, Des, As, Es, B, F, C, G, D, A, E, H ...*

Wiewohl hier von diesen alten, ziemlich einfachen musikalischen Benennungen auch Gebrauch gemacht werden soll, so ist doch für die vorliegenden Zwecke noch eine andere, der kombinatorisch-arithmetischen Betrachtung besser zusagende nötig, welche unmittelbar den Ort erkennen läßt, an dem sich ein Ton in der Reihe befindet. Es soll nämlich der Grundton mit der Schwingungszahl $\xi$ $\mathfrak{Q}_0$ anstatt *C* heißen; seine Quinte *G* soll mit $\mathfrak{Q}_1$, die zweite Quinte *D* soll mit $\mathfrak{Q}_2$, und ebenso die dritte, vierte, fünfte ... $r^{te}$ Quinte mit $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_5 \ldots$, $\mathfrak{Q}_r$ bezeichnet werden. Die nach rückwärts fortgesetzte Reihe dieser Quinten ist die Quartenreihe

*F, B, Es, As, Des,* u. s. f.

Diese Töne sollen der Reihe nach mit

$\mathfrak{Q}_{-1}, \mathfrak{Q}_{-2}, \mathfrak{Q}_{-3}, \mathfrak{Q}_{-4}, \ldots \mathfrak{Q}_{-r}$ bezeichnet werden.

Sind dies nun reine Quinten und Quarten, so erhält man die Schwingungszahl einer beliebigen unter ihnen aus der zunächst vorangehenden durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, somit aus der folgenden durch Multiplikation mit $\frac{2}{3}$. Mithin enthält folgende Formel die in Rede

stehende Quintenreihe mit ihrer musikalischen und arithmetischen Nomenklatur und den entsprechenden Schwingungszahlen in 3 Zeilen:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\ldots \mathit{Des}, & \mathit{As}, & \mathit{Es}, & \mathit{B}, & \mathit{F}, & \mathit{C}, & \mathit{G}, & \mathit{D}, & \mathit{A}, & \mathit{E}, & \mathit{H}, & \mathit{Fis} \ldots \\
\mathfrak{Q}_{-5}, & \mathfrak{Q}_{-4}, & \mathfrak{Q}_{-3}, & \mathfrak{Q}_{-2}, & \mathfrak{Q}_{-1}, & \mathfrak{Q}_{0}, & \mathfrak{Q}_{1}, & \mathfrak{Q}_{2}, & \mathfrak{Q}_{3}, & \mathfrak{Q}_{4}, & \mathfrak{Q}_{5}, & \mathfrak{Q}_{6}, \ldots \\
\frac{2^5}{3^5}\zeta, & \frac{2^4}{3^4}\zeta, & \frac{2^3}{3^3}\zeta, & \frac{2^2}{3^2}\zeta, & \frac{2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^2}\zeta, & \frac{3^3}{2^3}\zeta, & \frac{3^4}{2^4}\zeta, & \frac{3^5}{2^5}\zeta, & \frac{3^6}{2^6}\zeta \ldots
\end{array}$$

Unter diesen Schwingungszahlen liegt nur eine zwischen $\zeta$ und $2\zeta$; allen anderen entsprechen Töne, die außerhalb des Grundtones $\mathfrak{Q}_0 = C = \zeta$ und seiner höheren ersten Oktave liegen. Da man es aber liebt, in dieser ersten Oktave den ganzen Tonreichtum beisammen vor Augen zu haben, so reduziert man die übrigen Schwingungszahlen auf die erste Oktave durch ein- oder mehrmalige Multiplikation oder Division durch 2, was, wie wir wissen, den Namen des Tones nicht ändert. Zum Beispiele: $\mathfrak{Q}_2$ hat die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$, was größer ist als $2\zeta$; wir dividieren daher einmal durch die Zahl 2 und schreiben anstatt der der Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta$ die andere $\frac{3^2}{2^3}\zeta = \frac{9}{8}\zeta$. Allgemein wird statt der Schwingungszahl irgend einer Quinte $\mathfrak{Q}_r$, welche gleich $\frac{3^r}{2^r}\zeta$ ist, behufs der Reduktion auf die erste Oktave $\frac{3^r}{2^\alpha}\zeta$ geschrieben, wobei $\alpha > r$ und so gewählt ist, daß $1 < \frac{3^r}{2^\alpha} < 2$ ausfällt.

Ähnliches gilt auch von der nach links fortgesetzten Quintenreihe; auch ihre Töne führt man auf die erste Oktave zurück durch ein- oder mehrmaliges Multiplizieren der Schwingungszahl mit 2. Demgemäß schreibt man bei $\mathfrak{Q}_{-1}$ anstatt $\frac{2}{3}\zeta$ lieber die zwischen $\zeta$ und $2\zeta$ liegende Zahl $\frac{2^2}{3}\zeta = \frac{4}{3}\zeta$, und ebenso bei den übrigen, so daß allgemein die dem Tone $\mathfrak{Q}_{-r}$ angehörende Schwingungszahl $\frac{2^r}{3^r}\zeta$ in eine andere $\frac{2^\beta}{3^r}\zeta$ umgewandelt wird, wobei $\beta > r$ und so gewählt werden muß, daß $1 < \frac{2^\beta}{3^r} < 2$ wird.

Die in Rede stehende Reihe reiner und auf die Oktave zurückgeführten Quinten geht hiemit über in:

$$(5)\quad \begin{array}{cccccccccc}
\cdots\cdots & \cdots\mathit{Es}, & \mathit{B}, & \mathit{F}, & \mathit{C}, & \mathit{G}, & \mathit{D}, & \mathit{A}, & \cdots\cdots \\
\cdots\mathfrak{Q}_{-r}\cdots & \mathfrak{Q}_{-3}, & \mathfrak{Q}_{-2}, & \mathfrak{Q}_{-1}, & \mathfrak{Q}_{0}, & \mathfrak{Q}_{1}, & \mathfrak{Q}_{2}, & \mathfrak{Q}_{3}, & \cdots\mathfrak{Q}_{r}\cdots \\
\cdots\frac{2^\beta}{3^r}\zeta & \cdots\frac{2^5}{3^3}\zeta, & \frac{2^4}{3^2}\zeta, & \frac{2^2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^3}\zeta, & \frac{3^3}{2^4}\zeta, & \cdots\frac{3^r}{2^\alpha}\zeta.
\end{array}$$

Diese Reihe der reinen Quinten ist es, auf welcher die hier angeführte musikalische Nomenklatur vorzugsweise beruht; und wenn in manchen Tonsystemen auch ein Ton mit einer anderen Schwingungszahl diesen musikalischen Namen, etwa *A*, *E*, usf. trägt, so wird stets angenommen, daß dies nicht der echte, reine Ton *A*, *E* . . . sei, sondern der temperierte. Hier sei auch bemerkt, daß die entwickelte Reihe reiner, auf die erste Oktave reduzierter Quinten gleichzeitig die auf die erste Oktave reduzierter Quarten darstellt, weil die Töne der aufsteigenden reinen Quinten der Reihe nach mit den Tönen der absteigenden reinen Quarten und umgekehrt, die absteigenden Quinten mit den aufsteigenden Quarten gleiche Benennung haben. So hat z. B. die $r^{te}$ Quinte nach aufwärts genommen die Schwingungszahl $\frac{3^r}{2^r}$, die $r^{te}$ Quarte nach abwärts die Schwingungszahl $\frac{3^r}{4^r}$; dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man $2^r$. Die beiden Töne liegen um $r$ Oktaven auseinander, tragen also gleiche Benennung.

Weil diese Reihe der reinen Quinten für den Tonforscher von großer Wichtigkeit ist, hat Petzval die Quinten und Quarten für je 158 Töne, und zwar auf 6 Dezimalen berechnet, in Tabellen zusammengestellt. Diese sind indessen verloren gegangen. Da aber in der Abhandlung wiederholt darauf hingewiesen wird, war ihre Wiederherstellung notwendig.[1])

Die Tabellen *A* und *B*, die sich am Schlusse der Abhandlung befinden, enthalten also in der ersten Spalte die Quintenbezeichnung mit ihren Stellenzeigern, in der zweiten den arithmetischen Wert, in der dritten die Schwingungszahlen und in der vierten die musikalische Benennung. In der zweiten Spalte lassen die Exponenten der Zähler und Nenner zugleich erkennen, wie oft die Schwingungszahl des zugehörigen Tones behufs der Zurückführung auf die erste Oktave durch 2 dividiert oder damit multipliziert worden ist. Man hat nämlich bei den Quinten von dem Exponenten des Nenners jenen des Zählers, und bei den Quarten von dem Exponenten des Zählers jenen des Nenners abzuziehen. So haben z. B. bei der Zurückführung des Tones $Q_{26} = His^3$ $41 - 26 = 15$ Divisionen durch 2 stattgefunden; desgleichen hat der Ton $Q_{-24} = Es^4$ $39 - 24 = 15$ Multiplikationen mit 2 behufs Zurückführung auf die erste Oktave erfordert.

Bei der in der vierten Spalte vorkommenden musikalischen Nomenklatur hat der Raumersparnis wegen eine Bezeichnung mit Exponenten

1) Die Berechnung hat Herr Viktor Stadler in Wien nach den von Petzval hinterlassenen Angaben besorgt und sie zugleich auf 400 Töne ausgedehnt.

stattgefunden, wobei der angehängte Exponent andeutet, wie oft die Silbe *is* oder *es* in der Tonbestimmung vorkommt. So ist z. B. $Fis^3$ gleichbedeutend mit *Fisisis*, und $Ces^4$ gleichbedeutend mit *Ceseseses*.

Wiewohl es nun in der genannten Quintenreihe der Zahlen und Töne unendlich viele gibt, und wiewohl sie alle zwischen $\zeta$ und $2\zeta$ fallen, das heißt im Bereiche einer Oktave eingegrenzt sind, so sind doch alle voneinander verschieden, und es können auch nicht zwei gleiche unter ihnen vorkommen.

Nimmt man nämlich an, es seien 2 gleiche Quinten, $Q_r = Q_{r+m}$ vorhanden, so wäre notwendig

$$\frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ mithin } 3^m = 2^{\gamma-\alpha}.$$

Folglich wäre eine durch 3 teilbare Zahl gleich einer durch 3 nicht teilbaren, was nicht sein kann.

Anders verhält sich die Sache, wenn man anstatt der reinen Quinten temperierte setzt; sind dies gleichschwebend temperierte, so werden sie aus den reinen (5) erhalten durch Multiplikation mit einer Potenz der allen gemeinsamen Temperatur $q$, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des Tones ist, d. h. die Reihe temperierter Quinten ist:

$$\begin{array}{lcccccccc} \cdots Q_{-r}, & \cdots Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & \cdots Q_r, & \cdots Q_{r+m}, & \\ \frac{2^\beta}{3^r} q^{-r}\zeta, & \cdots \frac{2^4}{3^2} q^{-2}\zeta, & \frac{2^2}{3} q^{-1}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2} q\zeta, & \frac{3^2}{2^3} q^2\zeta, & \cdots \frac{3^r}{2^\alpha} q^r\zeta, & \cdots \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}\zeta & \cdots \end{array} \tag{6}$$

Hier läßt sich durch schickliche Wahl des Faktors $q$ die Gleichheit zweier Töne bewerkstelligen, denn man erhält $Q_r = Q_{r+m}$, wenn man $q$ so wählt, daß

$$\frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}, \text{ also } \frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^m \tag{7}$$

wird.

Wiewohl dies von allen Tönen gesagt werden kann, so ist doch nicht außer Acht zu lassen, daß $q$ nur dann eine wirkliche Temperatur bedeutet, wenn es wenig von der Einheit verschieden ist; mithin darf auch $q^m$ nur wenig von der Einheit abweichen, und müssen die Zahlen $\frac{3^r}{2^\alpha}$ und $\frac{3^{r+m}}{2^\gamma}$ nahezu einander gleich, also auch die reinen Quinten $Q_r$ und $Q_{r+m}$ nahezu dieselben Töne sein.

Hat man aber im Verzeichnisse der reinen Quinten zwei nahe gleiche Töne entdeckt, und durch schickliches Temperieren einander

ganz gleich gebracht, so zieht dies die Gleichheit sehr vieler anderer Töne nach sich, daß dann nur eine Gruppe nebeneinander stehender, in beschränkter Anzahl vorkommender Quinten übrig bleibt, die sich periodisch in derselben Ordnung wiederholen. In der Tat, wäre für ein von der Einheit wenig verschiedenes $q$ geworden

$$\mathfrak{Q}_r = \mathfrak{Q}_{r+m}, \text{ d. h. } \frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m},$$

so erhielte man, wiederholt mit $\frac{3}{2} q$ multiplizierend:

$$\frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1}, \text{ also } \mathfrak{Q}_{r+1} = \mathfrak{Q}_{r+m+1},$$

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+2}} q^{r+2} = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2}, \text{ also } \mathfrak{Q}_{r+2} = \mathfrak{Q}_{r+m+2} \text{ usw.}$$

Also nur die aufeinander folgenden $m$ Töne $\mathfrak{Q}_r, \mathfrak{Q}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{Q}_{r+m-1} \cdots,$ werden voneinander möglicherweise verschieden sein, die folgenden $\mathfrak{Q}_{r+m}, \mathfrak{Q}_{r+m+1} \cdots \mathfrak{Q}_{r+2m-1}$ aber sind mit den früheren Ton für Ton identisch. Von $\mathfrak{Q}_{r+2m}$ an bis $\mathfrak{Q}_{r+3m-1}$ wiederholen sich dieselben Töne zum zweiten Male, und so geht es fort ins Unendliche in beiden Richtungen.

Man hat mithin ein geschlossenes, zurückkehrendes, nur aus $m$ Stufen bestehendes Tonsystem. Ordnet man die Töne desselben nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bilden diese letzteren eine geometrische Progression, sind mithin im musikalischen Sinne äquidistant, was sich auf folgende Art beweisen läßt. Man nenne die Schwingungszahl des Tones $\mathfrak{Q}_r$ $\xi$, sodaß $\xi = \frac{3^r}{2^\alpha} q^r \zeta$ ist, wobei $q$ den aus der Gleichung (7) gezogenen Wert, nämlich

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{\gamma-\alpha-m}{m}} \tag{8}$$

bedeutet. Da $q$ sehr nahe der Einheit gleich sein muß, so liegt dieser Wert von $\frac{3}{2} q$ offenbar zwischen 1 und 2, mithin der Exponent $\frac{\gamma-\alpha-m}{m}$ zwischen 0 und 1, das heißt, es ist

$$x = \gamma - \alpha - m < m \tag{9}$$

und $\frac{x}{m}$ ein echter, positiver Bruch, welchen man sich auf die kleinste Benennung gebracht denken kann. Ist er einer Reduktion fähig, und verwandelt er sich vermöge derselben in $\frac{x'}{m'}$, wo $x' < x$, $m' < m$ ist, so

ist dies ein Zeichen, daß es eine näher an $Q_r$ liegende Quinte, nämlich, $Q_{r+m'}$ gibt, welche ebenso wie $Q_{r+m}$ mit derselben Temperatur $q$ der $Q_r$ gleichgemacht werden kann. Da nun nicht anzunehmen ist, daß man einen von $Q_r$ sehr weit abliegenden Ton einem näheren vorziehen wird, so kann stets vorausgesetzt werden, daß $\frac{x}{m}$ ein echter, der ferneren Reduktion unfähiger Bruch ist, also $x$ und $m$ relative Primzahlen sind. Um nun die aus $m$ Stufen bestehende Periode voneinander verschiedener Töne, nämlich

$$Q_r,\quad Q_{r+1},\quad Q_{r+2},\ \ldots,\ Q_{r+h},\ \ldots,\ Q_{r+m-1}$$

zu erhalten, multipliziert man die Schwingungszahl $\xi$ von $Q_r$ wiederholt mit

$$\frac{3}{2}q = 2^{\frac{x}{m}} \tag{10}$$

und erhält hiemit zunächst die Zahlenreihe

$$\xi,\quad 2^{\frac{x}{m}}\xi,\quad 2^{\frac{2x}{m}}\xi,\ \ldots,\ 2^{\frac{hx}{m}}\xi,\ \ldots,\ 2^{\frac{(m-1)x}{m}}\xi, \tag{11}$$

die aber auf die erste Oktave zurückzuführen ist. Man hat zu diesem Behufe die zwischen $\xi$ und $2\xi$ fallenden der obigen Zahlen unberührt zu lassen, die anderen aber durch eine solche Potenz von 2 zu dividieren, daß sie dadurch ebenfalls zwischen diese zwei Grenzen eingeschlossen werden.

Mit anderen Worten, man hat von den Exponenten

$$\frac{x}{m},\quad \frac{2x}{m},\ \ldots\ \frac{hx}{m},\ \ldots\ \frac{(m-1)x}{m}$$

die Einheit so oft abzuziehen, bis ein echter Bruch übrig bleibt, oder was dasselbe ist, man hat jeden Zähler wie $hx$ durch den Nenner $m$ zu teilen, was einen Quotienten $p$ und Rest $\varrho < m$ gibt, sodaß

$$hx = mp + \varrho$$

wird. Diesen Quotienten $p$ hat man dann wegzuwerfen, und anstatt des Exponenten $\frac{hx}{m}$ nur $\frac{\varrho}{m}$ zu setzen. Nun läßt sich aber beweisen, daß, wenn man die Zahlen

$$x,\ 2x,\ 3x,\ hx,\ \ldots,\ kx,\ \ldots,\ (m-1)x$$

alle durch $m$ dividiert, man bei diesen $(m-1)$ Divisionen lauter verschiedene Reste erhalten wird. In der Tat, nimmt man an, $hx$ und

$kx$ geben, durch $m$ geteilt, einerlei Rest $\varrho$, so hat man die zwei Gleichungen

$$hx = mp + \varrho,$$
$$kx = mp' + \varrho,$$

woraus

$$(k - h)x = m(p' - p).$$

Dies ist aber eine unmögliche Gleichung, weil die rechte Seite durch $m$ teilbar ist und die linke nicht. Da nämlich $m$ und $x$ der Voraussetzung nach keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so müßte $(k - h)$ durch $m$ teilbar sein, was nicht sein kann, weil $k < m$ und $h < m$, mithin um so mehr $k - h < m$ ist. Die Reste dieser $(m - 1)$ Divisionen sind also alle voneinander verschieden und alle kleiner als der Divisor $m$, mithin sind diese Reste offenbar:

$$1, 2, 3, \ldots, m - 1.$$

Dies gibt definitiv die Schwingungszahlen der unter (11) genannten Töne geordnet nach ihrer Höhe:

$$\xi,\ 2^{\frac{1}{m}}\xi,\ 2^{\frac{2}{m}}\xi,\ 2^{\frac{3}{m}}\xi,\ \ldots,\ 2^{\frac{m-1}{m}}\xi.$$

Sie bilden also eine geometrische Progression, deren Exponent $2^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{2}$ ist, und sind daher im musikalischen Sinne äquidistant.

Hiemit hätten wir ein in sich zurückkehrendes, gleichschwebend temperiertes und nur aus $m$ Stufen, die eine geometrische Progression bilden, bestehendes Quintensystem erhalten dadurch, daß wir zwei den reinen Schwingungszahlen nach sehr ähnliche Quinten durch schickliches Temperieren ganz gleich machten, $\mathfrak{Q}_r = \mathfrak{Q}_{r+m}$. Da hieraus $\mathfrak{Q}_{r-1} = \mathfrak{Q}_{r+m-1}$ folgt, so hätte man, von dieser Gleichheit ausgehend, genau dasselbe Quintensystem erhalten. Ebenso hätten auch die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}_{r-2} = \mathfrak{Q}_{r+m-2},\quad \mathfrak{Q}_{r-3} = \mathfrak{Q}_{r+m-3},\quad \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_m$$

zu demselben System geleitet. Man kann sich daher darauf beschränken, zum Grundtone $\mathfrak{Q}_0$ mit der Schwingungszahl $\xi$ einen Reinton $\mathfrak{Q}_m$ mit einer ähnlichen, von $\xi$ möglichst wenig abweichenden Schwingungszahl zu suchen.

Es hat zwar ein Tonsystem nicht nur Quinten, sondern auch Terzen, große und kleine, und Septimen zu enthalten, auf welche letztere denn auch entsprechend Rücksicht zu nehmen ist. Allein es

gibt zahlreiche Musiker, die auf möglichst reine Quinten einen besonderen Wert legen, die anderen Intervalle weit weniger beachtend, und die ein vorgelegtes Tonsystem, wenn auch nicht ausschließlich, so doch vorzugsweise nach der Reinheit der Quinten beurteilen. Die mathematische Analysis, die hier nur Hilfswissenschaft ist und schon deshalb allen Ansprüchen womöglich gerecht zu werden versucht, legt sich, um vor allem diesen Quintenpuritanern zu genügen, die folgende Frage vor: *Welche sind die geschlossenen Quintensysteme, die sich durch besondere Reinheit, d. h. durch einen der Einheit sehr nahen Wert ihrer Temperatur $q$ auszeichnen?*

In der zur Bestimmung der Temperatur $q$ aufgestellten Gleichung (8), d. h.

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{13}$$

setzen wir $q = 1$ und erhalten

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{14}$$

vergessen aber nicht, daß $x$ und $m$ teilerfremde ganze Zahlen sein müssen.

Die Gleichung (14) gibt:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} - 1 = \frac{4771213}{3010300} - 1.$$

Entwickeln wir diesen Bruch in einen Kettenbruch, so sind dessen Näherungsbrüche offenbar Werte von $\frac{x}{m}$, die der gestellten Forderung genügen.

Diesen Kettenbruch samt den Näherungsbrüchen und den Stellen, wo der Kettenbruch abgebrochen diese Näherungsbrüche gibt, enthält folgende Formel:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}}}}}}}$$

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{24}{41}$, $\frac{31}{53}$, $\frac{179}{306}$, $\frac{389}{665}$

Die Näherungswerte von $\frac{x}{m}$ sind also der Reihe nach:

$$\frac{x}{m} = \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \tag{15}$$

und es ist aus ihnen ersichtlich, daß die folgenden reinen Quinten in sehr naher und stets näherer Verwandtschaft ihrer Schwingungsszahlen mit dem Grundtone stehen:

$$Q_0, Q_5, Q_{12}, Q_{41}, Q_{53}, Q_{306}, Q_{665}, \ldots$$

Ihnen entspringen der Reihe nach ein

5-, 12-, 41-, 53-, 306-, 665-stufiges

Tonsystem.

Diese Tonsysteme bestehen alle aus in geometrischen Progressionen fortschreitenden Tönen. Die Exponenten dieser Progression sind beziehentlich

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[12]{2}, \sqrt[41]{2}, \sqrt[53]{2}, \sqrt[306]{2}, \sqrt[665]{2}, \ldots$$

Jedes dieser Tonsysteme hat seine eigene Quintentemperatur $q$. Unterscheidet man diese Temperaturen durch die Stellenzeiger der ihnen zugrunde liegenden Quinten, sodaß sie beziehentlich heißen

$$q_5, q_{12}, q_{41}, q_{53}, q_{306}, q_{665}, \ldots,$$

so sind die zusammengehörigen Werte dieser reinen Quinten und ihrer Temperaturen

$$\begin{aligned}
Q_5 &= 0.94922\zeta, & q_5 &= 1 + 0.01048 &&= 1 + \frac{1}{95}, \\
Q_{12} &= 1.01364\zeta, & q_{12} &= 1 - 0.001135 &&= 1 - \frac{1}{886}, \\
Q_{41} &= 0.988606\zeta, & q_{41} &= 1 + 0.0002789 &&= 1 + \frac{1}{3585}, \\
Q_{53} &= 1.00209\zeta, & q_{53} &= 1 - 0.0000394 &&= 1 - \frac{1}{25400}, \\
Q_{306} &= 0.999005\zeta, & q_{306} &= 1 + 0.00000318 &&= 1 + \frac{1}{314500}, \\
Q_{665} &= 1.0001026\zeta, & q_{665} &= 1 - 0.00000007 &&= 1 - \frac{1}{14800000}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Sie werden berechnet auf folgende Weise. Da man nicht $Q_r = Q_{r+m}$, sondern $Q_0 = Q_m$ gesetzt hat, so ist $r = 0$, mithin vermöge der Gleichung (7) auch $\alpha = 0$.

Dies macht zufolge der Gleichung (9) $\gamma = x + m$, mithin

$$\mathfrak{Q}_m = \frac{3^m}{2^{x+m}}\zeta,$$

hierzu kommt laut (13)

$$\frac{3}{2}q = 2^{\frac{x}{m}}, \quad \text{also} \quad q = \frac{1}{3}2^{\frac{x+m}{m}};$$

übergehend zu dem Logarithmus

$$\log \mathfrak{Q}_m = m \log 3 - (x+m)\log 2 + \log \zeta,$$
$$\log q \quad = \left(\frac{x}{m} + 1\right)\log 2 - \log 3,$$

oder auch in Zahlenwerten

$$\log \mathfrak{Q}_m = 0.4771213m - 0.30103(x+m) + \log \zeta,$$
$$\log q \quad = \frac{0.30103(x+m)}{m} - 0.4771213.$$

Von den berechneten Logarithmen von $\mathfrak{Q}_m$ und $q$ kehrt man dann zu den Zahlen mit Hilfe der Tafeln wieder zurück. Die zusammengehörigen Werte von $x$ und $m$ sind in der Gleichung (15) ersichtlich.

Die Temperatur der Quinte $q$ konvergiert, wie man sieht, außerordentlich rasch gegen die Einheit, aber nur mit ebenso rascher Zunahme der Anzahl der Tonstufen. Schwerlich wird es nun jemand beifallen, auf $\mathfrak{Q}_{306}$ oder gar $\mathfrak{Q}_{665}$ ein Augenmerk zu werfen, sondern es wird die allgemeine Aufmerksamkeit zwischen $q_{12}$ und $q_{53}$ haften bleiben, und es wird wohl manchem bedünken, daß zwar 12 Stufen zu wenig, 53 dagegen zu viel seien. Daher dann der Wunsch rege werden dürfte, daß es zwischen $\mathfrak{Q}_{12}$ und $\mathfrak{Q}_{53}$ eine reine Quinte $\mathfrak{Q}_y$ geben möge, wo $12 < y < 53$ ist, welche, dem Grundtone gleich gesetzt, zu einer Temperatur $q_y$ führt, die wenigstens nicht mehr von der Einheit entfernt ist, als $q_{12}$. Allein eine solche Quinte gibt es eben nicht, weil es keinen Bruch $\frac{z}{y}$ gibt, der zwischen $\frac{7}{12}$ und $\frac{31}{53}$ liegt, sodaß $\frac{7}{12} < \frac{z}{y} < \frac{31}{53}$ besteht, während $7 < z < 31$ und $12 < y < 53$ ist. Wenn daher ein Liebhaber reiner Quinten aus irgend einem Grunde, mit dem 12stufigen Tonsysteme unzufrieden, ein mehrstufiges wünscht, ohne von der Reinheit der Quinten etwas einbüßen zu wollen, wird er zunächst auf das 53stufige verwiesen; ein anderes gibt es nicht, wie dies aus den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hervorgeht. Das im Verzeichnisse (16) ebenfalls vorhandene 41stufige System ist unbrauchbar, weil nach einem später zur Sprache kommenden Grund-

gesetze bei allen Tonsystemen die Temperatur der Quinte kleiner als eins sein muß, während $q_{41} > 1$ ist.

Hinzugefügt kann noch werden, daß man sämtlichen Werten von $m$ und $x$ auch das negative Zeichen beilegen kann, wodurch kraft der Gleichung (13) die Temperatur $q$ gar keine Änderung erfährt, so daß man allgemein

$$q_m = q_{-m} \quad \text{hat.}$$

Die Quinte $\mathfrak{Q}_m$ hingegen geht dadurch in eine Quarte $\mathfrak{Q}_{-m}$ über, und es ist

$$\frac{1}{\zeta}\mathfrak{Q}_{-m} = \frac{\zeta}{\mathfrak{Q}_m}.$$

Endlich gibt die Formel (15) nur die vornehmsten Werte von $\frac{x}{m}$, denen die der Einheit nächsten $q$ und $\mathfrak{Q}$ entsprechen; man kann sich aber aus ihnen noch viele andere ebenfalls brauchbare $\frac{x}{m}$ verschaffen, indem man aus den Brüchen der Gleichung (15) Mittelwerte bildet, die bekanntlich erhalten werden, indem man von zweien oder mehreren derselben die Zähler addiert, und die Nenner addiert, nachdem man die einen und die anderen vorher mit einer beliebigen Zahl multipliziert hat.

Ein gutes Tonsystem benötigt aber nicht nur einer Reihe nebeneinander liegender Quinten, die eine geschlossene sein kann oder nicht, sondern es braucht auch die dazu gehörigen großen und kleinen Terzen und Septimen, rein oder temperiert, wenn das Temperieren einen wesentlichen Nutzen verspricht.

Es sollen also diese Terzen und Septimen verschafft werden, die wir von vornherein als temperierte annehmen wollen, weil der Übergang von temperierten zu reinen Tönen leichter ist, als der von reinen zu temperierten. Dieser Übergang wird nämlich dadurch bewerkstelligt, daß man die Temperatur $= 1$ setzt. Nennen wir die, allen großen Terzen gemeinschaftliche Temperatur $T$, ebenso die gemeinsame Temperatur der kleinen Terzen $t$, die der sämtlichen Septimen $s$, während die gleichfalls gleichschwebende Temperatur der Quinten mit $q$ bezeichnet bleiben soll. Legen wir uns ferner 4 Reihen von Tönen mit ihren temperierten oder nach Belieben auch reinen Schwingungszahlen vor, angeordnet in vier nebeneinander stehenden vertikalen Spalten, deren erste eine vorderhand noch nach beiden Seiten, nach oben nämlich und nach unten, unendlich gedachte Quarten- und Quintenreihe, die zweite die zu ihnen gehörigen großen Terzen, die dritte die kleinen Terzen, und die vierte die entsprechenden Septimen enthält, so ergibt sich

$$
(17)\quad
\begin{array}{llll}
Q_{-r} = \frac{2^{\beta}}{3^r} q^{-r} \zeta & T_{-r} = \frac{2^{\beta-2} \cdot 5}{3^r} q^{-r} T\zeta & t_{-r} = \frac{2^{\beta+1}}{3^{r-1} \cdot 5} q^{-r} t\zeta & S_{-r} = \frac{2^{\beta-2} \cdot 7}{3^r} q^{-r} s\zeta \\
Q_{-r+1} = \frac{2^{\beta-1}}{3^{r-1}} q^{-r+1} \zeta & T_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3} \cdot 5}{3^{r-1}} q^{-r+1} T\zeta & t_{-r+1} = \frac{2^{\beta}}{3^{r-2} \cdot 5} q^{-r+1} t\zeta & S_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3}}{3^{r-1}} q^{-r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_{-2} = \frac{2^4}{3^2} q^{-2} \zeta & T_{-2} = \frac{2 \cdot 5}{3^2} q^{-2} T\zeta & t_{-2} = \frac{2^5}{3 \cdot 5} q^{-2} t\zeta & S_{-2} = \frac{2 \cdot 7}{3^2} q^{-2} s\zeta \\
Q_{-1} = \frac{4}{3} q^{-1} \zeta & T_{-1} = \frac{5}{3} q^{-1} T\zeta & t_{-1} = \frac{2^3}{5} q^{-1} t\zeta & S_{-1} = \frac{7}{2 \cdot 3} q^{-1} s\zeta \\
Q_0 = \zeta & T_0 = \frac{5}{4} T\zeta & t_0 = \frac{6}{5} t\zeta & S_0 = \frac{7}{4} s\zeta \\
Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta & T_1 = \frac{3 \cdot 5}{2^3} q T\zeta & t_1 = \frac{3^2}{5} q t\zeta & S_1 = \frac{3 \cdot 7}{2^3} q\zeta \\
Q_2 = \frac{3^2}{2^3} q^2 \zeta & T_2 = \frac{3^2 \cdot 5}{2^5} q^2 T\zeta & t_2 = \frac{3^3}{2^2 \cdot 5} q^2 t\zeta & S_2 = \frac{3^2 \cdot 7}{2^5} q^2 s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_r = \frac{3^r}{2^{\alpha}} q^r \zeta & T_r = \frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} q^r T\zeta & t_r = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha-1} \cdot 5} q^r t\zeta & S_r = \frac{3^r \cdot 7}{2^{\alpha+2}} q^r s\zeta \\
Q_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1} \zeta & T_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T\zeta & t_{r+1} = \frac{3^{r+2}}{2^{\alpha} \cdot 5} q^{r+1} t\zeta & S_{r+1} = \frac{3^{r+1} \cdot 7}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_{r+m} = \frac{3^{r+m}}{2^{\gamma}} q^{r+m} \zeta, & T_{r+m} = \frac{3^{r+m} \cdot 5}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} T\zeta, & t_{r+m} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma-1} \cdot 5} q^{r+m} t\zeta, & S_{r+m} = \frac{3^{r+m} \cdot 7}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} s\zeta \\
Q_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1} \zeta, & T_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1} \cdot 5}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} T\zeta, & t_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma} \cdot 5} q^{r+m+1} t\zeta, & S_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1} \cdot 7}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} s\zeta.
\end{array}
$$

Alle großen Terzen heißen $T$, die kleinen $t$, die Septimen $S$, zusammengehörige Töne tragen einerlei Stellenzeiger und stehen auf derselben horizontalen Linie; es ist also $\mathfrak{Q}_0$ der Grundton, $T_0$ seine gr. Terz, $t_0$ seine kl. Terz, und $S_0$ seine Septime, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind ganze Zahlen, die man sich so gewählt denken muß, daß die betreffende Schwingungszahl des Tones zwischen $\xi$ und $2\xi$ fällt, womit alle Töne der vier Vertikalreihen in den Bereich einer Oktave eingegrenzt werden.

Sind diese Töne alle rein, also alle Temperaturen $q = T = t = s = 1$, so sind sie auch alle, wie wohl ihrer in jeder Spalte unendlich viele vorhanden sind, mit zwischen $\xi$ und $2\xi$ liegenden Schwingungszahlen voneinander verschieden. Daß dies in der Reihe der reinen Quinten, welche die erste Spalte enthält, richtig sei, ist bereits nachgewiesen worden, mithin ist es auch richtig für die Zahlen in der zweiten, dritten und vierten Spalte, weil sie die Zahlen der ersten Spalte enthalten, beziehentlich mit $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{4}$ multipliziert. Aber auch in verschiedenen Spalten finden sich keine 2 gleichen Zahlen. Denn nehmen wir an, es sei irgend eine der Terzen, etwa $T_r$ gleich irgend einer Quinte, etwa $\mathfrak{Q}_{r+m}$, so wäre

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ also } 5 \cdot 2^{\gamma-\alpha-2} = 3^m,$$

d. h. eine durch 5 teilbare Zahl gleich einer anderen, die es nicht ist. Ebenso kann auch keine einzige der reinen kleinen Terzen und Septimen unter den reinen Quinten gefunden werden.

Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn man temperierte Töne zuläßt. Es ist bereits erwiesen worden, daß, wenn man die Temperatur $q$ der Quinten so wählt, daß zwei ihren Schwingungszahlen nach nahe verwandte Töne $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_m$ vollständig gleich werden, die ganze unendliche Quintenreihe in vollkommen identische $m$gliedrige Quintenperioden zerfällt. Dasselbe gilt nun offenbar auch von den Zahlen der zweiten, dritten und vierten Spalte, wenn man $T_0 = T_m$, $t_0 = t_m$, $S_0 = S_m$ setzt, sie zerfallen ebenfalls und zwar für denselben Wert von $q$ in sich ins Unendliche wiederholende, $m$gliedrige Perioden. Noch mehr; hat man unter den reinen Terzen irgend eine, etwa $T_m$ entdeckt, die irgend einer Quinte, etwa $\mathfrak{Q}_{r+m}$, der Schwingungszahl nach sehr nahe kommt, so wird man durch schickliche Wahl der Temperatur $T$ die volle Gleichheit der temperierten Töne herbeiführen können, und es wird dies zur unmittelbaren Folge haben, daß alle Terzen den aufeinanderfolgenden Quinten paarweise, und Glied für Glied gleich werden so zwar, daß darnach die zweite Vertikalreihe genau gleich der

ersten wird, und nur um eine gewisse Anzahl von Stufen gegen dieselbe verschoben. Nimmt man nämlich an, es sei für ein gewisses $T$

$$T_r = \mathfrak{Q}_{r+m}, \quad \text{so ist auch}$$

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} q^r T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m} \cdot \zeta,$$ also zu wiederholtenmalen mit $\frac{3}{2} q$ multipliziert

$$\frac{3^{r+1} \cdot 5}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1} \cdot \zeta,$$ das heißt: $T_{r+1} = \mathfrak{Q}_{r+m+1}$,

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+4}} q^{r+2} \cdot T\zeta = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2} \cdot \zeta,$$ das heißt: $T_{r+2} = \mathfrak{Q}_{r+m+2}$ usw.

Es zieht also die Gleichheit zweier Töne $T_r$ und $\mathfrak{Q}_{r+m}$ unmittelbar die Gleichheit aller übrigen nach sich, und es ist folglich auch ganz gleichgültig, bei welchem Paare man die Gleichstellung vornimmt. Man wird also $T_0 = \mathfrak{Q}_m$ setzen können, und das Ergebnis wird genau dieselbe Zahlenreihe sein, die auch $T_r = \mathfrak{Q}_{r+m}$ gibt.

Dasselbe, was hier von den großen Terzen gezeigt worden ist, läßt sich auch von den kleinen Terzen und Septimen beweisen. Bewirkt man nämlich durch schickliche Wahl der Temperatur $t$ oder $s$, daß irgend eine der kleinen Terzen oder Septimen irgend einer Quinte gleich wird, so werden alle gleich, das heißt sie sind sämtlich unter den Quinten enthalten, und sind weder mehr noch weniger an der Zahl als diese.

Finden sich also endlich in der Quintenreihe Zahlen, die beziehentlich den folgenden

$$(18) \quad T_0 = \tfrac{5}{4}\zeta = 1{\cdot}25\,\zeta, \qquad t_0 = \tfrac{6}{5}\zeta = 1{\cdot}2\,\zeta, \qquad S_0 = \tfrac{7}{4}\zeta = 1{\cdot}75\,\zeta$$

beinahe gleich geltend sind — und dies wird offenbar der Fall sein müssen aus demselben Grunde, weil der Quinten unendlich viele in dem ganzen Bereiche einer einzigen Oktave eingeschlossen sind — so kann man die Temperaturen $T$, $t$ und $s$ immer der Einheit nahe und so wählen, daß sämtliche große und kleine Terzen und Septimen in der Reihe der Quinten, zu welchen sie gehören, bereits enthalten sind. Hiemit ergibt sich aber die in einem Tonsysteme so wünschenswerte Allseitigkeit der Verwendung der Töne von selbst, indem man in der Quintengruppe allein zu einem jeden Tone als Grundton nicht nur Quarte und Quinte, sondern auch große und kleine Terz und Septime findet, und vielleicht noch überdies durch geeignete Wahl der Temperatur $q$ das Tonsystem zu schließen imstande ist.

Hiemit wird aber der eigentliche Zweck des Temperierens erst recht in helles Licht gesetzt, der nicht mehr ein bloßes Verfälschen

ist, um einen und denselben Ton zu zwingen mehrere Rollen zu spielen, sondern vielmehr in der Aufhebung der Inkommensurabilität zwischen den Tönen liegt, mit welcher dann eine Reduktion von einer unendlichen auf eine mäßige Anzahl von Tönen, die nun das ganze unendliche Tonreich vorstellen, verknüpft ist.

Da somit alles darauf ankommt, die Zahlenwerte (18) in der Reihe der reinen Quarten und Quinten in möglichster Ähnlichkeit zu entdecken, so mögen dieselben der klaren Übersicht halber wirklich berechnet folgen, aber nur mit 4 Dezimalstellen, weil eine größere Genauigkeit zu den vorliegenden Zwecken nicht notwendig ist. Zu dem kombinatorischen Namen $Q$ des Tones erscheint dabei auch der musikalische hinzugefügt.

$$
(19)\quad
\begin{array}{lllll|lllll}
Q_0 & = \zeta & = C & & & Q_0 & = \zeta & = C & & \\
Q_1 & = 1{\cdot}5\,\zeta & = G & = \frac{3}{2}\zeta & & Q_{-1} & = 1{\cdot}3333\,\zeta & = F & = \frac{2^2}{3}\zeta & \\
Q_2 & = 1{\cdot}125\,\zeta & = D & = \frac{3^2}{2^3}\zeta & & Q_{-2} & = 1{\cdot}7778\,\zeta & = B & = \frac{2^4}{3^2}\zeta & \\
Q_3 & = 1{\cdot}6875\,\zeta & = A & = \frac{3^3}{2^4}\zeta & & Q_{-3} & = 1{\cdot}1852\,\zeta & = Es & = \frac{2^5}{3^3}\zeta & \\
Q_4 & = 1{\cdot}2656\,\zeta & = E & = \frac{3^4}{2^6}\zeta & & Q_{-4} & = 1{\cdot}5802\,\zeta & = As & = \frac{2^7}{3^4}\zeta & \\
Q_5 & = 1{\cdot}8984\,\zeta & = H & = \frac{3^5}{2^7}\zeta & & Q_{-5} & = 1{\cdot}0535\,\zeta & = Des & = \frac{2^8}{3^5}\zeta & \\
Q_6 & = 1{\cdot}4238\,\zeta & = Fis & = \frac{3^6}{2^9}\zeta & & Q_{-6} & = 1{\cdot}4047\,\zeta & = Ges & = \frac{2^{10}}{3^6}\zeta & \\
Q_7 & = 1{\cdot}0679\,\zeta & = Cis & = \frac{3^7}{2^{11}}\zeta & & Q_{-7} & = 1.8729\,\zeta & = Ces & = \frac{2^{12}}{3^7}\zeta & \\
Q_8 & = 1{\cdot}6018\,\zeta & = Gis & = \frac{3^8}{2^{12}}\zeta & & Q_{-8} & = 1{\cdot}2486\,\zeta & = Fes & = \frac{2^{13}}{3^8}\zeta & \\
Q_9 & = 1{\cdot}2014\,\zeta & = Dis & = \frac{3^9}{2^{14}}\zeta & & Q_{-9} & = 1{\cdot}6648\,\zeta & = Bes & = \frac{2^{15}}{3^9}\zeta & \\
Q_{10} & = 1{\cdot}8020\,\zeta & = Ais & = \frac{3^{10}}{2^{15}}\zeta & & Q_{-10} & = 1{\cdot}1099\,\zeta & = Eses & = \frac{2^{16}}{3^{10}}\zeta & \\
Q_{11} & = 1{\cdot}3515\,\zeta & = Eis & = \frac{3^{11}}{2^{17}}\zeta & & Q_{-11} & = 1{\cdot}4798\,\zeta & = Ases & = \frac{2^{18}}{3^{11}}\zeta & \\
Q_{12} & = 1{\cdot}0136\,\zeta & = His & = \frac{3^{12}}{2^{19}}\zeta & & Q_{-12} & = 1{\cdot}9731\,\zeta & = Deses & = \frac{2^{20}}{3^{12}}\zeta & \\
Q_{13} & = 1{\cdot}5205\,\zeta & = Fisis & = \frac{3^{13}}{2^{20}}\zeta & & Q_{-13} & = 1{\cdot}3154\,\zeta & = Geses & = \frac{2^{21}}{3^{13}}\zeta & \\
Q_{14} & = 1{\cdot}1404\,\zeta & = Cisis & = \frac{3^{14}}{2^{22}}\zeta & & Q_{-14} & = 1{\cdot}7538\,\zeta & = Ceses & = \frac{2^{23}}{3^{14}}\zeta & \\
Q_{15} & = 1{\cdot}7105\,\zeta & = Gisis & = \frac{3^{15}}{2^{23}}\zeta & & Q_{-15} & = 1{\cdot}1692\,\zeta & = Feses & = \frac{2^{24}}{3^{15}}\zeta &
\end{array}
$$

Der aufmerksame Anblick dieser Zusammenstellung von Schwingungszahlen lehrt, daß sich in derselben und in der Nähe des Grundtones $Q_0$ zwei Gruppen von Zahlen entdecken lassen, die den Schwingungszahlen der reinen großen und kleinen Terz und Septime (18) ähnlich sind. Man kann nämlich die Töne

(20a) $Q_4 = 1\cdot 2656\,\zeta = E,\ Q_{-3} = 1\cdot 1852\,\zeta = Es,\ Q_{10} = 1\cdot 8020\,\zeta = Ais$

dafür in Aussicht nehmen. Diese haben den Vorteil, dem Grundtone am nächsten zu liegen, und versprechen deshalb die einfachsten Tonsysteme mit der allergeringsten Stufenzahl. Alle die letzteren nennt Petzval *Tonsysteme der ersten Klasse.*

Man kann aber auch die zwar vom Grundtone etwas weiter entfernten, dafür aber mit der reinen großen und kleinen Terz und Septime besser übereinstimmenden Töne

(20b) $Q_{-8} = 1\cdot 2486\,\zeta = Fes,\ Q_9 = 1\cdot 2014\,\zeta = Dis,\ Q_{-14} = 1\cdot 7538\,\zeta = Ceses$

ins Auge fassen, und wird dadurch zu verwickelteren, aber reineren Tonsystemen gelangen, welche Petzval alle zur *zweiten Klasse* zählt.

Es versteht sich von selbst, daß im Verzeichnisse der reinen Quinten, wenn man dasselbe namhaft erweitert, sich Zahlen finden werden, die den: $1\cdot 25\,\zeta$, $1\cdot 2\,\zeta$, $1\cdot 75\,\zeta$ noch näher, ja so nahe als man nur wünscht, kommen; allein sie befinden sich in so großen Abständen sowohl vom Grundtone, wie auch untereinander, geben mithin so vollständige Tonsysteme, daß eine jede vernünftige Ursache des Temperierens wegfällt, indem man mit demselben Aufwande von Mitteln auch vollkommen reine Töne haben kann.

Die hier angestrebte Allgemeinheit der Untersuchung verlangt, daß dieser Sachverhalt klar nachgewiesen werde. Dies kann aber nur dadurch erzielt werden, daß man dem Leser eine vollständige Übersicht über alle in der unendlichen Quintenreihe vorhandenen großen und kleinen Terzen und Septimen verschafft. Hiezu ist entweder die wirkliche Berechnung dieser Quarten- und Quintenreihe, weit genug getrieben, notwendig, oder was vielleicht den Vorzug verdient, eine Methode zur direkten Berechnung dieser genauesten Terzen und Septimen. Diese soll hier gegeben werden.

Sucht man zuvörderst die Terzen und nimmt an, die Terz $T_0 = \frac{5}{4}\zeta$ sei der Quinte $Q_n = \frac{3^n}{2^y}\zeta$ ähnlich, unter *n* und *y* positive oder auch negative ganze Zahlen verstanden, dann ist nahezu

$$\frac{3^n}{2^y} = \frac{5}{4},\ \text{also}\ \frac{3^n}{2^{y-2}} = 5.$$

oder wenn man $y - 2 = z$ setzt,

$$\frac{3^{m'}}{2^z} = 5,$$

$$m' \log 3 - z \log 2 = \log 5, \text{ das heißt}$$

$$0 \cdot 4771213 m' - 0 \cdot 3010300 z = 0 \cdot 6989700 \text{ oder}$$

$$4771213 m' - 3010300 z - 6989700 = 0.$$

Wir dividieren durch den kleinsten Koeffizienten, den der Unbekannten $z$, und erhalten

$$m' - z - 2 + \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300} = 0.$$

Hier ist $m' - z - 2$ eine ganze Zahl, weshalb auch

$$u = \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300}$$

eine ganze Zahl sein muß, und nun haben wir

$$m' - z - 2 + u = 0,$$

$$3010300 u - 1760913 m' + 969100 = 0,$$

$$2u - m' - \frac{511526\, u - 969100}{1760913} = 0.$$

$2u - m'$ ist hier eine ganze Zahl, weshalb auch

$$v = \frac{511526\, u - 969100}{1760913}$$

nahezu einer ganzen Zahl gleich sein muß; für $u = 2$ findet dies in roher Annäherung statt, so daß man als erste Lösung mit Rücksicht auf die vorangegangenen Gleichungen:

$$u = 2, \; m' = 4, \; z = 4, \; Q_4 = 1 \cdot 265625 \zeta$$

hat. Aus der letzten, den Wert von $v$ bestimmenden Gleichung folgt:

$$3v - u + 2 + \frac{226335\, v - 53952}{511526} = 0$$

$$2u - m' - v = 0.$$

Hier ist abermals

$$w = \frac{226335\, v - 53952}{511526} \text{ eine ganze Zahl,}$$

und

$$3v - u + 2 + w = 0,$$

$$5116526 w - 226335 v + 53952 = 0$$

$$2w - v + \frac{58856\, w + 53952}{226335} = 2w - v + \xi = 0.$$

So wie $2w - v$, so ist auch

$$\xi = \frac{58\,856\,w + 53\,952}{226\,335} \text{ eine ganze Zahl,}$$

was ziemlich nahe stattfindet für $w = -1$, wo $\xi$ nur um den kleinen Bruch $\frac{4904}{226\,335}$ von Null verschieden ausfällt. Dies gibt die zweite Lösung:

$$w = -1,\ v = -2,\ u = -5,\ m' = -8,$$
$$z = -15,\ y = -13,\ Q_{-8} = 1 \cdot 24859\,\zeta.$$

Noch näher aber für $w = 3$, wo $\xi$ von der Einheit nur um den Bruch $\frac{4185}{226\,335}$ verschieden wird, liefert die dritte Lösung:

$$w = 3,\ v = 7,\ u = 26,\ m' = 45,$$
$$z = 69,\ y = 71,\ Q_{45} = 1 \cdot 251205\,\zeta.$$

Lösungen geringeren Ranges, die minder genaue Terzen liefern als $Q_{-8}$, $Q_{45}$, erhält man noch für

$$w = -5,\ -9,\ \cdots \text{ und für } w = 7,\ 11,\ \cdots;$$

sie werden hier einstweilen außer Acht gelassen.

Die zur Bestimmung von $\xi$ dienende letzte Gleichung gibt

$$4\xi - w - \frac{9089\,\xi - 4904}{58\,856} - 1 = 4\xi - w - 1 - \eta = 0$$

$$\text{wobei } \eta = \frac{9089\,\xi - 4904}{58\,856} \text{ eine ganze Zahl sein muß.}$$

Hieraus folgt aber

$$6\eta - \xi + \frac{4322\,\eta + 4904}{9089} = 6\eta - \xi + \vartheta = 0$$

weshalb

$$\vartheta = \frac{4322\,\eta + 4904}{9089} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Dies findet nahezu statt, erstens für $\eta = -1$, wo $\vartheta$ nur um $\frac{582}{9089}$ von Null verschieden ausfällt. Es gibt dies die vierte Hauptlösung

$$\eta = -1,\ \xi = -6,\ w = -24,\ v = -54,\ u = -184,$$
$$m' = -314,\ z = -500,\ y = -498,\ Q_{-314} = 1 \cdot 249832\,\zeta.$$

Und zweitens noch näher für $\eta = 1$, wo $\vartheta$ von der Einheit nur um $\frac{137}{9089}$ abweicht, woraus die fünfte Lösung folgt:

$$\eta = 1,\ \xi = 7,\ w = 26,\ v = 59,\ u = 205$$
$$m' = 331,\ z = 354,\ y = 356,\ Q_{331} = 1 \cdot 24996\,\zeta.$$

Endlich noch für $\eta = 3$, wo $\vartheta$ nur um $\frac{308}{9089}$ von 2 Einheiten verschieden befunden wird, was zur sechsten Lösung führt:

$$\eta = 3,\ \xi = 20,\ w = 76,\ v = 172,\ u = 594,$$
$$m' = 1016,\ z = 1608,\ y = 1610,\ \mathfrak{Q}_{1016} = 1 \cdot 250088\,\zeta.$$

Hier könnte man innehalten und hätte damit die Hauptauflösungen der vorgelegten Gleichung, das heißt diejenigen kennen gelernt, von deren beinahe jeder man behaupten kann, daß in größerer Nähe am Grundtone $\mathfrak{Q}_0$ keine andere, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{5}{4}$ näher kommende anzutreffen sei.

Aus diesen gewinnt man mit Hilfe der im Verzeichnisse (16) angeführten reinen Quinten die anderen niederen Ranges. Letztere sind nämlich der Gleichung

$$\mathfrak{Q}_m = \frac{3^m}{2^{m+x}}\,\zeta$$

entnommen für solche $m$ und $x$, daß $\frac{3^m}{2^{m+x}}$ nahe $= 1$ ist. Die hier besprochenen Terzen hingegen ergeben sich aus der Gleichung

$$\mathfrak{Q}_{m'} = \frac{3^{m'}}{2^y}\,\zeta$$

für solche $m'$ und $y$, daß $\frac{3^{m'}}{2^y}$ nahe $\frac{5}{4}$ ist; also wird auch der Bruch $\frac{3^{m+m'}}{2^{m+x+y}}$ nahe $= \frac{5}{4}$ sein, und es ist mithin $\mathfrak{Q}_{m+m'}$ auch eine dem Reinverhältnisse $\frac{5}{4}$ mehr oder weniger nahe kommende Terz, besonders, wenn von beiden $\mathfrak{Q}_m$ und $\mathfrak{Q}_{m'}$ der eine zu groß, der andere zu klein gewählt wird, wo dann $\mathfrak{Q}_{m+m'}$ gewöhnlich eine Terz ersten Ranges wird.

Z. B. die Quinte $\mathfrak{Q}_{306} = 0 \cdot 999005\,\zeta$ und die Terz $\mathfrak{Q}_{1016} = 1 \cdot 250088\,\zeta$ geben durch Multiplikation eine neue Terz:

$$\mathfrak{Q}_{1322} = 1 \cdot 248844\,\zeta.$$

Ebenso liefern die Quinte $\mathfrak{Q}_{53} = 1 \cdot 00209\,\zeta$ und die Terz $\mathfrak{Q}_{-8} = 1 \cdot 24859\,\zeta$ eine neue Terz ersten Ranges: $\mathfrak{Q}_{45} = 1 \cdot 251205\,\zeta$, die soeben vorgekommen ist.

Die in der Quintenreihe befindlichen kleinen Terzen ähnlich zu berechnen, ist nicht notwendig; denn sie ergeben sich aus den großen Terzen Glied für Glied auf eine höchst einfache Weise. Es ist nämlich die Schwingungszahl der kleinen Terz $t_0 = \frac{6}{5}\,\zeta$; die einer ihr ähnlichen

Quinte sei $Q_{m''} = \frac{3^{m''}}{2^z}\zeta$, so ist durch Setzen ganzer **Zahlen** für $m''$ und $z$ nahezu

$$\frac{3^{m''}}{2^z} = \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5}, \quad \text{mithin } \frac{3^{m''-1}}{2^{z+1}} = \frac{1}{5},$$

also

$$\frac{3^{-(m''-1)}}{2^{-(z+1)}} = 5 \text{ zu machen.}$$

Für die großen Terzen hatten wir die ähnliche Gleichung

$$\frac{3^{m'}}{2^{y-2}} = 5, \text{ es wird mithin offenbar}$$

$$-m'' + 1 = m', \; -z - 1 = y - 2,$$

$$m'' = -m' + 1, \qquad z = -y + 1.$$

Es gehören also namentlich zu den folgenden Großterzen ersten Ranges die unten stehenden Kleinterzen derselben Rangstufe

$$T_0 = Q_4, Q_{-8}, Q_{45}, Q_{-314}, Q_{351}, Q_{1016} \cdots Q_{m'},$$

$$t_0 = Q_{-3}, Q_9, Q_{-44}, Q_{315}, Q_{-350}, Q_{-1015} \cdots Q_{m''},$$

und es ist allenthalben die Summe der Stellenzeiger entsprechender Q, also entsprechender Groß- und Kleinterzen

$$m' + m'' = 1,$$

eine wichtige Gleichung, in welcher ein Grundgesetz der Tonsysteme seine Wurzel hat.

Jetzt sind nur noch die Septimen übrig. Es sei eine solche $S_0 = \frac{7}{4}\zeta$, die ihr ähnliche Quinte $Q_n = \frac{3^n}{2^z}\zeta$, so muß durch ganze Werte von $n$ und $y$

$$\frac{3^n}{2^z} = \frac{7}{4}, \; \frac{3^n}{2^{z-2}} = 7 = \frac{3^n}{2^y}, \; z = y - 2 \text{ gemacht werden.}$$

Übergehend zu den Logarithmen hat man

$$n \log 3 - z \log 2 = \log 7, \text{ oder}$$

$$4771213n - 3010300z = 8450980, \text{ hieraus}$$

$$n - z - 3 + \frac{1760913n + 579920}{3010300} = n - z - 3 - u = 0,$$

wo ebenso wie $n - z - 3$ notwendig auch annähernd

$$\frac{1760913n + 579920}{3010300} \text{ eine ganze Zahl sein muß;}$$

hieraus folgt:

$$2u - n - \frac{511526u + 579920}{1760913} = 2u - n - v = 0,$$

wo

$$v = \frac{511526u + 579920}{1760913} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Nahezu ist dies der Fall für $u = -1$, wo $v$ nahe $= 0$ wird. Man gewinnt dadurch eine erste Septime:

$$u = -1,\ n = -2,\ z = -6,\ y = -4,\ Q_{-2} = 1 \cdot 77777\,\zeta.$$

Einen anderen Ton dieser Art minderen Ranges gibt

$$u = 6, \text{ wo } v \text{ nahe} = 2 \text{ wird; mithin}$$
$$u = 6,\ n = 10,\ z = 13,\ y = 15,\ Q_{10} = 1 \cdot 80203\,\zeta.$$

Aus der letzten Gleichung in $v$ folgt

$$3v - u - 1 + \frac{226335v - 68394}{511526} = 3v - u - 1 + w = 0,$$

wo $w = \frac{226335v - 68394}{511526}$ eine ganze Zahl sein muß; hieraus folgt aber $2w - v + \frac{58856w + 68394}{226335} = 2w - v + \xi = 0$, mithin muß auch $\xi = \frac{58856w + 68394}{226335}$ eine ganze Zahl sein. Dies findet nahezu statt für $w = -1$, wo dann $\xi = 0$ wird. Dies gibt eine neue Septime:

$$w = -1,\quad v = -2,\quad u = -8,\quad n = -14,\quad z = -25,\quad y = -23,$$
$$Q_{-14} = 1.75384\,\zeta.$$

Aber auch $w = 3$ gibt ein $\xi$ nahe an eins, also ist auch

$$w = 3,\quad v = 7,\quad u = 23,\quad n = 39,\quad z = 59,\quad y = 61,$$
$$Q_{39} = 1.175752\,\zeta.$$

eine annehmbare Septime.

Aus den letzten Gleichungen in $\xi$ folgt

$$4\xi - w - 1 - \frac{9089\xi + 9538}{58856} = 4\xi - w - 1 - \eta = 0,$$

wo

$$\eta = \frac{9089\xi + 9538}{58856}$$

eine ganze Zahl vorstellt. Dies ist nahe der Fall für $\xi = -1$, wo $\eta$ nahe Null wird.

Man erhält so eine sehr genaue Septime:

$$\xi = -1,\quad w = -5,\quad v = -11,\quad u = -39,\quad n = -67,\quad z = -109,$$
$$y = -107,\quad Q_{-67} = 1.75018\,\zeta.$$

Die folgenden Töne dieser Art tragen bereits sehr hohe Stellenzeiger, daher denn auch die Septimen in der Quintenreihe nur sehr spärlich vertreten sind.

Der klareren Übersicht halber mögen die bisher erhaltenen großen und entsprechenden kleinen Terzen und Septimen zusammengestellt sein.

$$
(21)\quad
\begin{array}{lll}
T_0 = \mathfrak{Q}_4 = 1.265625\,\zeta, & t_0 = \mathfrak{Q}_{-3} = 1.185185\,\zeta, & S_0 = \mathfrak{Q}_{-2} = 1.77778\,\zeta, \\
\mathfrak{Q}_{-8} = 1.24859\,\zeta, & \mathfrak{Q}_9 = 1.20136\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{10} = 1.80203\,\zeta, \\
\mathfrak{Q}_{45} = 1.251205\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{-44} = 1.198848\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{-14} = 1.75384\,\zeta, \\
\mathfrak{Q}_{-314} = 1.249832\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{315} = 1.200433\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{39} = 1.75752\,\zeta, \\
\mathfrak{Q}_{351} = 1.24996\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{-350} = 1.200076\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{-67} = 1.75018\,\zeta, \\
\mathfrak{Q}_{1016} = 1.250088\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{-1015} = 1.200023\,\zeta, & \mathfrak{Q}_{239} = 1.748403\,\zeta.
\end{array}
$$

Diese Groß- und Kleinterzen und Septimen sind aber nicht die einzigen, sondern nur die an Reinheit hervorragendsten derjenigen, von welchen ein Tonforscher bei der Konstruktion von Tonsystemen Gebrauch machen kann, und man erhält aus ihnen eine reiche Fülle von anderen meist niederen Ranges, wenn man sie mit einer der Quinten multipliziert, die der Einheit oder auch der Zahl 2 nahe kommen und die Stellenzeiger addiert.

Solche Quinten sind

$$
\mathfrak{Q}_{12} = 1.01364,\quad \mathfrak{Q}_{-12} = 1.97308,\quad \mathfrak{Q}_{41} = 1.97721,\quad \mathfrak{Q}_{-41} = 1.01153,
$$
$$
\mathfrak{Q}_{53} = 1.00209,\quad \mathfrak{Q}_{-53} = 1.99583.
$$

Sogar die Töne des vorliegenden Verzeichnisses können im allgemeinen so auseinander abgeleitet werden, z. B.

$$
\mathfrak{Q}_4 = \mathfrak{Q}_{-8} \cdot \mathfrak{Q}_{12},\quad \mathfrak{Q}_{45} = \mathfrak{Q}_{-8} \cdot \mathfrak{Q}_{53},\quad \mathfrak{Q}_{39} = \mathfrak{Q}_{-4} \cdot \mathfrak{Q}_{43},
$$
$$
\mathfrak{Q}_9 = \mathfrak{Q}_{-3} \cdot \mathfrak{Q}_{12} \text{ usw.}
$$

(Schluß folgt.)

# Bücherschau.

**E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.** gr. 8⁰. Leipzig 1903, B. G. Teubner. In Leinwand geb. ℳ 24.

In den Kreisen der akademischen Mathematiker findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung zurzeit nicht die allgemeine Beachtung und Pflege, welche sie verdient. Jedes Werk, das den gegenwärtigen Besitzstand und die in der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung maßgebenden Ideen und noch schwebenden Probleme dem wissenschaftlichen Publikum übermittelt, schließt daher die Fähigkeit in sich, unsere wissenschaftliche Erkenntnis auf diesem Gebiete zu verbreiten und zu fördern; nicht nur dadurch, daß die bisher erhaltenen Resultate größeren Kreisen bekannt gemacht werden, sondern auch dadurch, daß es zur Weiterarbeit anregt.

Czuber ist es ganz besonders zu danken, daß er im Gegensatz zur allgemeinen Mode von jeher der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen großen Teil seiner Arbeit gewidmet hat. Durch sein der deutschen Mathematikervereinigung erstattetes Referat ist er im gegenwärtigen Werke umfangreicher Literaturangaben überhoben. Trotzdem finden sich namentlich in den der mathematischen Statistik und der Lebensversicherung gewidmeten Teilen zahlreiche Nachweise der inzwischen erschienenen Literatur. Gegenüber den bisher veröffentlichten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehe ich einen wesentlichen Fortschritt in der gegenwärtigen Darstellung darin, daß auf einem verhältnismäßig beschränkten Raume die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung und die modernen Anwendungen gleichzeitig dargestellt werden.

Als einen Fortschritt in der Disposition betrachte ich es ferner, daß die auf eine endliche Anzahl von Möglichkeiten sich beziehenden Wahrscheinlichkeiten und die sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten in einem und demselben Abschnitte, nämlich in I „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" dargestellt sind. Frühere Autoren waren der Meinung, daß mit dem Auftreten der kontinuierlichen Variablen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz neue, begriffliche Schwierigkeiten hinzukämen. Im übrigen ist Referent der Meinung, daß die grundlegenden Begriffe und Definitionen von der mathematischen Seite aus eine ausführlichere Analyse verdient hätten, etwa in der Art, wie es auf den ersten Seiten von Poincarés „Calcul des Probabilités" angedeutet ist.

Der zweite Abschnitt des Buches, welcher den wiederholten Versuchen gewidmet ist, führt zum Bernoullischen und Poissonschen Theorem, für die ein strenger Beweis auf Grund eines Satzes von Tchébycheff im vierten Abschnitte nachgeholt wird. An den Resultaten der Brünner Lotterie wird die Übereinstimmung, an den Wolffschen Würfelversuchen die mögliche Nichtübereinstimmung der aus den genannten Sätzen folgenden Ergebnisse mit der Erfahrung nachgewiesen. Bei Gelegenheit des Poissonschen Theorems wird die erzeugende Funktion Laplaces wieder zu Ehren gebracht, die zur formalen Vereinfachung vieler Betrachtungen wichtige Dienste leistet. Czuber verwendet sie, um die aus wiederholten Versuchen sich ergebende Häufigkeitskurve durch das „Exponentialgesetz" ($e^{-x^2}$) zu approximieren.

Die Verallgemeinerung dieser Darstellung, nach welcher eine Übereinanderlagerung zahlreicher unabhängiger Elementarfehler näherungsweise zum Ex-

ponentialgesetz führt, wird in der Einleitung zur Ausgleichungsrechnung (Teil II) mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung nach Crofton ausgeführt. Nicht behandelt wird die neuerdings von den Russen vielfach bearbeitete Frage, unter welchen Voraussetzungen bei unbegrenzt wachsender Zahl der Elementarfehler die Häufigkeitskurve als Limes die Exponentialkurve ergibt. In der Tat gehen diese Untersuchungen wegen ihrer Kompliziertheit über den Rahmen eines Lehrbuches wohl hinaus, des Interresses der Fachgelehrten sind sie aber wert.

Dem Gesagten entsprechend wird die Ausgleichungsrechnung durchweg mit Hilfe des Exponentialgesetzes begründet. Gegenüber dem zweiten Verfahren, das Gauß in seiner Theoria combinationis gegeben hat, hat dieser Weg den Nachteil, daß er mehr Voraussetzungen erfordert, den Vorzug, daß er an ein konkretes Fehlergesetz anknüpft und dadurch dem Studierenden anschaulicher sein wird.

Im dritten Teile des Werkes werden Methoden und Resultate der mathematischen Statistik, speziell die Sterblichkeitsmessung und die Messung der Invalidität entwickelt und dadurch dem Studierenden der Mathematik ein neues Gebiet erschlossen, das er in dem üblichen Studiengang nicht kennen lernt.

Angewandt werden die Ergebnisse im vierten Teile auf die Lebens- und Invalidenversicherung. Vorführung der Erfahrungsresultate und der numerischen Daten bilden hier wie auch sonst einen wesentlichen Vorzug des Werkes.

Berlin, im September 1904. Georg Bohlmann.

---

**W. Voigt, Thermodynamik.** Zwei Bände. gr. 8. 360 u. 370 S. mit 43 bez. 44 Figuren. Leipzig, G. J. Göschen 1903, 1904.

In der neueren deutschen physikalischen Lehrbuchliteratur fehlte bisher eine *umfassende* Darstellung der Wärmelehre; denn die vorhandenen Lehrbücher dieses Gebiets behandeln entweder nur die mechanische Wärmetheorie im engeren Sinne, oder sie sind, wie die Vorlesungen von Kirchhoff und Helmholtz, auf Kosten einer ausführlichen Darstellung der Wärmeleitung unvollständig hinsichtlich der neueren Anwendungen der Thermodynamik. Diesem Mangel wird durch das vorliegende Werk abgeholfen, in welchem die *gesamte* Wärmetheorie nebst ihren Beziehungen zu anderen Gebieten der Physik, jedoch mit Ausschluß der kinetischen Theorien, eine zwar gedrängte, aber nichtsdestoweniger leicht verständliche und durch zahlreiche Anwendungen belebte Darstellung gefunden hat. Die Sätze aus anderen Zweigen der Physik, auf welche Bezug genommen wird, sind jedesmal zuvor in einem besonderen Paragraphen auseinandergesetzt, so daß auch in dieser Hinsicht bei dem Leser keine eingehenden Kenntnisse vorausgesetzt zu werden brauchen.

Der erste Band enthält eine die „reine Wärmelehre", d. h. die Thermometrie, Kalorimetrie und Wärmeleitung behandelnde Einleitung (49 S.) und Teil I, die Lehre von den „thermisch-mechanischen Umsetzungen", also die mechanische Wärmethorie im engeren Sinne. Bezüglich der Einleitung sei bemerkt, daß in dem Abschnitt über *Wärmeleitung* nur solche Probleme behandelt werden, die keinen großen Aufwand von Analysis erfordern, aber für die Bestimmung der Wärmeleitungskonstanten (so z. B. durch Beobachtung der Isothermen sowie nach der Methode des elektrisch geheizten Körpers von Kohlrausch) von Wichtigkeit sind.

Aus dem 1. Kap. des I. Teiles, betitelt „die Gleichung der Energie und das mechanische Wärmeäquivalent", seien hervorgehoben die ausführliche Besprechung der verschiedenen Bestimmungsmethoden des mechanischen

Wärmeäquivalents und die Anwendungen der Energiegleichung auf kosmische Probleme (Theorien der Sonnenwärme von R. Mayer und Helmholtz).

Auch im 2. Kap. — der Thermodynamik idealer Gase — behandelt der Verf. eine Reihe von Beispielen aus der kosmischen Physik, speziell das indifferente (adiabatische) Gleichgewicht in der Erdatmosphäre und in kosmischen Gaskugeln. Bemerkenswert als ein Gegenstand, den man sonst in den physikalischen Lehrbüchern der Thermodynamik nicht findet, ist in diesem Kap. noch die Lehre von den Zustandsänderungen auf „polytropischen" Kurven (nach Zeuner).

Das 3. Kap. enthält zunächst die Ableitung der zweiten Hauptgleichung aus dem Clausius-Thomson'schen Prinzip und allgemeine Folgerungen aus den beiden Hauptgleichungen, sodann die Anwendung derselben auf Flüssigkeiten und feste Körper unter allseitigem Druck, auf die wirklichen Gase (die Linde'sche Kältemaschine), auf die Definition der absoluten Temperaturskala, und auf einen zylindrischen festen Körper unter einseitigem Zug, wobei ein wenig bekannter merkwürdiger Versuch von W. Weber, sowie die Edlundschen Versuche besprochen werden.

Kap. 4 beginnt mit einem Abschnitt über die Grundlagen der Mechanik deformierbarer Körper; dann folgt die Entwicklung der Hauptgleichungen der Thermodynamik für beliebig viele unabhängige Variable und deren Anwendung auf elastische Körper — ein Gebiet, welches ja besonders vom Verf. selbst ausgebaut ist. Im Anschluß hieran wird erörtert, wie der Vorgang der Wärmeleitung streng, d. h. mit Berücksichtigung der begleitenden Deformationen, zu behandeln und inwieweit die gewöhnliche Behandlungsweise zulässig ist. Den Schluß des 1. Bandes bildet die Aufstellung der allgemeinen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen, welche den Ausgangspunkt der im 2. Band dargestellten Untersuchungen bilden. Diese betreffen die *thermisch-chemischen* und *thermisch-elektrischen* Umsetzungen (Teil II und III).

In Teil II werden (in Kap. 1) zunächst die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten für die Phasenumwandlung *einer* Komponente entwickelt und speziell auf die Aggregatzustandsänderungen angewendet. Die hier als Beispiel gegebene Behandlung der adiabatischen Zustandsänderung feuchter Luft nach Hertz — dessen Kurventafel auch reproduziert ist — wird jedem meteorologisch interessierten Leser sehr willkommen sein. Auch ein durch Zahlenbeispiele erläuterter Abschnitt über Dampfarbeits- und Dampfkältemaschinen wird als nützlich empfunden werden.

Das 2. Kap. behandelt — immer mit Benutzung des „zweiten" thermodynamischen Potentials — *mehrere* Komponenten in einer oder mehreren Phasen, insbesondere die Theorie der Mischungen und Lösungen, der Dissoziation idealer Gase und der elektrolytischen Dissoziation.

Der III. Teil bringt Anwendungen der Thermodynamik auf Probleme der *Elektrostatik* (besonders Pyro- und Piëzoelektrizität und die mittels des thermodynamischen Potentials daraus ableitbaren reziproken Erscheinungen) und des *Galvanismus* (Wärmewirkungen des Stromes und Thermoelektrizität, in der vom Verf. selbst herrührenden allgemeinen Behandlung mittels des thermodynamischen Potentials, ferner die Theorie der Hydrokette). Den Schluß bildet ein Kapitel über die thermodynamische Theorie der (elektromagnetisch aufgefaßten) *Wärmestrahlung*, worin die Gesetze von Stefan, Wien, Planck und Kirchhoff, sowie die Beobachtungsresultate von Lummer, Pringsheim und Kurlbaum erörtert werden.

Heidelberg. F. POCKELS.

---

## Neue Bücher.

### Astronomie und Geodäsie.

1. [illegible] Sammlung [illegible] Taf. Leipzig, Teubner. M. [illegible]
2. [illegible] Studien über eine [illegible] Wien 1905, Hölder. M. [illegible]

### Geometrie.

3. [illegible] geometrische Approximationen. [illegible] Mit 2 Taf. [illegible] M. 10

### Geschichte und Biographien.

4. Kern, G. Joseph, Die Grundzüge der linear perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder Van Eyck und ihrer Schule. I. Die perspektivische Projektion. Mit 2 Zeichnungen im Text u. 24 Taf. Leipzig, Seemann. geb. M. 6
5. Poggendorff, J. C., Handwörterbuch. 4. Bd. v. A. v. Oettingen. 22. [illegible] 24. Lfg. (Schluß). Leipzig, Barth. M. [illegible]
6. Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Sammlung Göschen Nr. 226. Mit 7 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80

### Mechanik.

7. Andrews, E. S., with some assistance from Karl Pearson. On the theory of the stresses in crane and coupling hooks, with experimental comparison with existing theory. London, Dulau. 3 s.
8. Boltzmann, Ludwig, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. II. Teil, enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen. Mit 10 Fig. Leipzig, Barth. M. 9; geb. M. 10
9. Fuhrmann, Arwed, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch u. Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 Fig. 3. verb. u. verm. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.60
10. Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. I. Teil: Mechanik starrer Körper. 3. Aufl. bearb. v. Ludw. Hotopp, Hannover 1905, Helwing. M. 10; geb. M. 11.50
11. Matriculation model answers: Mechanics. Being the London University Matriculation Papers in Mechanics from June 1890 to June 1898, and from Sept. 1902 to Sept. 1904. (University Tutorial Series.) London, Clive. 2 s.
12. Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Mit 257 Abb. 5. verb. u. verm. Aufl. (Internation. wissensch. Bibliothek Bd. 59.) Leipzig, Brockhaus. M. 8; geb. M. 9.
13. Mehrtens, Georg Christoph, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen u. Festigkeitslehre. 2. Bd. Statisch bestimmte Träger. Leipzig, Engelmann. M. 14; geb. in Leinw. M. 15
14. Müller-Breslau, Heinr. F. B., Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u. der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend v. dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit. 3. verm. u. verb. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 8; geb. in Halbfr. M. 10
15. Ritter, Aug., Elementare Theorie u. Berechnung eiserner Dach- u. Brücken-Konstruktionen. 6. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 10; geb. in Halbfr. M. 12

16. Webster, Arthur Gordon, The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. Teubners Sammlung XI.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 14.
17. Winkelmann, Max, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels. Diss. Mit Fig. u. 1 Taf. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.

## Physik und Chemie.

18. Abraham, M., Theorie der Elektrizität, I. Bd., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von A. Föppl. 2., vollständig umgearbeitete Aufl. hrsg. v. M. Abraham. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
19. Ariès, E., La statique chimique basée sur les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Paris, Hermann. Frs. 10.
20. Balfour, Right Hon. A. S., Reflections suggested by the new theory of matter. Being the presidential adress before the British Association for the Advancement of Science, Cambridge, August 17, 1904. London, Longmanns. 1 s.
21. Bremer, F., Leitfaden der Physik für die oberen Klassen der Realanstalten. Mit besonderer Berücksichtigung von Aufgaben u. Laboratoriumsübungen. Mit 386 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.20.
22. Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.20.
23. Classen, J., Theorie der Elektrizität u. des Magnetismus. II. Magnetismus und Elektromagnetismus. (Sammlung Schubert XLII.) Mit 53 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 7.
24. Czapski, Siegfried, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl., unter Mitwirkung des Verfassers u. mit Beiträgen von M. von Rohr hrsg. von O. Eppenstein. Mit 176 Abb. Leipzig, Barth. M. 14.50; geb. M. 16.
25. Donle, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u. Realgymnasien. 3., verb. Aufl. Mit 420 Abb., einer Spektraltaf. u. 560 Übungsaufgaben. Stuttgart 1905, Grub. geb. M. 3.60.
26. Duddell, W., On the resistance of electromotive forces of the electric arc. London, Dulau. 4 s.
27. Fortschritte, die, der Physik im J. 1903. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 59. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. M. 26.
28. Helm, Geo., Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung. Leipzig, Veit & Co. M. 5.60; geb. in Leinw. M. 6.60.
29. Hertz, Paul, Untersuchungen üb. unstetige Bewegungen eines Elektrons. Diss. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht M. 2.
30. Horton, Frank, The effects of changes of temperature on the modulus of torsional rigidity of metal wires. London, Dulau. 3 s. 6 d.
31. Junker, Fr., Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität für die Oberklassen höherer Lehranstalten. Ulm. (Kommissionsverlag von B. G. Teubner, Leipzig.) M. 0.80.
32. Marx, A. L'éther, Principe universel des forces. Mémoires résumés par C. Benoit. Paris 1905, Gauthier-Villars. Frs. 6.50.
33. Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. („Aus Natur und Geisteswelt", 58. Bändchen). Mit 27 Fig. B. G. Teubner, Leipzig. M. 1—; geb. M. 1.25.
34. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics: Sound. 3[rd] ed. carefully revised. London, Griffin. 8 s. 6 d.
35. Rizzatti, F., Dalla pietra filosofale al radio, con un'appendice bibliografica Torino. L. 3.50.
36. Samuelson, Arnold, Luftwiderstand und Flugfrage. Experimental-Vortrag. Hamburg, Boysen & Maasch. M. 2.

37. Schuster, Arthur, An introduction to the theory of Optics. London, Arnold 15 s.
38. Siertsema, L. H., De elektriciteits geleiding in gassen, in verband met de electronentheorie. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het leeraarambt in de naturkunde aan de polytechnische school te Delft, op 6 Oktober 1904. Delft, Waltmann Jr. Fl. 0.40.
39. Starke, Hermann, Experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Abb. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 6.
40. Stewart, Wallace, The higher text-book of Magnetism and Electricity. The Tutorial Physics vol. 4. London, Clive. 6 s. 6 d.
41. Strutt, Hon. R. J., The Becquerel rays and the properties of Radium. London, Arnold. 8 s. 6 d.
42. Thomson, J. J., Elements of the mathematical theory of Electricity and Magnetism. 3rd ed. Cambridge, University Press. 10 s.
43. Thomson, J. J., Elektrizität u. Materie. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. („Die Wissenschaft" Heft 3.) Mit 19 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3; geb. M. 3.60.
44. Travers, Morris W., Experimentelle Untersuchung von Gasen. Mit einem Vorwort von Sir William Ramsay. Deutsch von Tadeusz Estreicher. Nach der englischen Aufl. vom Verf. unter Mitwirkung des Übersetzers neu bearb. u. erweitert. Mit 1 Tfl. u. 144 Abb. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.
45. Wallentin, Ignaz, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. (Teubners Lehrbücher XV.) Leipzig B. G. Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
46. Watts, W. Marshall, An introduction to the study of Spectrum Analysis. London, Longmans. 10 s. 6 d.
47. Weyrauch, Jakob J., Grundriß der Wärmetheorie. Mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. 1. Hälfte: I. Erhaltung der Energie. Erster Hauptsatz. II. Wärme u. Arbeit. Zweiter Hauptsatz. III. Über Wärmemotoren im allgemeinen. IV. Von den Gasen. V. Über Luftmaschinen. VI. Aus der Chemie u. kinetischen Gastheorie. VII. Über Verbrennungsmotoren. Stuttgart 1905. Wittwer
48. Wiedemann, Eilhard, u. Ebert, Herm., Physikalisches Praktikum. 5. verb. u. verm. Aufl. Braunschweig, Vieweg und Sohn. M. 10—, geb. M. 11.
49. Wilson, H. A., On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic fluid. London, Dulau 1 s.
50. [illegible], Herm., Grundzüge der Experimentalphysik zum Gebrauch f. Schüler. Mit [illegible] Fig. Berlin 1905, Oehmigke. M. 1.50; geb. M. 1.80.

S. auch Nr. 16

## Rechenapparate. Tafeln.

51. [illegible], A., Instruction détaillée sur la règle à calcul Mannheim et méthode pratique, à l'usage des ingénieurs, architectes, conducteurs de travaux, élèves des écoles du gouvernement, des classes de mathématiques spéciales et de mathématiques élémentaires. Paris, Vuibert et Nony Frs. 2.50.
52. Gauss, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. [illegible] Fünfstellige logarithm.-trigonom. Tafeln f. Dezimalteilung des Quadranten. [illegible] Aufl. Halle, Strien. M. 4; geb. in Halbfrz. 6.75.
53. [illegible], Thermodynamische Rechentafel. [illegible] 3 × 49 cm. Nebst Gebrauchsanweisung. Berlin, Springer. M. 2.50.

## Verschiedenes.

54. [illegible] der Dampfturbinen. Mit zahlreichen Abb. Leipzig. [illegible] geb. in Leinw. M. 8.

**55.** Riecke, E., Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik u. Astronomie an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik in Göttingen, Ostern 1904, von O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, J. Stark u. K. Schwarzschild. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. M. 2.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abraham, M., Theorie der Elektrizität, I, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 18.

Ariès, E., La statique chimique, s. N. B. 19.

Arndt, Erdmann, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der 1. Klasse. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der vierten Realschule zu Berlin. Ostern 1904. Mit 2 Tfln. Berlin, Weidmann.

Boltzmann, L., Prinzipe der Mechanik, II., s. N. B. 8.

Bremer, F., Leitfaden der Physik, s. N. B. 21.

Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, s. N. 22.

Cesàro, Ernesto, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Gerhard Kowalewski mit 79 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 15.

Classen, J., Elektrizität und Magnetismus, II., s. N. B. 23.

Czapski, S., Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, 2. Aufl., s. N. B. 24.

Donle, W., Lehrbuch der Experimentalphysik, s. N. B. 25.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Tome I, vol. 1. fasc. 1. Arithmétique. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner. M. 4.

Fisher, I., Kurze Einleitung in die Differential- u. Integralrechnung („Infinitesimalrechnung") Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten 3. englischen Ausgabe übers. v. N. Pinkus. Mit 11 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 1.80.

Fricke, R., Rede, gehalten bei der Übernahme des Rektorats der Herzoglichen Technischen Hochschule Carola-Wilhelmina zu Braunschweig. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik, I., s. N. B. 9.

Hayn, Fr., Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. s. N. B. 1.

Holzmüller, Gustav, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Teil. 4. Doppel-Auflage. Mit 192 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.40.

Junker, Fr., Physikalische Aufgaben, s. N. B. 31.

Kern, G. I., Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder Van Eyck und ihrer Schule. I., s. N. B. 4.

Koch, K. R., Relative Schweremessungen, ausgeführt im Auftrage des Kgl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens. IV. Anschlußmessungen in Karlsruhe. (Veröffentlichung der Kgl. Württembergischen Kommission für die internationale Erdmessung. Sonder-Abdruck aus den Jahresheften des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahrgang 1905.) Stuttgart, Druck von C. Grüninger.

Köhler, A.. Mathematische Aufgaben f. die Prima der höheren Lehranstalten. Teil II. Berlin, Simion Nf. geb. M. 1.70, Auflösungen hierzu, brosch. M. 1.

Lechalas, G., Introduction à la géometrie générale. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.75.

Marx, A., L'éther, s. N. B. 32.

Mie, G., Moleküle, Athome, Weltäther, s. N. B. 33.

Möller, M., Orientierung nach dem Schatten, s. N. B. 2.

Moors, B. P., Le Système des poids, mesures et monnaies des Israélites d'après la Bible. Paris, Hermann. Frs. 4.

Müller, H., u. Kutnewski, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie u. Stereometrie. II. Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. 2. verb. u. stark gekürzte Aufl. Leipzig u. Berlin. 1905, Teubner.

Musil, A., Dampfmaschinen, s. N. B. 54.

Niemeyer, R., Pastor in Peckelsheim, Die Zahlenkunst. II. Teil. Das Rechnen mit ganzen Zahlen. 2. Fortsetzung. Selbstverlag. Dortmund, Buchdruckerei von C. L. Krüger.

Petronievics, Branislav, Prinzipien der Methaphysik. I. 1. Allgemeine Ontologie u. die formalen Kategorien. Mit einem Anhang. Elemente der neuen Geometrie. Heidelberg, Winter. M. 18.

Poggendorff, Handwörterbuch, s. N. B. 5.

Reusch, I., Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Mit 104 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 1.

Riecke, E., Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik u. Astronomie an den höheren Schulen, s. N. B. 55.

Schlags, Willibrord, Geometrische Aufgaben über das Dreieck. Für Schüler höherer Lehranstalten in Unterrichtsbriefen systematisch geordnet. Mit 59 Abb. Freiburg i. B., Herder. M. 1.

Schlömilch, Oskar, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Aufl. Bearb. v. E. Naetsch. Mit 85 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.

Schwering, K., Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 3. Lehrgang. 2., verb. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.20; geb. M. 1.50

Schwering, K., Analytische Geometrie für höhere Lehranstalten. 2., verb. Aufl. Mit 7 Fig. Freiburg i. B., Herder. M. —.60.

Starke, Herm., Experimentelle Elektrizitätslehre. s. N. B. 39.

Stolz, Otto u. Gmeiner, Anton, Einleitung in die Funktionentheorie. (Teubners Sammlung Bd. XIV.) I. Abteilung. Mit 10 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 6.

Sturm, A., Geschichte der Mathematik, s. N. B. 6.

Tannery, Jules, Indroduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2ième édition entièrement refondue. Tome I. Nombres irrationnels, ensembles, limites, séries, produits infinis, fonctions élémentaires, dérivées. Paris, Hermann.

Thomson, J. J., Elektrizität u. Materie, s. N. B. 43.

Travers, M. W., Experimentelle Untersuchungen von Gasen, s. N. B. 44.

Vries, H. de, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905, Göschen. M. 8.

Wallentin, J., Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre, s. N. B. 45.

Webster, A. G., The dynamics of particles . . . s. N. B. 16.

Weyrauch, Jakob J., Grundriß der Wärmetheorie. 1. Hälfte, s. N. B. 47.

Zwick, H., Experimentalphysik, s. N. B. 50.

# ZEITSCHRIFT
# ÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

BER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

---

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

---

GEGENWÄRTIG

NTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON


**R. MEHMKE** IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.


---


51. BAND. 4. HEFT.

MIT 2 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 17. April 1905.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.


---

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



---

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, G. Herglotz, G. Holtsmark, J. Horn, A. V. Leon, F. Ludwig, E. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, K. Nitz, R. J. W. Renner, C. Runge, L. Schleiermacher, J. Schnöckel, E. Selling, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Weinnoldt, Th. Wolthrecht, S. Wellisch, A. Wlassow, F. Wittenbauer, E. Wölffing.

# Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. ERMÉNYI, Ingenieur in Wien.

(Schluß.)

## IV. Tonsysteme der ersten Klasse.

Um zu den Tonsystemen erster Klasse zu gelangen, bilden wir zunächst aus dem Verzeichnisse (19) der reinen Quinten temperierte. Dies geschieht durch Multiplikation einer jeden Zahl mit einer Potenz der Temperatur $q$, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des zu dieser Zahl gehörigen Tones ist. Wir heben dann aus dem Verzeichnisse heraus die Töne:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_4 &= 1.2656 q^4 \zeta = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = E, \\ \mathfrak{Q}_{-3} &= 1.1852 q^{-3} \zeta = \frac{2^5}{3^3} q^{-3} \zeta = Es, \\ \mathfrak{Q}_{10} &= 1.8029 q^{10} \zeta = \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta = Ais. \end{aligned}$$

Dann temperieren wir aber auch die in den Formeln (18) verzeichnete große und kleine Terz und Septime durch Multiplikation mit $T$, $t$ und $s$:

$$T_0 = 1.25 T\zeta = \frac{5}{4} T\zeta, \quad t_0 = 1.2 t\zeta = \frac{6}{5} t\zeta, \quad S_0 = 1.75 s\zeta = \frac{7}{4} s\zeta,$$

und stellen endlich die ähnlichen Schwingungszahlen von $\mathfrak{Q}_4$ und $T_0$, $\mathfrak{Q}_{-3}$ und $t_0$, $\mathfrak{Q}_{10}$ und $S_0$ einander gleich, was durch schickliche Wahl der Temperaturen $T$, $t$ und $s$ bewerkstelligt gedacht wird:

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta &= \frac{5}{4} T\zeta, & \text{also } T &= \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} q^4 = \frac{81}{80} q^4, \\ \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta &= \frac{6}{5} t\zeta, & \text{„ } t &= \frac{2^4 \cdot 5}{3^4 \cdot q^3} = \frac{80}{81 q^3}, \\ \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta &= \frac{7}{4} s\zeta, & \text{„ } s &= \frac{3^{10}}{2^{13} \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{8192 \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{57344} q^{10}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen $q$ unbestimmt. Man kann demselben mithin noch unendlich viele Werte beilegen und wird so zu unendlich

vielen Tonsystemen der ersten Klasse gelangen. Nur muß jedesmal die Wahl des $q$ so getroffen werden, daß weder $q$ noch $T$, $t$ und $s$ viel von der Einheit verschieden ausfallen. Hiezu gehört aber wesentlich, daß $q < 1$ sei. Dies ist aber eine notwendige Eigenschaft aller Tonsysteme der ersten Klasse, denn wollte man $q > 1$ wählen, so hätte man

$$T > \frac{81}{80}, \quad t < \frac{80}{81}, \quad s > \frac{59049}{57344},$$

lauter heulende Wölfe. Hier erklärt es sich auch, warum als Repräsentant der Septime der Ton *Ais* mit der reinen Schwingungszahl $1.8020\,\mathfrak{z}$ und nicht der der reinen Septime $1.75\,\mathfrak{z}$ nähere Ton $B = 1.7778\,\mathfrak{z} = \mathfrak{Q}_{-2}$ gewählt worden ist. Letzterer würde nämlich anstatt der dritten der Gleichungen (22) für $s$ die folgende andere geliefert haben:

$$\frac{2^6}{3^2 \cdot 7 \cdot q^2} = \frac{64}{63 \cdot q^2},$$

die für jedes bei Tonsystemen erster Klasse zulässige $q < 1$ einen heulenden Wolf vorstellt, für $q = 1$ jedoch noch den Vorzug behält.

Multipliziert man nun die zwei ersten der Gleichungen (22) miteinander, so ergibt sich die merkwürdige Gleichung

$$Tt = q, \tag{24}$$

die ein Grundgesetz aller Tonsysteme enthält, nämlich: *Das Produkt der Temperaturen der großen und kleinen Terz ist gleich der Temperatur der Quinte.*

Dieser Satz läßt sich noch anders aussprechen. Man hat nämlich aus der vorhergehenden Gleichung auch

$$\frac{5}{4}T \cdot \frac{6}{5}t = \frac{3}{2}q,$$

mithin

$$\log \frac{5}{4}T + \log \frac{6}{5}t = \log \frac{3}{2}q$$

Nun sind $\frac{5}{4}T$, $\frac{6}{5}t$, $\frac{3}{2}q$ diejenigen Faktoren, mit welchen man die Schwingungszahl eines Tones multiplizieren muß, um jene seiner großen, kleinen Terz und Quinte zu erhalten, oder mit anderen Worten die Schwingungsverhältnisse der genannten Intervalle. Man kann also auch sagen: *Die temperierte große und kleine Terz ergänzen sich zur temperierten Quinte in dem Sinne, daß die Summe der Logarithmen der Schwingungsverhältnisse der Terzen den Logarithmus des Schwingungsverhältnisses der Quinte gibt.*

Es fragt sich, ob dieser merkwürdige Satz auf die Tonsysteme

der ersten Klasse beschränkt ist, und wenn nicht, auf welche anderen er auch ausgedehnt werden kann. Er verdankt sein Bestehen folgendem Umstande. Weil die vierte temperierte Quinte vom Grundtone aus, nämlich $q^4 \mathfrak{Q}_4$, zugleich die temperierte Großterz $T_0$ ist, und weil die dritte Quarte vom Grundtone aus, $q^{-3}\mathfrak{Q}_{-3}$, zugleich die temperierte Kleinterz $t_0$ ist, so bestehen die Gleichungen

$$T_0 = q^4 \mathfrak{Q}_4 \quad \text{und} \quad t_0 = q^{-3}\mathfrak{Q}_{-3},$$

aus welcher durch Multiplikation

$$T_0 t_0 = q\mathfrak{Q}_1$$

erhalten wird. Der Grund der Richtigkeit des obigen Satzes ist also, daß die Stellenzeiger derjenigen Quinten $\mathfrak{Q}$, die zugleich die Rolle der großen und kleinen Terz übernehmen, summiert Eins geben. Nun haben wir aber im vorhergehenden Abschnitte gesehen und im Verzeichnisse (21) klar vor Augen gelegt, daß zu jeder Großterz $\mathfrak{Q}_{m'}$ eine Kleinterz $\mathfrak{Q}_{m''}$ desselben Ranges vorhanden ist mit

$$m' + m'' = 1.$$

Der fragliche Satz gilt also für alle jene Tonsysteme, bei welchen die großen und kleinen Terzen in derselben Weise gepaart vorkommen.

Um nun auch noch eine andere allgemeine Eigenschaft der Tonsysteme der ersten Klasse zu erkennen, legen wir uns den über dem Grundtone $C$ konstruierten Dreiklang $CEG$ vor mit der musikalischen und arithmetischen Bezeichnung und den Schwingungszahlen seiner Bestandtöne:

$$C = Q_0 = \zeta, \quad E = Q_4 = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = 1.265625 q^4 \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta = 1.5 q\zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante $F$ die Schwingungszahl $\frac{4}{3q}\zeta$ besitzt, so wird man durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$ vorstehende Töne in $FAC$, d. h. den Dreiklang der Unterdominante verwandeln:

$$F = Q_{-1} = \frac{4}{3q}\zeta = \frac{1.33333}{q}\zeta, \quad A = Q_3 = \frac{3^3}{2^4} q^3 \zeta = 1.6875 q^3 \zeta, \quad C = 2\zeta = Q_0.$$

Die Oberdominante $G$ hat die Schwingungszahl $\frac{3}{2}q\zeta$, man erhält mithin den Dreiklang der Oberdominante ebenso durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}q$

$$G = \frac{3}{2}q\zeta = 1.5q\zeta = Q_1, \quad H = \frac{3^5}{2^7} q^5 \zeta = 1.89844 q^5 \zeta = Q_5,$$
$$D = \frac{3^2}{2^3} q^2 \zeta = 1.125 q^2 \zeta = Q_2.$$

Wichtige Töne sind noch die kleine Terz *Es* der Tonika *C* und die Septime *Eis* der Oberdominante *G*. Sie erhalten in sämtlichen temperierten Tonsystemen erster Klasse die Schwingungszahlen:

$$Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3}\zeta = \frac{1.185185}{q^3}\zeta, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11} q^{11}}{2^{17}}\zeta = 1.351524 q^{11}\zeta.$$

Aus den Tönen oben genannter 3 Dreiklänge, geordnet nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, setzt sich die Dur-Tonleiter über dem Grundtone (Tonika) $C = Q_0$ zusammen:

| $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $A$ | $H$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_0$, | $Q_2$, | $Q_4$, | $Q_{-1}$, | $Q_1$, | $Q_3$, | $Q_5$, | $Q_0$, |
| $\zeta$, | $\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta$, | $\frac{3^4}{2^6}q^4\zeta$, | $\frac{2^2}{3\cdot q}\zeta$, | $\frac{3}{2}q\zeta$, | $\frac{3^3}{2^4}q^3\zeta$, | $\frac{3^5}{2^7}q^5\zeta$, | $2\zeta$, |
| $\zeta$, | $1.125q^2\zeta$, | $1.2656q^4\zeta$, | $\frac{1.3333}{q}\zeta$, | $1.5q\zeta$, | $1.6875q^3\zeta$, | $1.8984q^5\zeta$, | $2\zeta$ |

Aus den Schwingungszahlen dieser Töne folgt znnächst:

$$\frac{D}{C} = \frac{E}{D} = \frac{G}{F} = \frac{A}{G} = \frac{H}{A} = \frac{3^2}{2^3}q^2 = 1.125q^2.$$

In sämtlichen Tonsystemen erster Klasse sind daher die ganzen Töne alle gleich, und es wird kein Unterschied zwischen großen und kleinen Tönen gemacht, wie er in der reinen Tonleiter besteht. Dies ist nun allerdings eine Abweichung vom reinen Wohllaute, die nur dadurch unmerklich gemacht werden kann, daß man sie auf die dissonanten Intervalle wirft.

Ferner ergibt sich noch

$$\frac{F}{E} = \frac{C}{H} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{1.0535}{q^5}$$

und

$$\frac{E}{Es} = \frac{Eis}{E} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7 = 1.0679q^7,$$

$$\frac{F}{Eis} = \frac{2^{19}}{3^{12}q^{12}} = \frac{1}{1.01364\,q^{12}}.$$

Mithin ist der große Halbton $\frac{F}{E}$ von dem kleinen Halbtone $\frac{E}{Es}$ im allgemeinen verschieden, ausgenommen, es wäre $q$ so beschaffen, daß

$$\frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7, \quad \text{also} \quad \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12} = 1,$$

$$q = \sqrt[12]{0.986541} = 0.99887$$

ist.

Dies ist die wohlbekannte Temperatur der Quinte im 12-stufigen, chromatischen Systeme; also in diesem und nur in diesem ist der große

Halbton dem kleinen gleich. Mit dem Zusammenfallen der beiden Halbtöne wird aber auch $F = Eis$, d. h. die Unterdominante ist auch zugleich die Septime des Septimenakkords der Oberdominante.

Bei allen anderen Tonsystemen der ersten Klasse, in welchen $q < 0 \cdot 99887$, ist der große Halbton größer als der kleine, und die Septime tiefer als die Unterdominante. Gäbe es hingegen brauchbare Tonsysteme erster Klasse, in welchen $q > 0 \cdot 99887$, wo dieses $q$ der Einheit noch näher käme als im chromatischen, also mit noch reineren Quinten, so wäre in denselben der kleine Halbton größer als der große, und die Septime höher als die Unterdominante. Daß es derlei Brauchbares nicht geben kann, liegt auf der Hand.

Endlich ist noch vermöge der oben angeführten Gleichungen

$$\frac{E}{Es} \cdot \frac{F}{E} = \frac{F}{Es} = \frac{3^2}{2^3} q^2 = \text{einem ganzen Tone,}$$

$$\frac{Eis}{E} \cdot \frac{F}{Eis} = \frac{F}{E} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \text{einem großen halben Tone.}$$

Also setzen sich der große und der kleine Halbton zu einem ganzen Tone, und der kleine Halbton und das Intervall $\frac{F}{Eis}$ zu einem großen Halbton zusammen.

Selbstverständlich läßt sich über einem jeden der temperierten Quintenreihe entnommenen $Q_p$ nicht nur ein Dreiklang, sondern auch eine ganze Tonleiter aufbauen, sowie über dem Grundtone $Q_0$. Die allgemeine Formel für diese Tonleiter geht aus derjenigen für den Grundton $Q_0$ hervor, indem man $p$ Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne $Q$ addiert, unter $p$ eine beliebige, ganze, positive oder negative Zahl verstanden. Diese Formel ist also

$$Q_p, \quad Q_{p+2}, \quad Q_{p+4}, \quad Q_{p-1}, \quad Q_{p+1}, \quad Q_{p+3}, \quad Q_{p+5}, \quad Q_p.$$

In allen für verschiedene Werte von $p$ in dieser Formel enthaltenen Tonleitern haben die korrespondierenden Intervalle einerlei Größe; der ganze Ton, die beiden Halbtöne sind überall dieselben. Die Konsonanzen, Quinte, Quarte, Terzen und Septimen sind in allen gleich temperiert.

Auch für die Molltonleiter über dem Grundtone $Q_p$ läßt sich eine ähnliche Formel aufstellen, zu der man auf demselben Wege gelangt. Der dem Grundtone $Q_0 = C$ angehörige Moll-Akkord ist nämlich $C$, $Es$, $G$.

$$C = Q_0 = \zeta, \quad Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q \zeta.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$, ebenso mit $\frac{3}{2}q$ bewerkstelligt man die Verwandlung desselben in die Moll-Dreiklänge.

$$F,\ As,\ C \quad \text{und} \quad G,\ B,\ D.$$

$$Q_{-1} = F = \frac{2^2}{3q}\zeta, \quad Q_{-4} = As = \frac{2^7}{3^4q^4}\zeta, \quad Q_0 = C = 2\zeta,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{2}q\zeta, \quad Q_{-2} = B = \frac{2^4}{3^2q^2}\zeta, \quad Q_2 = D = \frac{3^2}{2^2}q^2\zeta.$$

Aus den Tönen dieser 3 Moll-Dreiklänge entsteht die Molltonleiter über dem Grundtone $Q_0$

$$\begin{array}{cccccccc} C & D & Es & F & G & As & B & C \\ Q_0 & Q_2 & Q_{-3} & Q_{-1} & Q_1 & Q_{-4} & Q_{-2} & Q_0. \end{array}$$

Und indem man $p$ Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne $Q$ hinzufügt, erhält man die allgemeine Formel aller Moll-Tonleitern über dem unbestimmten Grundtone $Q_p$:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-3} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-4} \quad Q_{p-2} \quad Q_p.$$

Die arithmetische Nomenklatur kann hier sowohl, wie auch in der allgemeinen Formel der Dur-Tonleitern in die musikalische für jedes bestimmte $p$ mit Hilfe der Quintentabelle übertragen werden. Für die vorliegenden Zwecke ist dies jedoch nicht notwendig.

Der Musiker braucht, um die in verschiedenen Tonarten geschriebenen Tonstücke spielen zu können, die Töne mehrerer Tonleitern, und weil vorzugsweise verwandte Tonarten in Anwendung kommen, so bilden die Grundtöne dieser benötigten Tonleitern eine Reihe kontinuierlich fortschreitender Quinten in gewisser Anzahl. Die moderne Musik setzt deren 12 fest. Dies war jedoch nicht zu allen Zeiten gleich, leidet auch jetzt für gewisse Instrumente eine Ausnahme und könnte vielleicht in Zukunft anders werden.

Nehmen wir also, um allgemein zu sprechen, an, der Musiker brauche $p + 1$ Tonleitern über den $p + 1$ Grundtönen (Toniken)

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p$$

und zwar in Dur wie in Moll, so lehrt der Anblick der über den äußersten Tönen $Q_0$ und $Q_p$ aufgebauten Dur- und Moll-Tonleitern, daß hiezu alle Töne benötigt werden aus der folgenden Quintenreihe:

$$Q_{-4},\ Q_{-3},\ Q_{-2},\ Q_{-1},\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p,\ \ldots,\ Q_{p+5}.$$

Sie sind $p + 10$ an der Zahl, also um 9 mehr, als Dur-Tonarten. Die letzten 6 von ihnen ermangeln zudem der reinen Septime des Ober-

dominant-Septimenakkordes, und müssen sich anstatt dieser, mit der Unterdominante behelfen. Will man diesem Mangel abhelfen, und allen Tonarten echte Septimen verschaffen, so muß man die vorliegende Reihe bis $Q_{p+11}$ fortsetzen, was $p + 16$ Töne gibt, also um 15 mehr als Dur-Tonarten.

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß alle diese $p + 16$ Töne voneinander verschieden sind; befinden sich hingegen unter ihnen einander gleiche, dann kann oft eine namhafte Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden. Ein solches Zusammenfallen mehrerer Töne in einen findet aber nur in geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsystemen statt, und die Ersparnis ist dann am größten, wenn es gelingt, ein geschlossenes Tonsystem von $p + 1$ Stufen d. h. von so vielen, als Tonleitern benötigt werden, aufzufinden.

In einem solchen ist nämlich

$$\begin{array}{llll} Q_{p+1} = Q_0, & Q_{p+2} = Q_1, & Q_{p+3} = Q_2, & \ldots, Q_{p+11} = Q_{10}, \\ Q_p \;\;\;\, = Q_{-1}, & Q_{p-1} = Q_{-2}, & Q_{p-2} = Q_{-2}, & \ldots, Q_{p-3} \;= Q_{-4} \end{array}$$

und nur die $p + 1$ Töne

$$Q_0, \;\; Q_1, \;\; Q_2, \ldots, Q_p$$

sind wirklich voneinander verschieden. Man hat daher mit nur $p + 1$ Tönen ebenso viele Tonleitern, die gleichmäßig mit allen konsonanten und dissonanten Intervallen versehen sind. Das geschlossene Insichzurückkehren des Tonsystems erspart mithin wenigstens 9 Töne, und wenn dasselbe mit einer guten, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ nahe genug kommenden Septime versehen ist, sogar 15 Töne.

Da nun solchergestalt die geschlossenen Tonsysteme unter übrigens ähnlichen Umständen vor anderen einen bedeutenden Vorzug behaupten, so entsteht die wichtige Frage: Gibt es außer dem üblichen 12stufigen chromatischen noch andere geschlossene Tonsysteme der ersten Klasse, und welches ist ihre Stufenzahl?

Diese Frage zu beantworten, bringen wir in Erinnerung, daß, wie im II. Abschnitte bewiesen worden ist, die Töne eines geschlossenen $(p + 1)$-stufigen Tonsystems, wenn man sie nach ihrer Höhe d. h. Größe der Schwingungszahlen ordnet, eine geometrische Progression bilden, wie

$$\zeta, \;\; \alpha\zeta, \;\; \alpha^2\zeta, \;\; \alpha^3\zeta, \ldots, \alpha^p\zeta, \;\; \alpha^{p+1}\zeta,$$

in welcher $\alpha^{p+1} = 2$ ist. Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $(p + 1)$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, offenbar ganze Zahl. Das kleinste Intervall ist in den

Tonsystemen erster Klasse das zwischen dem großen und kleinen Halbton bestehende, wie oben nachgewiesen wurde. Nehmen wir an, dieses kleinste Intervall habe $k$ solche Stufen, der kleine Halbton deren $m$, so hat der große Halbton deren $m + k$. Der ganze Ton besteht aus einem großen, und einem kleinen Halbtone, hat mithin $2m + k$ Stufen. Die Tonleiter zählt 5 ganze Töne und 2 große Halbtöne, hat also im ganzen $p + 1 = 12m + 7k$ Stufen.

Verschiedenen Werten von $k$ und $m$ entsprechen verschiedene geschlossene Tonsysteme, und zwar gibt die Voraussetzung $k = 0$ die erste **Gattung** derselben, nämlich Tonsysteme, die für

$$m = 1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\quad 4\,,\ldots$$
$$(p+1) = 12m = 12,\quad 24,\quad 36,\quad 48,\ldots$$

Stufen enthalten. Sie sind nicht voneinander verschieden, sondern fallen alle in das einzige, wohlbekannte 12stufige System zusammen, welches mithin allein für sich eine Gattung bildet.

Die zweite Gattung bekommt man für $k = 1$. Hier entsprechen den angenommenen Werten von $m$

$$m = 1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\quad 4\,,\quad 5\,,\ldots$$
$$p + 1 = 12m + 7 \quad = 19,\quad 31,\quad 43,\quad 55,\quad 67,\ldots \text{ stufige}$$

Tonsysteme. Ihre Quintentemperaturen erhält man, wenn man der Reihe nach

$$Q_0 = Q_{19},\qquad Q_{31},\qquad Q_{43},\qquad Q_{55},\qquad Q_{67},\qquad \ldots$$

das heißt $1 = 1.0824q^{19},\quad 1.0972q^{31},\quad 1.1122q^{43},\quad 1.1274q^{55},\quad 1.1427q^{67},\ldots$

setzt, was $q = 0.99584,\quad 0.997012,\quad 0.997530,\quad 0.997822,\quad 0.998009$

ergibt.

Eine dritte Gattung erhält man für $k = 2$, was für die Werte von $m$

$$m = 1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\quad 4\,,\quad 5\,,\ldots$$
$$p + 1 = 12(m+1) + 2 \quad = 26,\quad 38,\quad 50,\quad 62,\quad 74,\ldots$$

Stufen zur Folge hat. Die entsprechenden Quintentemperaturen gewinnt man hier der Reihe nach, indem man

$$Q_0 = Q_{26},\qquad Q_{38},\qquad Q_{50},\qquad \ldots,$$

das heißt $1 = 1.1559q^{26},\quad 1.1717q^{38},\quad 1.1877q^{50},\ldots$

setzt.

Hier kommen auch Tonsysteme vor, die wir als zur zweiten Gattung gehörend kennen gelernt haben. Jedes zweite der vorliegenden Reihe

ist ein solches: Das 38stufige ist mit dem 19stufigen der zweiten Gattung, das 62stufige mit dem 31stufigen usw. identisch, sodaß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig nur die Tonsysteme mit 26, 50, 74 ... Stufen zu betrachten sind. Sie entsprechen den ungeraden Werten von $m$, daher man die eigentliche Formel für die Tonsysteme der dritten Gattung erhalten wird, wenn man $m = 2n + 1$ setzt, nämlich:

$$p + 1 = 24(n + 1) + 2.$$

Man könnte nun noch $k = 3, 4, 5, \ldots$ setzen und so eine 4te, 5te, 6te Gattung aufstellen. Allein die Stufenzahlen werden immer größer, die Werte von $q$ immer ungünstiger, und man überzeugt sich bald, daß, was man in den 3 ersten Gattungen nicht findet, in den folgenden vergebens gesucht wird.

Das sind die allgemeinsten Eigenschaften der Tonsysteme erster Klasse. Um weitere kennen zu lernen, muß man sich in nähere Untersuchungen einlassen. Sie können daher erst später zur Sprache kommen.

Aus den Gleichungen (22) gehen alle die unendlich vielen Tonsysteme der ersten Klasse hervor, und ein jeder Musiker, der sich mit der Absicht trägt, ein neues aufzustellen, kann sich dasselbe nach Belieben wählen, und kann diese Wahl entweder nach wissenschaftlichen Grundsätzen treffen, oder nach richtigen oder unrichtigen vorgefaßten Meinungen, oder nach einer besonderen Vorliebe für irgend eine Konsonanz, oder nach anderen Beweggründen.

Um zu zeigen, wie dies zu geschehen hat, führen wir diejenigen Tonsysteme erster Klasse, die bisher bekannt geworden sind, zuerst vor, hiebei freilich von der unstatthaften doppelten Fiktion ausgehend, daß den Erfindern derselben die Gleichungen (22) vorgelegen seien, und daß sie das, was sie wirklich gefunden haben, mit allen seinen Eigenschaften auch haben finden wollen.

Nehmen wir an, der erste dieser fiktiven Tonsystem-Erfinder sei ein konsequenter Quintenpuritaner, der seine Meinung etwa auf folgende Weise formuliert: Die vollkommenste und edelste aller Konsonanzen ist unbestrittener Maßen die Oktave, sie ist auch die allerempfindlichste gegen Verfälschung, und hat infolge ihrer nahen Verwandtschaft mit dem Grundtone und ihrer außerordentlichen Empfindlichkeit das Vorrecht, untemperiert zu bleiben. Die Quinte ist aber von derselben direkten Abkunft; nach der Oktave die vollkommenste aller Konsonanzen übertrifft sie diese noch an Lieblichkeit und Macht der Wirkung in der Musik. Gegen Verfälschung ist sie ebenso empfindlich wie die Oktave. Das Reinheitsprivilegium darf daher nicht der Oktave allein gebühren, sondern muß auf die Quinte ausgedehnt werden. Da also

ein Tonsystem mit absolut reinen Quinten verlangt wird, ist $q = 1$ zu setzen und die Gleichungen (22) geben

$$T = \frac{81}{80} = 1 + \frac{1}{80}, \; t = \frac{80}{81} = 1 - \frac{1}{81}. \tag{25}$$

Die Temperatur der Septime kann entweder den Gleichungen (22) oder (23) entnommen werden; da letzteres hier das vorteilhaftere ist, so wird man

$$s = \frac{64}{63} = 1 + \frac{1}{63} \tag{26}$$

erhalten. Dies ist das griechische Tonsystem des *Pythagoras*.

Hier mögen einige Bemerkungen zu diesem Beispiele angefügt sein, die zum richtigen Verständnis des behandelten Gegenstandes vielleicht mehr beizutragen geeignet sind, als das Beispiel selbst. Der Erfinder des griechischen Tonsystems ist ein fiktiver, d. h. die Griechen haben zwar ihr Tonsystem erfunden, waren mithin Quintenpuritaner, tatsächlich aber waren sie dies nicht aus Grundsatz, denn eine eigentliche Theorie kannten sie nicht, sonst hätten sie wohl einen ganz anderen Gebrauch davon gemacht. Es ist ein erheblicher Unterschied zwischen einem, von einer richtigen mathematischen Theorie geleiteten Erfinder und einem anderen, der dieses Hilfsmittel entbehrt. Der erste gleicht einem Manne, der mit der Formel als Quittung in der Hand zu einer Kasse geht und sich einen bestimmten durch die Formel festgestellten Betrag ausbezahlen läßt. Der andere dagegen einem Manne, der auf der Straße umherirrt in der Hoffnung, einen vollen Geldbeutel zu finden. Manchmal findet er wirklich einen solchen, manchmal etwas ganz anderes, oft gar nichts, und hat meistenteils auch im günstigsten Falle keinen Anhalt zur Beurteilung, ob er mit seinem Funde zufrieden zu sein Ursache habe, oder mehr zu suchen Veranlassung nehmen solle.

Die bisher bekannt gewordenen Tonsysteme sind meist auf dem Wege eines Versuches und nicht auf Grundlage einer umfassenden Theorie erfunden, gleichen also immerhin einem gefundenen Geldbeutel, bei dem man nicht fragen darf, warum der Erfinder nicht mehr gefunden oder warum er nicht lieber Gold gefunden habe statt Silber. Der Mathematiker hingegen muß seinen klaren Willen darlegen, er darf nicht etwas anderes wollen und etwas anderes erreichen. Eine wohlgeordnete mathematische Theorie der Tonsysteme darf sich daher keineswegs darauf beschränken, dem Leser nur einige, wenn auch sehr gute Tonsysteme mit lobender Kritik und Empfehlung vorzuführen. Sie muß vielmehr demselben alle möglichen, systematisch eingeteilt in Klassen und Gattungen, mit Angabe der allgemeinen und besonderen Eigenschaften vorlegen. Dies ist aber noch nicht genug. Sie hat den

Leser noch überdies in der zu treffenden Auswahl zu leiten, jedoch nicht dadurch, daß sie ihm eine bestimmte Ansicht aufzudringen sucht, sondern dadurch, daß sie ihn lehrt, seine eigene wie immer geartete Ansicht in die mathematische Sprache zu übertragen, und der Analysis dasjenige Tonsystem, welches dieser seiner Ansicht am vollkommensten entspricht, methodisch abzufragen und tabellarisch übersichtlich in der ganzen Ausdehnung der musikalischen Praxis berechnet vorzulegen. Das einfachste Mittel zu diesem Zwecke schien die Vorführung fiktiver Tonliebhaber mit den verschiedenartigsten Ansichten zu sein, die man diese ihre Ansichten genau formulieren, und teilweise der Klarheit wegen auch begründen läßt, und denen man dann mit Hilfe geregelter mathematischer Methoden die angestrebten Zwecke erreichen und die besonderen Ansichten verwirklichen hilft. Selbstverständlich werden niemand, und wäre es auch der Erfinder eines Tonsystems selbst, derlei An- oder Absichten zugemutet. Am allerwenigsten bekennt sich aber die Theorie zu irgend einer derselben. Diese hat vielmehr und vertritt keine besondere Ansicht, sondern betrachtet alle vollständig aufgezählten Tonsysteme als ebenbürtige und gleichberechtigte Auflösungen eines und desselben mathematischen Problems.

Die zweite Bemerkung ist: Die Tonsysteme *erster Klasse* vertragen sich mit den reinen Quinten nicht, indem sie dieselben nur um den Preis sehr falscher Terzen und Septimen erkaufen lassen. Viel besser befreunden sie sich mit reinen Terzen und Septimen, wie in der Folge dieser Untersuchung erhellen soll. Liebhaber reiner Quinten sind daher genötigt, ihre Zuflucht zu den Tonsystemen der zweiten Klasse zu nehmen, wo sie wirklich erhalten, was sie wünschen.

Führen wir uns jetzt einen zweiten fiktiven Tonliebhaber vor, der seine Wünsche folgendermaßen in Worte kleidet: Ich erkenne den hohen Wert reiner Oktaven und Quinten an, aber ich kann doch billig verlangen, daß man damit auch praktische Musik machen könne, und zwar mit bescheidenen Tonmitteln. Hiezu braucht man aber bei einer mäßigen Anzahl von Tönen eine genügende Auswahl von Tonleitern, die wieder am besten in einem geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsysteme zu haben sind. Ich wünsche also ein solches, auch wenn es mit einem kleinen Opfer an Reinheit der Quinten erkauft werden müßte. Diesem Begehren wird durch das gegenwärtig im Gebrauche stehende 12stufige, chromatische Tonsystem Genüge geleistet, welches wir im Vorhergehenden bereits sattsam kennen gelernt haben. Die Temperaturen der konsonanten Intervalle in demselben sind:

$$(27) \qquad q = 1 - \frac{1}{887}, \; T = 1 + \frac{1}{126}, \; t = 1 - \frac{1}{111}, \; s = 1 + \frac{1}{55}.$$

Der Vergleich dieser Zahlen mit denen des Pythagoräischen Tonsystems lehrt, daß man durch ein sehr geringes Opfer von $\frac{1}{887}$ der Schwingungszahl, gebracht an der Reinheit der Quinte, eine sehr merkliche Aufbesserung um beiläufig den 3fachen Betrag bei den beiden Terzen erzielt hat. Die Septime hat sich aber verschlimmert in einem Maße, daß man genötigt ist anzunehmen, die reine Septime sei im chromatischen Systeme durch gar keinen Ton vertreten.

Gehen wir jetzt von den Verehrern reiner Quinten zur Voraussetzung eines Tonforschers über, der ein anderes Intervall, etwa die kleine Terz in besonderen Schutz nimmt, also ein Tonsystem zu haben wünscht, in welchem $t = 1$ ist; mithin ist vermöge der Gleichung (24) $q = T$, und infolge der zweiten der Gleichungen (22):

$$(28) \qquad 1 = \frac{80}{81 \cdot q^3}, \quad \text{also } q = \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = \frac{4 \cdot 30887}{4 \cdot 32675} = 1 - \frac{1}{242} = T.$$

Diese Zahl belehrt uns, daß man die reine kleine Terz nicht umsonst erhalte, sondern mit einem namhaften Opfer an Reinheit der Quinte bezahlen müsse. Aber auch alle übrigen Eigenschaften eines Tonsystems sind nur um den Preis zu haben, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Und wenn man das in Rede stehende Tonsystem in ein geschlossenes umschaffen will, muß man so fragen: Wie viel muß man von der absoluten Reinheit der kleinen Terz ablassen, um dafür ein geschlossenes Tonsystem zu erhalten?

Die Antwort auf diese Frage erstreben wir so: Ein geschlossenes $m$-stufiges Tonsystem ist vorhanden, wenn man in der Quintenreihe einen Ton $\mathfrak{Q}_m$ entdecken kann, der für irgend ein $q$ dem Grundtone $\mathfrak{Q}_0$ gleich wird.

Setzen wir also $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_m$, das heißt:

$$\mathfrak{z} = \frac{3^m}{2^\alpha} q^m \mathfrak{z}, \text{ und untersuchen, ob dieser Gleichung nicht}$$

für den obigen Wert von $q$ oder einen sehr wenig davon verschiedenen und für irgend welche ganzzahligen Werte von $m$ und $\alpha$ Genüge zu leisten wäre. Die Gleichung schreiben wir in folgender Gestalt:

$$(29) \qquad \frac{3^m}{2^m} q^m = 2^{\alpha - m} = 2^x, \text{ wo } \alpha - m = x \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$(30) \qquad q = \frac{1}{3} 2^{\frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{3} 2^{\frac{m+x}{m}} = \frac{2}{3} 2^{\frac{x}{m}} \text{ und}$$

$$(31) \qquad \frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Die letztere dieser beiden Gleichungen suchen wir nun annäherungsweise aufzulösen in ganzen Zahlen für $x$ und $m$; wir setzen zu diesem Behufe anstatt $q$ den durch die Gleichung (28) gegebenen Wert und entwickeln sodann den zweiten Teil der Gleichung (31) in einen Kettenbruch. Der demselben am nächsten kommende Näherungsbruch kann dann für $\frac{x}{m}$ genommen werden. Es wird so:

$$\frac{x}{m} = \frac{4\,753\,229}{3\,010\,300} - 1$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \frac{2351}{159\,303}}}}}}.$$

Der zum letzten Nenner 2 hinzugefügte negative Ergänzungsbruch ist so klein, daß er vernachlässigt werden kann. Man bekommt also einen sehr genauen Näherungsbruch:

$$\frac{x}{m} = \frac{11}{19}, \tag{32}$$

aus welchem zu schließen ist, daß es wirklich ein geschlossenes 19stufiges Tonsystem in der nächsten Nähe desjenigen mit absolut reinen kleinen Terzen gebe.

Seine Quintentemperatur entspricht aber nicht der Gleichung (28), sondern muß aus der Gleichung (30) für $\frac{x}{m} = \frac{11}{19}$ neu berechnet werden:

$$\log q = -\,0 \cdot 0\,018\,108$$
$$q = 0 \cdot 99\,584 = 1 - \frac{1}{240} = \frac{239}{240}.$$

Mit Hilfe dieser Werte des $q$ und seines Logarithmus schreitet man zur neuen Berechnung von $T$, $t$ und $s$ aus den Formeln (22) und erhält

$$T = 0 \cdot 995\,753 = 1 - \frac{1}{235} = \frac{234}{235}$$

$$t = 1 \cdot 0000865 = 1 + \frac{1}{11\,560} = \frac{11\,561}{11\,560}$$

$$s = 0 \cdot 98\,768 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}.$$

Das geschlossene 19stufige Tonsystem hätten wir also ziemlich billig erhalten, gegen ein Opfer von $\frac{1}{11\,560}$ der Schwingungszahl der kleinen Terz. Die Töne folgen in diesem Systeme einer geometrischen Progression, deren Quotient $\sqrt[19]{2} = 1 \cdot 037\,155$ ist.

Sie sind:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
Q_0 &= C = \zeta &&= \zeta\\
Q_7 &= Cis = 1\cdot0372\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2}\\
Q_{-5} &= Des = 1\cdot07\,569\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^2}\\
Q_2 &= D = 1\cdot11\,566\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^3}\\
Q_9 &= Dis = 1\cdot15\,711\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^4}\\
Q_{-3} &= Es = 1\cdot20\,010\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^5}\\
Q_4 &= E = 1\cdot24\,459\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^6}\\
Q_{11} &= Eis = 1\cdot29\,094\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^7} = Fes\\
Q_{-1} &= F = 1\cdot33\,881\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^8}\\
Q_6 &= Fis = 1\cdot38\,851\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^9}\\
Q_{-6} &= Ges = 1\cdot44\,024\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{10}}\\
Q_1 &= G = 1\cdot49\,376\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{11}}\\
Q_8 &= Gis = 1\cdot54\,926\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{12}}\\
Q_{-4} &= As = 1\cdot60\,682\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{13}}\\
Q_3 &= A = 1\cdot66\,652\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{14}}\\
Q_{10} &= Ais = 1\cdot72\,844\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{15}}\\
Q_{-2} &= B = 1\cdot79\,266\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{16}}\\
Q_5 &= H = 1\cdot85\,927\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{17}}\\
Q_{-7} &= Ces = 1\cdot92\,835\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{18}} = His\\
Q_0 &= C = 2\,\zeta &&= \zeta\sqrt[19]{2^{19}}.
\end{aligned}
$$

Dieses ist das Tonsystem *Opelts.* Es besitzt sehr schätzbare Eigenschaften, die es in der Tat empfehlen. Zwar ist die Reinheit der Intervalle eine mäßige. Allein schon der Umstand, daß ein so intelligenter und erfahrener Musiker und Akustiker wie Opelt sein Tonsystem dem musikalischen Publikum empfehlen konnte, beweist zur Genüge, daß $\frac{239}{240}$ wenigstens für die große Mehrzahl musikalischer Instrumente eine sehr gut zulässige Temperatur der Quinte sei.

Es scheint übrigens gerade die rechte Anzahl von Tönen zu besitzen, weder zu wenig, noch zu viel, sondern für das Bedürfnis der Musik gerade genug. Den Beweis hiefür scheint die Erfahrung zu geben, nach der Violinspieler unter anderen wirklich 19 Töne kennen, und die musikalische Notenschrift auch Zeichen für 19 Töne besitzt.

Aus ihnen werden 19 Dur- und eben so viele Moll-Tonarten und Leitern gebildet, was mehr als genug ist. Die Tonintervalle in der reinen Tonleiter vermag das *Opelt*sche System treuer wieder zu geben, als das chromatische, weil es bereits einen Unterschied macht zwischen großen und kleinen Halbtönen. Der große besteht aus zwei, der kleine aus einer Tonstufe, der ganze Ton hat drei Stufen. Mithin geben die 5 ganzen und 2 großen Halbtöne der Skala gerade 19 Tonstufen des Systems. Diese Halbtöne sind nun wohl nicht ganz die der reinen Skala, wo dem kleinen Halbton das Schwingungsverhältnis $\frac{25}{24} = 1 \cdot 0416$, dem großen das $\frac{16}{15} = 1 \cdot 0666$ entspricht, während *Opelt* hiefür die Zahlen: $1 \cdot 0372$ und $1 \cdot 0756$ hat. Es kommen diese Zahlen aber doch den reinen Verhältnissen näher, als der gemeinsame Repräsentant beider Halbtöne im 12stufigen Systeme, nämlich: $1 \cdot 0595$.

Diese Beispiele bereits *bekannt gewordener* Tonsysteme mögen genügen. Wir wenden uns nun zu solchen Systemen der ersten Klasse, die auf Grundlage dieser Theorie aufgebaut bisher *noch nicht bekannt* geworden sind, und lassen deshalb noch einen hypothetischen Musikliebhaber auftreten, der folgende Betrachtung anstellt: Wer irgend etwas, also auch ein Tonsystem haben will, muß sich vor allem anderen die Frage stellen, was kann ich vernünftiger Weise wollen und auch erhalten? Hiezu gehört aber die volle und genaue Kenntnis aller Eigentümlichkeiten der gewünschten Sache, mit denen man sich also zu befreunden hat. Die hier am meisten in Betracht zu nehmende Eigentümlichkeit eines Tonsystems ist der innige Zusammenhang aller seiner Eigenschaften, infolgedessen man keine von ihnen antasten kann, ohne alle übrigen mehr oder weniger zu verletzen. Deswegen erhält man hier auch nichts umsonst; alles muß mehr oder weniger teuer bezahlt werden, am aller kostspieligsten aber ist die absolute Reinheit irgend eines Intervalles. Die absolut reine Quinte z. B. muß mit heulenden Terzen und Septimen bezahlt werden. Wer absolut reine kleine Terzen haben will, muß dafür die übrigen Intervalle bis zum äußersten temperieren, beinahe übertemperieren. Dies kommt unstreitig daher, daß reine Intervalle mit dem Urbegriffe eines Tonsystems im direktesten Widerspruche stehen. Aber auch andere geschätzte Eigenschaften eines Tonsystems müssen um diesen Preis der Reinheit im allgemeinen erkauft werden, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Man hat also jederzeit sorgfältig dasjenige, was man an guten Eigenschaften erreichen will, gegen das, was man aufopfern muß, in die Wagschale zu legen, und acht zu geben, daß man bei dem Handel nicht zu kurz komme. Dazu jedoch ist es unerläßlich, daß man diese

guten Eigenschaften nicht nur kenne, sondern auch ihrem relativen Werte nach richtig zu schätzen wisse. Sie sind:

1. Die Reinheit der Intervalle.
2. Ökonomie, das heißt mäßige Anzahl der zum Musizieren benötigten Töne.
3. Genügende Menge und Auswahl an Dur- und Moll-Tonarten.
4. Geschlossenes Rückkehren in sich selbst samt dem hiemit in Verbindung stehenden Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression.
5. Anschluß an denjenigen Teil der gegenwärtig in Übung stehenden Gesetze der Tonkunst, der dem Fortschritte derselben in der Zukunft nicht hinderlich ist.
6. Auch das musikalische Instrument ist in Betracht zu ziehen, und das Tonsystem soll womöglich dem Baue und sonstigen Eigentümlichkeiten desselben nicht widerstreben.

Um über den relativen Wert dieser Eigenschaften zu richtigeren Begriffen zu gelangen, nehmen wir sie der Reihe nach vor und ergehen uns über dieselben in folgenden Betrachtungen.

Die Reinheit der Intervalle anlangend ist schon bemerkt worden, daß sie teuer zu stehen kommt, und es kann auch noch hinzugefügt werden, daß sie, über eine Grenze hinaus getrieben, wertlos ist. Denn es gibt für jedes konsonante Intervall eine Verfälschung, die so klein ist, daß sie von einem musikalisch gebildeten Durchschnittsgehör unter Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, eben noch nicht bemerkt werden kann, aber doch so groß ist, daß eine geringe Steigerung sie schon bemerklich machen würde.

Diese Verfälschung heiße die *virtuelle Verfälschung* des entsprechenden Intervalls und die ihm entsprechende Temperatur *die virtuelle Temperatur*.

Über die Grenze dieser virtuellen Temperatur hinaus ist jede Steigerung der Reinheit des Tones nur von sehr geringem Werte, denn sie kann nur durch künstliche Mittel bei der Stimmung der Instrumente hervorgebracht werden, und ist, wenn zustande gebracht, gar nicht wahrzunehmen, außer eben mit diesen Hilfsmitteln, z. B. Stimmgabelapparaten. Man kann aber doch nicht mit einem ganzen Stimmgabelkabinett ins Konzert gehen, und könnte man es, so würde es im Sturme schnell verbrausender Töne doch nichts nützen. Es gibt also eine für die praktische Musik nicht nur unerreichbare, sondern auch überflüssige Tonreinheit, die aber für den, mit dem Aufbau eines Tonsystems beschäftigten Theoretiker einen großen Wert hat, weil sie einzig und allein das Kapital bildet, durch dessen Aufopferung die heulenden

Wölfe beseitigt und alle schätzbaren Eigenschaften dieses seines Tonsystems erkauft werden.

Die Reinheit der konsonanten Intervalle hat also allerdings in einem Tonsysteme einen hohen Wert, aber nur bis zur Grenze der virtuellen Temperatur. Innerhalb dieser Grenzen hingegen ist eine weitere Annäherung an die absolute Reinheit nicht nur nutzlos, sondern in den meisten Fällen sogar ein Fehler, es sei denn, daß der Erfinder imstande wäre zu beweisen, daß durch Aufopferung dieser überflüssigen Reinheit kein namhafterer Vorteil zu erreichen gewesen wäre. Es folgt hieraus, daß der nach einem neuen Tonsystem strebende Erfinder folgende zwei Dinge kennen sollte:

a) Die virtuelle Temperatur der (konsonanten) Intervalle: Quinte, große und kleine Terz und Septime;

b) Eine analytische Methode, die Temperaturen (22) dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen.

2. Rücksichtlich der zweiten Eigenschaft eines Tonsystems, nämlich Ökonomie der Töne, ist bereits im II. Abschnitte die Bemerkung gemacht worden, daß man die Sparsamkeit mit denselben auch zu weit treiben könne, daß sie im chromatischen Tonsysteme wirklich zu weit getrieben scheine, und es kann noch hinzugefügt werden, daß nach den bisherigen Erfahrungen die Zahl 19 das Minimum der zu einer guten Musik notwendigen Töne zu enthalten scheine.

Es kann indessen hier nicht unerwähnt bleiben, daß bei gewissen musikalischen Instrumenten z. B. Orgeln, Harmoniums, Klavieren, die ohnehin Hunderte von Saiten, Pfeifen, Federn und dergl. enthalten, jede Rücksicht auf Ökonomie beinahe lächerlich erscheint. Bei solchen ist daher eher Sorge zu tragen, daß sie ungeachtet ihres großen Reichtums an Tonmitteln nicht dennoch an Tonmangel leiden.

3. Hinsichtlich der notwendigen Anzahl der Moll- und Dur-Tonarten kann bemerkt werden, daß 12 solche, wie im chromatischen Systeme, vollkommen hinreichen, daß es aber nicht allein auf die Anzahl ankommt, sondern auch auf die Verbindung dieser Tonarten unter sich. Man sollte nämlich wenigstens zur Mehrzahl derselben, wenn nicht zu allen, auch die zunächst verwandten Dur- und Moll-Tonarten besitzen.

4. Der Übergang von einem unendlichen zu einem geschlossenen Tonsysteme ist einer Ersparnis von 7 bis 9 Tönen gleich zu achten; dies gilt jedoch nur in der ersten Klasse dieser Systeme und unter der Voraussetzung, daß man alle Töne des geschlossenen Systems auch wirklich benutzt. Sind ihrer so viele, daß man nicht alle brauchen kann, sondern eine Gruppe derselben von der wirklichen Verwendung

ausscheiden muß, dann sind alle Vorteile des Geschlossenseins aufgehoben bis auf den der Äquidistanz der Bestandtöne, der aber an und für sich schon groß genug ist, um für ein geschlossenes, selbst vielstufiges System sogar ein Opfer zu rechtfertigen.

Die Kenntnis der virtuellen Temperatur der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime ist wohl eine wichtige; sie geht aber den Musiker und Akustiker an, der Rechner kann sie bei der Aufstellung der Theorie der Tonsysteme als gegeben ansehen. Diese virtuellen Temperaturen seien also $q'$, $T'$, $t'$ und $s'$, so sind die virtuellen d. h. größten zulässigen Verfälschungen dieser Intervalle

$$q' - 1, \quad T' - 1, \quad t' - 1, \quad s' - 1.$$

Die reziproken Werte derselben aber können als die *Gewichtszahlen einer Verfälschung* (spezifische Empfindlichkeit) der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime angesehen werden, wenn man auf das Zeichen keine Rücksicht nimmt und nur den numerischen Wert beachtet. Diese Gewichte mögen beziehentlich:

$$\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{s}$$

heißen; so hat man:

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{(q' - 1)}, \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{(T' - 1)}, \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{(t' - 1)}, \quad \mathfrak{s} = \frac{1}{(s' - 1)}. \tag{34}$$

Jetzt ist noch eine Methode vonnöten, die Abweichungen von der Reinheit der konsonanten Intervalle untereinander auszugleichen und womöglich in die Grenzen der virtuellen Temperatur zurückzuziehen. Die Wissenschaft besitzt eine verläßliche Methode dieser Art, nämlich: Die Methode der kleinsten Quadratsummen. Sie wird in der Physik und Astronomie zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler verwendet, und, nach dem von *Gauß* entdeckten Prinzip des kleinsten Zwanges, beherrscht sie auch die ganze Körperwelt.

Zwar ist ihre Verwendbarkeit an die Bedingung geknüpft, daß positive und negative Fehler von gleicher Größe auch gleich wahrscheinlich seien, was auf das Gebiet der Töne übertragen vielleicht nicht mit aller Strenge richtig ist, indem gewisse Intervalle für positive und negative Verfälschungen ungleiche Empfindlichkeit offenbaren dürften. Allein es handelt sich hier zunächst nur darum, die Temperaturen dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen, und hiezu ist die Methode der kleinsten Quadratsummen ganz geeignet.

Macht man davon Gebrauch, so ist das Tonsystem zu suchen, für welches die Summe der Quadrate aller Aufopferungen an Reinheit oder,

was dasselbe ist, aller mit ihren Gewichten multiplizierten Verfälschungen ein Minimum ist.

Bei allen Tonsystemen der 1ten Klasse hängen die Temperaturen $q$, $T$, $t$, $s$, durch die Gleichungen (22) zusammen; die Verfälschungen sind mithin:

$$q-1, \quad T-1, \quad t-1, \quad s-1.$$

Mit ihren Gewichtszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ multipliziert, geben sie folgende Werte der Abweichungen von der Reinheit

$$\mathfrak{q}(q-1), \quad \mathfrak{T}(T-1), \quad \mathfrak{t}(t-1), \quad \mathfrak{s}(s-1).$$

Die Summe ihrer Quadrate sei $\sum$, so daß

$$\sum = \mathfrak{q}^2(q-1)^2 + \mathfrak{T}^2(T-1)^2 + \mathfrak{t}^2(t-1)^2 + \mathfrak{s}^2(s-1)^2 \tag{35}$$

besteht. Nun ist die Quadratsumme $\sum$ zu einem Minimum zu machen.

Da sie vermöge der Gleichungen (22) betrachtet werden kann als Funktion der Temperatur $q$ der Quinte, so erhält man durch Differenzieren die Bedingungsgleichung des Minimums:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \mathfrak{T}^2(T-1)\frac{dT}{dq} + \mathfrak{t}^2(t-1)\frac{dt}{dq} + \mathfrak{s}^2(s-1)\frac{ds}{dq} = 0.$$

Nun ist aber aus der Gleichung (22):

$$\frac{dT}{dq} = \frac{3^4}{4\cdot 5}q^3, \quad \frac{dt}{dq} = -\frac{2^4\cdot 5}{3^3 q^4}, \quad \frac{ds}{dq} = \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}q^9.$$

Führt man diese Werte und jene für $T$, $t$, $s$ aus (22) ein in die vorliegende Gleichung, so ergibt sich zur Bestimmung von $q$:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \frac{3^4}{2^2\cdot 5}\mathfrak{T}^2 q^3\left(\frac{3^4}{2^4\cdot 5}q^4 - 1\right) - \frac{2^4\cdot 5}{3^3}\frac{\mathfrak{t}^2}{q^4}\left(\frac{2^4\cdot 5}{3^4\cdot q^3} - 1\right)$$
$$+ \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}\mathfrak{s}^2 q^9\left(\frac{3^{10}}{2^{13}\cdot 7}q^{10} - 1\right) = 0.$$

Geordnet ist sie eine algebraische Gleichung vom 26ten Grade, nämlich:

$$\mathfrak{s}^2 q^{26} - \frac{2^{13}\cdot 7}{3^{10}}\mathfrak{s}^2 q^{16} + \frac{2^{19}\cdot 7^2}{3^{13}\cdot 5^3}\mathfrak{T}^2 q^{14} - \frac{2^{23}\cdot 7^2}{3^{16}\cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 q^{10} + \frac{2^{25}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^8 - \frac{2^{25}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^7$$
$$+ \frac{2^{29}\cdot 7^2}{3^{23}}\mathfrak{t}^2 q^3 - \frac{2^{33}\cdot 5\cdot 7^2}{3^{27}}\mathfrak{t}^2 = 0,$$

die wohl allen Versuchen, sie allgemein aufzulösen, widerstehen würde. Man braucht aber hier auch nur eine einzige, nahe unter der Einheit liegende Wurzel, die man mit Leichtigkeit erhält, wenn man die Beschaffenheit des $q$ berücksichtigt.

Dies kann nach Belieben entweder in der vorliegenden Gleichung geschehen, oder auch in der Gleichung (35), und zwar auf folgende Weise. Es sei

$$q = 1 - \varkappa, \tag{36}$$

so bedeutet $\varkappa$ einen sehr kleinen positiven Bruch; ebenso nehme man an

$$T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter $\theta$, $\tau$, $\sigma$ ebenfalls sehr kleine Brüche verstanden. Die Gleichungen (22) und (35) gehen durch Einführung dieser sehr kleinen Größen, deren höhere Potenzen außer acht zu lassen sind, über in

$$\theta = T - 1 = \frac{1}{2^4 \cdot 5}[1 - 2^2 \cdot 3^4 \varkappa], \quad \tau = t - 1 = -\frac{1}{3^4}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5\varkappa],$$

$$\sigma = \frac{5}{2^{13} \cdot 7}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10}\varkappa],$$

$$\left\{\begin{aligned} \sum &= \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \mathfrak{T}^2\theta^2 + \tau^2 + \mathfrak{s}^2\sigma^2 = \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \frac{\mathfrak{T}^2}{2^8 \cdot 5^2}[1 - 2^2 \cdot 3^4\varkappa]^2 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{t}^2}{3^8}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5\varkappa]^2 + \frac{5^2 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{26} \cdot 7^2}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10}\varkappa]^2. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Setzt man jetzt $\frac{d\Sigma}{d\varkappa} = 0$, so ergibt sich zur Bestimmung von $\varkappa$ folgende Gleichung des ersten Grades:

$$\varkappa\left[\mathfrak{q}^2 + \frac{3^8}{2^4 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^8 \cdot 5^2}{3^6}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{20} \cdot 5^2}{2^{24} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2\right] = \frac{3^4}{2^6 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^4 \cdot 5}{3^7}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{10} \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31}{2^{25} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2,$$

aus welcher der folgende Wert $\varkappa$, als Minimum der Verfälschung der Quinte, gewonnen wird:

$$\varkappa = \frac{0{\cdot}050625\,\mathfrak{T}^2 + 0{\cdot}0365798\,\mathfrak{t}^2 + 0{\cdot}306169\,\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{q}^2 + 16{\cdot}4025\,\mathfrak{T}^2 + 8{\cdot}7791495\,\mathfrak{t}^2 + 106{\cdot}03497226\,\mathfrak{s}^2} \tag{38}$$

oder auch

$$\varkappa = \frac{2^{19} \cdot 3^{11} \cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{29} \cdot 5^3 \cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 3^{17} \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 31 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{25} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^7\mathfrak{q}^2 + 2^{21} \cdot 3^{15} \cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{33} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 2 \cdot 3^{27} \cdot 5^4 \cdot \mathfrak{s}^2}$$

$$= \frac{4550926270464\,\mathfrak{T}^2 + 3288334336000\,\mathfrak{t}^2 + 27522997239375\,\mathfrak{s}^2}{89894839910400\,\mathfrak{q}^2 + 1474500111630336\,\mathfrak{T}^2 + 789200240640000\,\mathfrak{t}^2 + 9531996856233750\,\mathfrak{s}^2}$$

Dieser Ausdruck ist in hohem Grade lehrreich, denn man gewinnt aus ihm eine sehr vollständige Übersicht über die Temperaturverhältnisse aller Tonsysteme der ersten Klasse, selbst derjenigen, die den extremsten Anforderungen der absoluten Reinheit oder auch der gänzlichen Vernachlässigung jedes beliebigen Intervalles entsprechen; dies gestattet die bisher durch nichts beschränkte Willkürlichkeit der Gewichtsfaktoren $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{s}^2$.

Will man nämlich irgend eine der Konsonanzen besonders bevorzugen, also ganz rein haben, so setzt man die derselben entsprechende

Gewichtszahl unendlich; will man sie hingegen ganz vernachlässigen, so setzt man diese Gewichtszahl gleich Null.

Tun wir zuvörderst das erstere, so ergibt sich

$$
(39)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{q} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0}{1} = 0, \\
\mathfrak{T} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.050625}{16.4025} = \frac{1}{324}, \\
\mathfrak{t} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.0365798}{8.7791495} = \frac{1}{240}, \\
\mathfrak{s} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.306169}{106.035} = \frac{1}{346}.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln dienen vor allem anderen dazu, das Maß der Genauigkeit der Gleichung (38), aus welcher sie hervorgehen und die selbstverständlich nur eine angenäherte sein kann, weil bei ihrer Ableitung die höheren Potenzen von $\varkappa$ weggeworfen wurden, zu beurteilen. Denn die der absoluten Reinheit der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime entsprechenden Werte der Verfälschung $\varkappa$ lassen sich auch aus den Urgleichungen der Tonsysteme erster Klasse (22), und zwar mit beliebiger Genauigkeit, dadurch ableiten, daß man der Reihe nach erst $q$, dann $T$, dann $t$ und endlich $s$ der Einheit gleich setzt.

Dies gibt aber:

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
& & q &= 1, & & \varkappa = 1 - q = 0, \\
&\text{Für } T = 1: & q &= \sqrt[4]{\frac{80}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{5} = 0.996899, & & \varkappa = \frac{1}{322}, \\
&\text{„} \quad t = 1: & q &= \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = 0.995868, & & \varkappa = \frac{1}{242}, \\
&\text{„} \quad s = 1: & q &= \sqrt[10]{\frac{2^{13}\cdot 7}{3^{10}}} = \frac{2}{3}\sqrt[10]{56} = 0.9970742, & & \varkappa = \frac{1}{342}.
\end{aligned}
$$

Die geringe Verschiedenheit dieser genaueren Werte von $\varkappa$ von den durch die Gleichungen (39) gegebenen dient als Beweis, daß die Formel (38) genügend genau und verläßlich ist.

Die in Bruchform erscheinenden Werte von $\varkappa$ in den Gleichungen (39) ändern sich nicht, wenn man Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit $\mathfrak{q}^2$, ebenso Zähler und Nenner des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$, des vierten mit $\mathfrak{s}^2$ multipliziert.

Ferner weiß man, daß, wenn man aus mehreren solchen Brüchen, deren Zähler und Nenner positiv sind, einen neuen Bruch bildet, dessen Zähler die Summe aller Zähler, dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, dieser Bruch ein Mittelwert ist zwischen den Brüchen, aus welchen

er auf die angegebene Weise entstanden ist, nämlich größer als der kleinste und kleiner als der größte von ihnen. Dieser Bruch ist aber genau das $\varkappa$ der Formel (38). Es ist mithin für alle möglichen Werte von $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ von 0 bis $\infty$:

$$\varkappa \gtreqqless 0 \quad \text{und zugleich} \quad \varkappa \lesseqgtr \frac{1}{240}.$$

Nun hat man aber $\varkappa = 0$ für das griechische Tonsystem des Pythagoras, mit welchem das chromatische dem mathematischen Ursprunge nach identisch ist. Es ist nämlich das System der reinen Quinten, modifiziert durch die Forderung des geschlossenen Rückkehrens in sich selbst. Ebenso ist $\varkappa = \frac{1}{240}$ nahezu das System Opelts, also das System der reinen kleinen Terzen, modifiziert durch die Forderung der geschlossenen Rückkehr in sich selbst. Diese beiden Systeme stehen daher an den äußersten Grenzen der ganzen Reihe von Tonsystemen erster Klasse, das chromatische mit den am wenigsten, das Opeltsche mit den am meisten temperierten Quinten.

Die Folgerungen aus der Formel (38) sind noch nicht erschöpft. Fassen wir nämlich die daraus abgeleiteten Werte (39) näher ins Auge, so gewahren wir, daß durch beinahe eine und dieselbe Verfälschung der Quinte die große Terz und die Septime absolut rein gemacht werden können, erstere durch $\varkappa = \frac{1}{322}$, letztere durch $\varkappa = \frac{1}{342}$.

Es besteht also zwischen der schönen, heiteren Großterz und der sanften Septime ein besonders inniges Verhältnis, infolgedessen beide zugleich der größeren Reinheit teilhaftig werden und sich auch beide zugleich in heulende Wölfe verwandeln. Diese Umänderung geschieht aber bei der Septime viel rascher als bei der Terz, wovon man sich am besten überzeugt, wenn man die erste und dritte der Gleichungen (22) differenziert, wodurch man erhält:

$$dT = \frac{4.81}{80} q^3 dq, \quad ds = \frac{10.59049}{57344} q^9 dq.$$

Da $q$ immer nahe der Einheit und unter derselben ist, so hat man annäherungsweise:

$$dT = 4dq, \quad ds = 10dq,$$

d. h. die Temperatur der Terz ändert sich viermal und die der Septime gar zehnmal so rasch als die Temperatur der Quinte. Wenn sich daher die Verfälschung $\varkappa$ der Quinte nur sehr wenig, z. B. um $\frac{1}{1000}$ von dem Werte $\varkappa = \frac{1}{342}$, für welchen die Septime rein ist, entfernt, so steht diese letztere bereits in der Entfernung $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ von der Reinheit, ist also schon namhaft falsch.

In dieser Übereinstimmung der großen Terz mit der Septime scheint ein Vorteil zu liegen, der darin besteht, daß man, wenn man ein Tonsystem mit reinen Terzen konstruiert, auch beinahe reine Septimen umsonst mit in den Kauf erhält und umgekehrt. Dies ist aber geeignet, die Aufmerksamkeit auf zwei neue Tonsysteme zu lenken, das mit reinen Terzen und das mit reinen Septimen. Ihre aus den Gleichungen (22) für $T = 1$ und $s = 1$ berechneten Temperaturen sind beziehentlich:

$$(41)\quad \begin{aligned} &q = 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad T = 1, \quad t = 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad s = 1 - \frac{1}{570} = \frac{569}{570}, \\ &q = 1 - \frac{1}{342} = \frac{341}{342}, \quad T = 1 + \frac{1}{1422}, \quad t = 1 - \frac{1}{276}, \quad s = 1. \end{aligned}$$

Die Logarithmen der $q$ sind beziehentlich:

$$\log q = -0.0013488,$$
$$\log q = -0.0012725.$$

Diese Zahlen sehen den Rechner viel freundlicher an als die im chromatischen und die im Opeltschen Systeme, und es ist beinahe merkwürdig, daß unter allen Puritanern derjenige, welcher die unbeachtete, aus der modernen Tonkunst ausgestoßene reine Septime in besonderen Schutz nimmt, das beste Tonsystem bekommt, wenn er nur nach Zahlen urteilt.

Um eine möglichst vollständige Übersicht über alle Tonsysteme der ersten Klasse zu gewinnen, ist es aber notwendig, auch die jedenfalls berechtigtere Meinung, daß die sämtlichen konsonanten Intervalle, und nicht nur eines derselben, zu berücksichtigen seien, ins Auge zu fassen. Wir fangen auch hier mit der extremen Annahme an, daß die sämtlichen Konsonanzen einander ebenbürtig und die Gewichte ihrer Verfälschungen gleich seien, also

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}.$$

Für die Richtigkeit dieser Annahme kann man sich auf eine sehr gewichtige Autorität, nämlich Helmholtz, berufen, der an einer Stelle seines berühmten Werkes sagt, daß zwar die verschiedenen Konsonantenintervalle, der allgemein verbreiteten Meinung der Musiker gemäß, verschiedene Empfindlichkeit besitzen mögen, aber nur in der Melodie; in der Harmonie hingegen, d. h. im Akkorde seien sie alle gleich empfindlich. Es genügt dies, denn die Empfindlichkeit im Akkorde ist offenbar die größte, mithin hier maßgebende.

Die Gleichung (38) liefert dieser Annahme entsprechend einen Wert von $\varkappa$, nämlich

$$\varkappa = 0.002975227 = \frac{1}{336}$$

und
$$q = 1 - \varkappa = 0.9970248,$$
$$\log q = 0.9987050 - 1,$$
$$\log q = -0.0012941.$$

Die diesem Werte von $q$ entsprechenden Werte der übrigen Temperaturen $T$, $t$ und $s$, berechnet aus den Gleichungen (22), sind:

$$(42)\quad q = 1 - \frac{1}{336}\quad T = 1 + \frac{1}{2012},\quad t = 1 - \frac{1}{288},\quad s = 1 - \frac{1}{2007}.$$

Hier liegen also drei wenig voneinander verschiedene Tonsysteme (41) und (42) vor: das der reinen Großterz und der reinen Septime und das System der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle, welches zwischen den beiden ersteren beinahe in der Mitte liegt. Untersuchen wir auch hier, ob nicht vielleicht eines dieser Tonsysteme durch eine sehr kleine Änderung seiner Temperaturen zu einem geschlossenen umgestaltet werden kann; das wird möglich sein, wenn es eine temperierte Quinte $\mathfrak{Q}_m$ gibt, welche dem Grundtone $\mathfrak{Q}_0$ sehr nahe gleich ist, wo man dann ein geschlossenes $m$stufiges System erhalten wird.

Es ist nun:
$$\mathfrak{Q}_m = \frac{3^m}{2^{m+x}} q^m \mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{z},$$

daher, $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_m$ gesetzt,
$$\frac{3^m}{2^{m+x}} q^m = 1, \quad \frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}},$$

also
$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Man hat aber in den 3 oberwähnten Fällen

| | $T = 1$ | $\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}$ | $s = 1$ |
|---|---|---|---|
| $\log 3 =$ | 0.4771213, | 0.4771213, | 0.4771213, |
| $\log q =$ | $-$ 0.0013488, | $-$ 0.0012941, | $-$ 0.0012725, |
| $\log 3 + \log q =$ | 0.4757725, | 0.4758272, | 0.4758488. |

Dividieren wir jetzt die letzten 3 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ und bringen die Quotienten in die Kettenbruchform, so ergeben sich die folgenden 3 Werte von $\frac{x}{m}$:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\frac{15225}{103000}}}}}}},\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1732}{96436}}}}}}},\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{8428}{93844}}}}}}}$$

Sie unterscheiden sich nur in den Ergänzungsbrüchen, die beziehentlich nahe $-\frac{1}{7}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{11}$ sind, mithin alle klein genug, um weggelassen werden zu können.

Alle drei Werte von $\frac{x}{m}$ gehen dann in den Näherungsbruch

$$\frac{x}{m} = \frac{18}{31}$$

über.

Es wird wohl kaum einen Musiker geben, der sich mit den Grundsätzen, nach welchen wir bisher Tonsysteme gebildet und dem Leser vorgeführt haben, vollständig einverstanden erklären könnte, selbst wenn er der Erfinder eines derselben wäre. Petzval meint, daß sich z. B. Opelt zum Grundsatze der unverfälschten Reinheit der kleinen Terzen schwerlich bekannt hätte, wiewohl sein Tonsystem nach diesen Grundsätzen aufgebaut ist. Ebenso sei es zu bezweifeln, daß Koch dem Grundsatze der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle unbedingt beigepflichtet hätte, wiewohl er denselben tatsächlich in seinem Tonsystem niedergelegt hat. Selbst der alte Pythagoras wäre, wenn er noch lebte, gewiß kein Quintenpuritaner mehr. Die am allgemeinsten in der musikalischen Welt verbreitete Meinung dürfte vielmehr die sein, daß die Konsonanzen verschiedenen Ranges seien, und daß eine und dieselbe Verfälschung, angebracht an der Quinte, vom Gehör weit übler empfunden werde, als an der Terz und Septime.

Da man aber über die genauen numerischen Werte der Gewichte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ der Verfälschungen keine verläßlichen Angaben hat, so scheinen auch zu einer endgültigen Lösung des Problems des allerbesten Tonsystems die genügenden Daten nicht vorzuliegen.

Wir suchen nun endlich auch dieser verbreitetsten Meinung des zahlreichen musikalischen Publikums gerecht zu werden: daß nämlich die konsonanten Intervalle weder ausschließlich zu bevorzugen, noch als gleichberechtigt aufzufassen seien, sondern daß unter ihnen eine Rangordnung bestehe, kraft welcher sie in die folgende Ordnung zu stellen sind:

Quinte, Großterz, Kleinterz, Septime.

In Ermangelung sicherer Daten stellen wir, um das ganze Feld der bezüglichen Tonsysteme zu überblicken, zwei Annahmen auf, nämlich:

1) Die extreme Annahme, daß die Quinte an Rang und Gewicht allen übrigen Konsonanzen sehr weit, etwa im Verhältnis 5 : 1, überlegen sei, die übrigen aber untereinander gleichberechtigt, sodaß man

$$\mathfrak{q} = 5, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s} = 1$$

anzunehmen hat.

2) Die gemäßigtere Annahme, die zwischen dieser extremen und der Gleichberechtigung der Intervalle in der Mitte liegt, der Quinte etwa nur die Hälfte des obengenannten Übergewichtes über die große Terz zugesteht, dagegen aber auch die übrigen Intervalle gegen einander mäßig abstuft, so etwa, daß man

$$\mathfrak{q} = 12, \quad \mathfrak{T} = 5, \quad \mathfrak{t} = 3, \quad \mathfrak{s} = 2$$

setzt. Führt man diese beiden Systeme von Werten für die Gewichte der Verfälschungen in die Formel (38) ein, so erhält man die folgenden zwei Werte der Verfälschungen $\varkappa$ und der Temperaturen $q$ der Quinte:

$$\varkappa = 0.00251813 = \frac{1}{397}, \quad q = 0.99748187, \quad \log q = -0.0010954,$$

$$\varkappa = 0.00266692 = \frac{1}{375}, \quad q = 0.99733308, \quad \log q = -0.0011598.$$

Untersuchen wir hier sogleich, ob mit geringer Änderung dieser für $q$ gewonnenen Zahlen nicht eines der gesuchten Tonsysteme oder auch beide zur Rückkehr in sich selbst zu bringen seien. Hierzu dient dieselbe Gleichung, die wir auch bei den Systemen von Opelt in Anwendung setzten:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1,$$

und die in ganzen Zahlen für $x$ und $m$ annäherungsweise aufzulösen ist. Man hat zu diesem Zwecke

$$\begin{array}{rrr} \log 3 = & 0.4771213 & 0.4771213 \\ \log q = & -0.0010954 & -0.0011598 \\ \log 3 + \log q = & 0.4760259 & 0.4759615. \end{array}$$

Dividieren wir jetzt die erhaltenen 2 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ in Kettenbruchform, so erhalten wir folgende 2 Werte von $\frac{x}{m}$

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{9263}{72592}}}}}}} \qquad = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6410}{36955}}}}}}}}$$

Von diesen zwei Kettenbrüchen gibt der erste, wenn man den etwa $-\frac{1}{8}$ großen Ergänzungsbruch außer Acht läßt

$$\frac{x}{m} = \frac{25}{43}, \text{ mithin } x = 25, \; m = 43,$$

welchen Zahlen ein geschlossenes 43stufiges System in geometrischer Progression stehender Töne entspricht, und zwar mit dem Faktor $\sqrt[43]{2} = 1.016250$.

Den korrigierten Wert entnimmt man auch hier der Gleichung

$$\log q = \frac{m+x}{m} \log 2 - \log 3$$
$$= \frac{68}{43} \cdot 0.3010300 - 0.4771213$$
$$= 0.99892614 - 1 = -6.00107386,$$

mithin

$$q = 0.9975303 = -1 - \frac{1}{405} = \frac{404}{405}.$$

Hiezu gehören die aus den Fundamentalgleichungen (22) gezogenen Werte der übrigen Temperaturen

$$\text{(43a)} \quad \begin{gathered} T = 1.002535 = 1 + \frac{1}{394}, \quad t = 0.995008 = 1 - \frac{1}{200}, \\ s = 1.004583 = 1 + \frac{1}{218}. \end{gathered}$$

Der zweite Kettenbruch zieht sich mehr in die Länge, bis er eine Stelle bietet, an der er mit Vorteil abgebrochen werden kann und nach Weglassung des allerdings nicht sehr kleinen Ergänzungsbruches $\frac{6410}{36955} = \frac{1}{6}$ beiläufig einen Wert von $\frac{x}{m} = \frac{43}{74}$ liefert.

Man begegnet hier also einem Tonsystem von etwas übermäßiger Stufenanzahl.

Da bisher nur Beispiele geschlossener, in sich zurückkehrender Tonsysteme vorgekommen sind, mithin gar keine Gelegenheit geboten war, auch die Behandlungsweise unendlicher Tonsysteme zu zeigen, so wird es zweckmäßig sein, die sich hier darbietende Veranlassung zu benützen und das letztgenannte System mit dem langen Kettenbruche als unendliches Tonsystem aufzufassen. Demgemäß lassen wir seine Quintentemperatur unkorrigiert, und berechnen daraus mit Hilfe der Gleichung (22) die Temperaturen der übrigen Intervalle:

$$\text{(43b)} \quad \begin{gathered} T = 1.001742 = 1 + \frac{1}{574}, \quad t = 0.9955988 = 1 - \frac{1}{227}, \\ s = 1.0025972 = 1 + \frac{1}{385}. \end{gathered}$$

Dies wären also die zwei, nur beispielsweise angeführten, der Voraussetzung ungleichberechtigter konsonanten Intervalle entsprechenden Tonsysteme in ihren Grundzügen und Eigenschaften.

Da indessen schon die 31 Töne des Kochschen Systems eine zu große Anzahl bildeten, und für die Verwendung eine Auswahl von

19 derselben mit Hinweglassung der übrigen notwendig schien, so werden hier umsomehr die 43 oder gar die unendlich vielen Töne zu einer Auswahl von einer kleineren Zahl (nehmen wir wieder 19 an) nötigen

Um dieselben also zunächst aus dem 43stufigen System auszuwählen, benützt man abermals die ununterbrochene Quintenreihe von $\mathfrak{Q}_{-7}$ bis $\mathfrak{Q}_{11}$, oder von *ces* bis *eis*, und stellt darüber auf dieselbe Weise, wie beim 31stufigen System 18 Tonarten her; hiebei ist es aber unerläßlich, alle Schwingungszahlen der 43 Töne als Glieder einer geometrischen Progression mit dem Faktor $\sqrt[43]{2}$ zu berechnen. In der folgenden Zusammenstellung sind die berechneten Bestandtöne des 43stufigen Tonsystems in aufsteigender Ordnung mit ihren mathematischen und musikalischen Benennungen enthalten, wobei die ausgewählten 19 Töne durch wagrechte Striche gekennzeichnet sind. (Siehe S. 369 f.)

Es wäre jetzt nur noch zu zeigen, auf welche Weise aus einem unendlichen Tonsysteme, das in sich entweder gar nicht, oder erst nach einer sehr großen Anzahl von Gliedern zurückkehrt, eine mäßige Zahl von Tönen zum musikalischen Gebrauche herausgehoben und in die benötigten Tonarten zusammengestellt werden kann, und wie man sich von letzteren vermittels einer Tabelle eine klare Übersicht zu verschaffen vermag.

Das unendliche Tonsystem sei das letzte der als Beispiel angeführten mit der Quintentemperatur

$$q = 0.99733308 = 1 - \tfrac{1}{375}, \quad \log q = -0.0011598,$$

und den durch die Gleichungen (43b) gegebenen Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle. Man wählt diejenigen Töne, deren man zu benötigen glaubt; dies müssen jedoch ununterbrochen zusammenhängende Quinten aus der Quintenreihe sein, etwa:

| $\mathfrak{Q}_{-7}$ | $\mathfrak{Q}_{-6}$ | $\mathfrak{Q}_{-5}$ | $\mathfrak{Q}_{-4}$ | $\mathfrak{Q}_{-3}$ | $\mathfrak{Q}_{-2}$ | $\mathfrak{Q}_{-1}$ | $\mathfrak{Q}_{0}$ | $\mathfrak{Q}_{1}$ | $\mathfrak{Q}_{2}$ | $\mathfrak{Q}_{3}$ | $\mathfrak{Q}_{4}$ | $\mathfrak{Q}_{5}$ | $\mathfrak{Q}_{6}$ | $\mathfrak{Q}_{7}$ | $\mathfrak{Q}_{8}$ | $\mathfrak{Q}_{9}$ | $\mathfrak{Q}_{10}$ | $\mathfrak{Q}_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ces* | *Ges* | *Des* | *As* | *Es* | *B* | *F* | *C* | *G* | *D* | *A* | *E* | *H* | *Fis* | *Cis* | *Gis* | *Dis* | *Ais* | *Eis*, |

weil, wenn man die Reihe unterbricht, man sogleich Töne und Tonarten hat, zu denen die Verwandten fehlen. Von diesen Tönen nun und ihren höheren ersten Oktaven berechnet man die Logarithmen der Schwingungsverhältnisse, ebenso von den Tönen die Schwingungsverhältnisse selbst; die ihrer Oktaven sind zwar leicht zu haben durch Multiplikation mit 2, werden aber nicht benötigt. Setzt man der Kürze wegen, um nur mit den Schwingungsverhältnissen zu tun zu haben, die Schwingungszahl $\mathfrak{z}$ des Grundtones $\mathfrak{Q}_0 = 1$, so ist die der nächsten Quinte:

$$\mathfrak{Q}_1 = \tfrac{3}{2} q, \quad \log \mathfrak{Q}_1 = \log 3 - \log 2 + \log q = 0.1749315, \quad \mathfrak{Q}_1 = 1 \cdot 49600.$$

**43 stufiges Tonsystem I. Klasse.**

| *C* | $\mathfrak{Q}_0$ | $\zeta$ | $=$ $\zeta$ | $=$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Des^2$ | $\mathfrak{Q}_{-12}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^1}$ | $= 1{\cdot}01625\,\zeta$ | $= \frac{62}{61}\zeta$ | angenähert |
| $His^2$ | $\mathfrak{Q}_{19}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^2}$ | $= 1{\cdot}03277\,\zeta$ | $= \frac{63}{61}\zeta$ | " |
| *Cis* | $\mathfrak{Q}_7$ | $\zeta\sqrt[43]{2^3}$ | $= 1{\cdot}04955\,\zeta$ | $= \frac{21}{20}\zeta$ | " |
| *Des* | $\mathfrak{Q}_{-5}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^4}$ | $= 1{\cdot}06660\,\zeta$ | $= \frac{16}{15}\zeta$ | " |
| $Es^3$ | $\mathfrak{Q}_{-17}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^5}$ | $= 1{\cdot}08394\,\zeta$ | $= \frac{13}{12}\zeta$ | " |
| $Cis^2$ | $\mathfrak{Q}_{14}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^6}$ | $= 1{\cdot}10155\,\zeta$ | $= \frac{11}{10}\zeta$ | " |
| *D* | $\mathfrak{Q}_2$ | $\zeta\sqrt[43]{2^7}$ | $= 1{\cdot}11945\,\zeta$ | $= \frac{28}{25}\zeta$ | " |
| $Es^2$ | $\mathfrak{Q}_{-10}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^8}$ | $= 1{\cdot}13764\,\zeta$ | $= \frac{8}{7}$ oder $\frac{33}{29}\zeta$ | " |
| $Cis^3$ | $\mathfrak{Q}_{21}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^9}$ | $= 1{\cdot}15610\,\zeta$ | $= Fes^3 = \frac{37}{32}\zeta$ | " |
| *Dis* | $\mathfrak{Q}_9$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{10}}$ | $= 1{\cdot}17492\,\zeta$ | $= \frac{7}{6}$ oder $\frac{27}{23}\zeta$ | " |
| *Es* | $\mathfrak{Q}_{-3}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{11}}$ | $= 1{\cdot}19401\,\zeta$ | $= \frac{6}{5}$ " $\frac{37}{31}\zeta$ | " |
| $Fes^2$ | $\mathfrak{Q}_{-15}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{12}}$ | $= 1{\cdot}21341\,\zeta$ | $= \frac{17}{14}\zeta$ | " |
| $Dis^2$ | $\mathfrak{Q}_{16}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{13}}$ | $= 1{\cdot}23313\,\zeta$ | $= \frac{16}{13}\zeta$ | " |
| *E* | $\mathfrak{Q}_4$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{14}}$ | $= 1{\cdot}25314\,\zeta$ | $= \frac{5}{4}$ oder $\frac{99}{97}\zeta$ | " |
| *Fes* | $\mathfrak{Q}_{-8}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{15}}$ | $= 1{\cdot}27353\,\zeta$ | $= \frac{14}{11}\zeta$ | " |
| $Dis^3$ | $\mathfrak{Q}_{-20}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{16}}$ | $= 1{\cdot}29420\,\zeta$ | $= Ges^3 = \frac{22}{17}\zeta$ | " |
| *Eis* | $\mathfrak{Q}_{11}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{17}}$ | $= 1{\cdot}31526\,\zeta$ | $= \frac{25}{19}\zeta$ | " |
| *F* | $\mathfrak{Q}_{-1}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{18}}$ | $= 1{\cdot}33663\,\zeta$ | $= \frac{4}{3}\zeta$ | " |
| $Ges^2$ | $\mathfrak{Q}_{-13}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{19}}$ | $= 1{\cdot}35835\,\zeta$ | $= \frac{19}{14}\zeta$ | " |
| $Eis^2$ | $\mathfrak{Q}_{18}$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{20}}$ | $= 1{\cdot}38043\,\zeta$ | $= \frac{29}{21}\zeta$ | " |
| *Fis* | $\mathfrak{Q}_6$ | $\zeta\sqrt[43]{2^{21}}$ | $= 1{\cdot}40286\,\zeta$ | $= \frac{7}{5}\zeta$ | " |

| C | $Q_0$ | $\zeta$ | $= \qquad \zeta$ | $=$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ges* | $Q_{-6}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{22}}$ | $= 1{\cdot}42566\,\zeta$ | $= \frac{10}{7}\,\zeta$ | angenähert |
| *Eis*³ | $Q_{-18}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{23}}$ | $= 1{\cdot}44883\,\zeta$ | $=$ *As*³ $= \frac{42}{29}\,\zeta$ | „ |
| *Fis*² | $Q_{13}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{24}}$ | $= 1{\cdot}47237\,\zeta$ | $= \frac{25}{17}\,\zeta$ | „ |
| *G* | $Q_1$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{25}}$ | $= 1{\cdot}49630\,\zeta$ | $= \frac{3}{2}\,\zeta$ | „ |
| *As*² | $Q_{-11}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{26}}$ | $= 1{\cdot}52061\,\zeta$ | $= \frac{38}{25}\,\zeta$ | „ |
| *Fis*³ | $Q_{20}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{27}}$ | $= 1{\cdot}54532\,\zeta$ | $= \frac{17}{11}\,\zeta$ | „ |
| *Gis* | $Q_8$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{28}}$ | $= 1{\cdot}57054\,\zeta$ | $= \frac{11}{7}\,\zeta$ | „ |
| *As* | $Q_{-4}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{29}}$ | $= 1{\cdot}59595\,\zeta$ | $= \frac{8}{5}\,\zeta$ | „ |
| *Bes*² | $Q_{-16}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{30}}$ | $= 1{\cdot}62189\,\zeta$ | $= \frac{13}{8}\,\zeta$ | „ |
| *Gis*² | $Q_{15}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{31}}$ | $= 1{\cdot}64824\,\zeta$ | $= \frac{28}{17}\,\zeta$ | „ |
| *A* | $Q_3$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{32}}$ | $= 1{\cdot}67503\,\zeta$ | $= \frac{5}{3}\,\zeta$ | „ |
| *Bes* | $Q_{-9}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{33}}$ | $= 1{\cdot}70225\,\zeta$ | $= \frac{17}{10}\,\zeta$ | „ |
| *Gis*³ | $Q_{-21}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{34}}$ | $= 1{\cdot}72991\,\zeta$ | $=$ *Ces*³ $= \frac{26}{15}\,\zeta$ | „ |
| *Ais* | $Q_{10}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{35}}$ | $= 1{\cdot}75802\,\zeta$ | $= \frac{7}{4}\,\zeta$ | „ |
| *B* | $Q_{-2}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{36}}$ | $= 1{\cdot}78659\,\zeta$ | $= \frac{25}{14}\,\zeta$ | „ |
| *Ces*² | $Q_{-14}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{37}}$ | $= 1{\cdot}81562\,\zeta$ | $= \frac{20}{11}\,\zeta$ | „ |
| *Ais*² | $Q_{17}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{38}}$ | $= 1{\cdot}84513\,\zeta$ | $= \frac{24}{13}\,\zeta$ | „ |
| *H* | $Q_5$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{39}}$ | $= 1{\cdot}87511\,\zeta$ | $= \frac{15}{8}\,\zeta$ | „ |
| *Ces* | $Q_{-7}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{40}}$ | $= 1{\cdot}90558\,\zeta$ | $= \frac{21}{11}\,\zeta$ | „ |
| *Ais*³ | $Q_{-19}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{41}}$ | $= 1{\cdot}93655\,\zeta$ | $=$ *Des*³ $= \frac{31}{16}\,\zeta$ | „ |
| [illegible] | $Q_{12}$ | $\zeta \sqrt[43]{2^{42}}$ | $= 1{\cdot}96802\,\zeta$ | $= \frac{61}{31}\,\zeta$ | „ |
| . | $Q_0$ | $\zeta \cdot 2$ | $= 2{\cdot}00000\,\zeta$ | | |

Die erste höhere Oktave eines jeden $Q$ wollen wir mit $Q^2$ bezeichnen; ihr Logarithmus wird durch Addition von $\log 2$ zu $\log Q$ erhalten, daher

$$\log Q_1^2 = 0.4759615.$$

Die Logarithmen der übrigen aufsteigenden Quinten $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, ... erhält man nun, wenn man immer fort die Zahl 0.1749315 addiert. Trifft es sich hierbei, daß man eine Summe erhält, die größer als $\log 2$, so ist diese nicht der Logarithmus der gesuchten Quinte, sondern der ihrer Oktave und man hat den $\log 2$ abzuziehen. Hier folgt die ganze Rechnung:

$$\begin{array}{lll}
\log Q_1 & = 0.1749315 & Q_1 = 1.49600 = G \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_2^2 & = 0.3498630 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_2 & = 0.0488330 & Q_2 = 1.11901 = D \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_3 & = 0.2237645 & Q_3 = 1.67404 = A \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_4^2 & = 0.3986960 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_4 & = 0.0976660 & Q_4 = 1.25218 = E \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_5 & = 0.2725975 & Q_5 = 1.87326 = H \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_6^2 & = 0.4475290 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_6 & = 0.1464990 & Q_6 = 1.40120 = Fis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_7^2 & = 0.3214305 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_7 & = 0.0204005 & Q_7 = 1.04810 = Cis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_8 & = 0.1953320 & Q_8 = 1.56795 = Gis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_9^2 & = 0.3702635 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_9 & = 0.0692335 & Q_9 = 1.17283 = Dis \\
 & + \underline{0.1749315} &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\log Q_{10} &= 0.2441650 \qquad Q_{10} = 1.75455 = \mathit{Ais}\\
&\quad + \underline{0.1749315}\\
\log Q_{11}^2 &= 0.4190965\\
&\quad - \underline{0.3010300}\\
\log Q_{11} &= 0.1180665 \qquad Q_{11} = 1.31240 = \mathit{Eis}.
\end{aligned}$$

Jetzt gehen wir an die Berechnung der absteigenden Quinten, oder der Reihe der Quarten. Hier gilt das entgegengesetzte Verfahren:

Die Zahl 0.1749315 wird immer subtrahiert und der log 2 fallweise addiert. Die Rechnung stellt sich folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0.3010300\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-1} &= 0.1260985 \qquad Q_{-1} = 1.33690 = F\\
&\quad + \underline{0.3010300}\\
&\quad\;\; 0.4271285\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-2} &= 0.2521970 \qquad Q_{-2} = 1.78730 = B\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-3} &= 0.0772655 \qquad Q_{-3} = 1.19472 = \mathit{Es}\\
&\quad + \underline{0.3010300}\\
&\quad\;\; 0.3782955\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-4} &= 0.2033640 \qquad Q_{-4} = 1.59722 = \mathit{As}\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-5} &= 0.0284325 \qquad Q_{-5} = 1.06766 = \mathit{Des}\\
&\quad + \underline{0.3010300}\\
&\quad\;\; 0.3294625\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-6} &= 0.1545310 \qquad Q_{-6} = 1.42735 = \mathit{Ges}\\
&\quad + \underline{0.3010300}\\
&\quad\;\; 0.4555610\\
&\quad - \underline{0.1749315}\\
\log Q_{-7} &= 0.2806295 \qquad Q_{-7} = 1.90822 = \mathit{Ces}.
\end{aligned}$$

Nachdem so die Schwingungsverhältnisse aller benötigten Töne berechnet sind, ordnet man sie sowohl, wie auch ihre Logarithmen aufsteigend nach ihren numerischen Werten und nimmt namentlich in das Verzeichnis der Logarithmen auch die Oktaven, wenn nicht alle, so doch mindestens einige auf.

Hier sind die so geordneten Zahlen, die Schwingungsverhältnisse in der ersten, die Logarithmen in der zweiten Spalte:

| | Schwingungs-Verhältnis | Grundton *C* 1. Log. | Grundton *Cis* 2. Log. | Schwingungs-Verhältnis | Grundton *Des* 3. Log. | Schwingungs-Verhältnis | Grundton *Eis* 4. Log. | Schwingungs-Verhältnis | Grundton *Ges* 5. Log. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | 1·00000 | 0· | | | | | | | |
| *Cis* | 1·04810 | 0·0204005 | 0· | | | | | | |
| *Des* | 1·06766 | 0·0284325 | 0·0080320 | 1·01867 | 0· | | | | |
| *D* | 1·11901 | 0·0488330 | 0·0284325 | 1·06766 | 0·0204005 | 1·04810 | | | |
| *Dis* | 1·17283 | 0·0692335 | $= D_1$ | | 0·0408010 | 1·09850 | | | |
| *Es* | 1·19472 | 0·0772655 | 0·0568650 | 1·13990 | $= D_1$ | | | | |
| *E* | 1·25218 | 0·0976660 | $= Es_1$ | | $= Dis_1$ | | | | |
| *Eis* | 1·31240 | 0·1180665 | $= E_1$ | | 0·0896340 | 1·22923 | 0· | | |
| *F* | 1·33690 | 0·1260985 | 0·1056980 | 1·27555 | $= E_1$ | | $= Des_2$ | | |
| *Fis* | 1·40120 | 0·1464990 | $= F_1$ | | $= Eis_1$ | | $= Des_1$ | | |
| *Ges* | 1·42735 | 0·1545310 | 0·1341305 | 1·36185 | $= F_1$ | | 0·0364645 | 1·08759 | 0· |
| *G* | 1·49600 | 0·1749315 | $= Ges_1$ | | $= Fis_1$ | | $= Es_2$ | | $= Cis_1$ |
| *Gis* | 1·56795 | 0·1953320 | $= G_1$ | | 0·1668995 | 1·46859 | $= Es_1$ | | $= Dis_2$ |
| *As* | 1·59722 | 0·2033640 | 0·1829635 | 1·52393 | $= G_1$ | | 0·0852970 | 1·21702 | $= D_1$ |
| *A* | 1·67404 | 0·2237645 | $= As_1$ | | $= Gis_1$ | | $= F_2$ | | $= Dis_1$ |
| *Ais* | 1·75455 | 0·2441650 | $= A_1$ | | 0·2157325 | 1·64336 | $= F_1$ | | $= Eis_2$ |
| *B* | 1·78730 | 0·2521970 | 0·2317965 | 1·70528 | $= A_1$ | . | $= Ges_2$ | | $= E_1$ |
| *H* | 1·87326 | 0·2725975 | $= B_1$ | | $= Ais_1$ | . | $= Ges_1$ | | $= Eis_1$ |
| *Ces* | 1·90822 | 0·2806295 | 0·2602290 | 1·82066 | $= B_1$ | . | 0·1625630 | 1·45400 | $= F_1$ |
| *C* | 2· | 0·3010300 | $= Ces_1$ | . | $= H_1$ | | $= As_2$ | . | $= Fis_1$ |
| *Cis* | . | 0·3214305 | $= C_1$ | . | 0·2929980 | 1·96335 | $= As_1$ | | $= Gis_2$ |
| *Des* | . | 0·3294625 | . | . | $= C_1$ | . | 0·2113960 | 1·62703 | $= G_1$ |
| *D* | . | 0·3498630 | . | . | . | . | $= B_2$ | . | $= Gis_1$ |
| *Dis* | . | 0·3702635 | . | . | . | . | $= B_1$ | | $= Ais_2$ |
| *Es* | . | 0·3782955 | . | . | . | . | $= Ces_2$ | . | $= A_1$ |
| *E* | . | 0·3986960 | . | . | . | . | $= Ces_1$ | . | $= Ais_1$ |
| *Eis* | . | 0·4190965 | . | . | . | . | $= C_1$ | . | 0·2645655 |
| *F* | . | 0·4271285 | . | . | . | . | . | . | $= H_1$ |
| *Fis* | . | 0·4475290 | . | . | . | . | . | . | $= Cis_2$ |
| *Ges* | . | 0·4555610 | . | . | . | . | . | . | $= C_1$ |

### V. Tonsysteme der zweiten Klasse.

Wie schon im dritten Abschnitte nachgewiesen wurde, und wie dies auch aus der am Schlusse beigefügten Quinten- und Quartentabelle hervorgeht, befinden sich in der Nähe des Grundtones $C = \mathfrak{Q}_0$ nur 2 Gruppen von Tönen, deren Schwingungszahlen denen der reinen großen und kleinen Terz und Septime, nämlich

$$(44) \qquad \tfrac{5}{4}\zeta = 1\cdot 25\,\zeta, \quad \tfrac{6}{5}\zeta = 1\cdot 2\,\zeta, \quad \tfrac{7}{4}\zeta = 1\cdot 75\,\zeta$$

einigermaßen ähnlich sind, und zwar zunächst die Töne

$$\mathfrak{Q}_4 = E = 1\cdot 2656\,\zeta,\ \mathfrak{Q}_{-3} = Es = 1\cdot 1852\,\zeta,\ \mathfrak{Q}_{10} = Ais = 1\cdot 8020\,\zeta.$$

Sie geben, wenn zur Rolle der eben genannten Konsonanzen berufen, die Tonsysteme der ersten Klasse, von welchen der vierte Abschnitt ausführlich handelt. Dann gibt es aber noch in etwas größerer, nahe der doppelten Entfernung vom Grundtone $C$, eine Gruppe von Tönen, die mit ihren Schwingungszahlen den genannten reinen Verhältnissen ungleich näher kommen, und aus dieser doppelten Ursache, nämlich sowohl wegen der größeren Entfernung vom Grundtone, als auch wegen der genaueren Kongruenz mit den reinen Intervallen, Tonsysteme von besonderem Wohlklange und besonderer Reinheit versprechen.

Diese sind:

$$\mathfrak{Q}_{-8} = Fes = 1\cdot 24859\,\zeta,\ \mathfrak{Q}_9 = Dis = 1\cdot 201355\,\zeta,\ \mathfrak{Q}_{-14} = Ceses = 1\cdot 75385\,\zeta.$$

Ihnen schließt sich noch $\mathfrak{Q}_{10} = Ais = 1\cdot 802\,\zeta$ an als ein Ton, der zwar keine Konsonanz, aber doch wegen seiner nahen Verwandtschaft mit $\frac{9}{5}\zeta$ sehr geeignet erscheint, die Vertretung einer rauheren Septime zu übernehmen. Ihnen wollen wir also jetzt die Rolle der großen und kleinen Terz, der konsonanten *und rauheren Septime* übertragen und die Eigenschaften der dieser Annahme entspringenden Tonsysteme erforschen.

Wir temperieren zu diesem Zwecke die Quinten *Fes*, *Dis* und *Ceses* und erhalten die folgenden Schwingungszahlen dieser temperierten Töne:

$$Q_{-8} = Fes = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}\,\zeta = 1.24859\,\frac{\zeta}{q^8}$$

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9}{2^{14}}\,q^9\zeta = 1\cdot 201355\,q^9\,\zeta$$

$$Q_{-14} = Ceses = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}}\,\zeta = 1\cdot 75385\,\frac{\zeta}{q^{14}}.$$

Sie sollen vermöge der ihnen zu Teil gewordenen Temperatur genau zusammenfallen mit den ebenfalls temperiert gedachten Reintönen (18), d. h. beziehentlich mit

$$T_0 = \frac{5}{4} T \zeta \quad t_0 = \frac{6}{5} t \zeta \quad s_0 = \frac{7}{4} s \zeta.$$

Es bestehen mithin zwischen den Temperaturen der Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime $q$, $T$, $t$, und $s$ die folgenden Gleichungen:

$$\frac{5}{4} T = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}, \quad \frac{6}{5} t = \frac{3^9}{2^{14}} q^9, \quad \frac{7}{4} s = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}} \text{ also}$$

$$(45) \qquad T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8} \quad t = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} q^9 \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} q^{14}}.$$

Aus ihnen folgt unmittelbar

$$Tt = q.$$

Also gilt auch bei den Tonsystemen der zweiten Klasse dasselbe allgemeine Gesetz, wie bei den Tonsystemen der ersten Klasse, daß nämlich die Temperaturen der beiden Terzen sich zur Temperatur der Quinte in dem früheren Sinne ergänzen. Der Grund ist der bereits im vierten Abschnitte hervorgehobene. Es sind nämlich die beiden Terzen die eine der Quarten-, die andere der Quintenreihe entnommen, und die Summe ihrer Stellenzeiger ist $9 - 8 = 1$. Die Gleichungen (45) bestimmen $T$, $t$ und $s$ in Funktion von $q$, und überlassen diese letztere der freien Wahl, so jedoch, daß weder $q$ noch $T$, $t$ und $s$ sich beträchtlich von der Einheit entfernen darf. Dieser letzteren Bedingung zu entsprechen, ist es aber nicht notwendig wie in der ersten Klasse der Tonsysteme, daß $q < 1$ sei, es gibt vielmehr die Annahme $q = 1$ schon ganz annehmbare $T$, $t$, und $s$, nämlich:

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8} = \frac{32\,768}{32\,805} = 1 - \frac{37}{32\,805} = 1 - \frac{1}{886} \text{ nahezu,}$$

$$t = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} = \frac{32\,805}{32\,768} = 1 + \frac{37}{32\,768} = 1 + \frac{1}{885} \quad \text{"}$$

$$s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}} = \frac{33\,554\,432}{33\,480\,783} = 1 + \frac{73\,649}{33\,480\,783} = 1 + \frac{1}{454} \quad \text{"} .$$

Mit anderen Worten: Die Reihe der reinen Quinten bietet, richtig verwendet, für sich ein ganz zufriedenstellendes Tonsystem, und es muß als auffallend bezeichnet werden, daß dies der Aufmerksamkeit der vielen Quintenpuritaner bis in die neueste Zeit entgangen zu sein scheint, vielleicht weil sie zwar sehnlichst ein neues, reines Tonsystem wünschten, aber an der alten Bezeichnungsweise festhielten.

Da es nun ein gutes Tonsystem zweiter Klasse für $q = 1$ gibt, so wird es deren offenbar auch geben für $q > 1$ und für $q < 1$. Erstere

besitzen reinere Septimen, letztere reinere Terzen, und da die Terzen die wichtigeren konsonanten Intervalle sind, so sieht man, daß auch in der zweiten Klasse sich die Tonsysteme, in welchen die Quintentemperatur kleiner ist als Eins, den Vorrang vor den übrigen erringen werden. Wiewohl hier die Quinten *Fes* und *Dis* die Rollen der großen und kleinen Terz übernehmen, so sind doch die Repräsentanten dieser konsonanten Intervalle in der ersten Klasse, nämlich *E* und *Es* nicht beseitigt. Sie bleiben im Tonsysteme, wenn auch nicht in Eigenschaften von Terzen, so doch wenigstens als Quarten und Quinten, und da die Quintentemperatur $q$ im allgemeinen sehr wenig von Eins verschieden ist, so bleiben *E* und *Fes*, *Es* und *Dis* auch im temperierten Systeme zweiter Klasse Töne mit wenig verschiedenen Schwingungszahlen, so wie sie es in der Reihe der reinen Quinten sind.

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme zweiter Klasse sehr nahe aneinander liegende Töne besitzen werden, die auch durch eine sehr weit getriebene Sparsamkeit mit Tonmitteln und Beschränkung auf eine geringe Zahl von Tönen und Tonarten nicht zu beseitigen sind. Bei vielen musikalischen Instrumenten ist dies gleichgültig, bei Saiteninstrumenten mit eingeteilten Griffbrettern hat es den Nachteil, daß die Bünde zu nahe aneinander rücken, was das Dazwischengreifen erschwert. In diesem und vielleicht noch in anderen Fällen kann mithin die Beschaffenheit des Instrumentes ein Tonsystem zweiter Klasse ausschließen.

Gehen wir jetzt an die Konstruktion der Tonleiter. Aus den drei über den Grundtönen $C = Q_0$, $F = Q_{-1}$, $G = Q_1$ aufgebauten Dreiklängen ist der erste:

$$C + Q_0 = \zeta,\ Fes = Q_{-8} = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}\zeta = 1\cdot 24\,859\,\frac{\zeta}{q^8},\ G = Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta = 1\cdot 5\, q\zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante die Schwingungszahl $\frac{4}{3q}\cdot\zeta$ hat, so gewinnt man den ihr zugehörigen Dreiklang aus dem eben vorliegenden, indem man $\frac{4}{3q}\zeta$ statt $\zeta$ setzt und die Namen ändert:

$$F = Q_{-1} = \frac{4\zeta}{3q} = \frac{1\cdot 3333\zeta}{q},\ Bes = Q_{-9} = \frac{12^{15}}{3^9 q^9}\zeta = \frac{1\cdot 664\,787\,\zeta}{q^9},\ C = Q_0 = 2\zeta.$$

Zur Oberdominante $G$ gehört die Schwingungszahl $\frac{3}{2}q\zeta$, weshalb man ihren Dreiklang aus dem $C$-Dreiklange erhält, wenn man anstatt $\zeta$ die Zahl $\frac{3}{2}q\zeta$ setzt und die Tonnamen in $G$, $Ces$, $D$ umschreibt:

$$G = Q_1 = \frac{3}{2}q\zeta = 1\cdot 5 q\zeta,\ Ces = Q_{-7} = \frac{2^{12}\zeta}{3^7 q^7} = \frac{1\cdot 872\,885\zeta}{q^7},$$
$$D = Q_2 = \frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3} = 1\cdot 125\, q^2\zeta.$$

Will man den Septimenakkord der Oberdominante bilden, so gehört hierzu auch noch ein vierter Ton, der entweder $Geses = Q_{-13}$, oder $Eis = Q_{11}$ sein kann; ihre Schwingungszahlen sind:

$$Geses = Q_{-3} = \frac{2^{21}\xi}{3^{13}q^{13}} = \frac{1 \cdot 315\,387\xi}{q^{13}}, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11}q^{11}\xi}{2^{17}} = 1 \cdot 351\,524 q^{11}\xi.$$

Ferner kommt noch die kleine Terz des Grundtones $C$ in Betracht, die hier *Dis* ist und die Schwingungszahl besitzt:

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \xi}{2^{14}} = 1 \cdot 201\,355 q^9 \xi.$$

Aus diesen Tönen der angeführten Dreiklänge stellt man folgende Durtonleiter zusammen:

| $C$ | $D$ | $Fes$ | $F$ | $G$ | $Bes$ | $Ces$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_0$ | $Q_2$ | $Q_{-8}$ | $Q_{-1}$ | $Q_1$ | $Q_{-9}$ | $Q_{-7}$ | $Q_0$ |
| $\xi$ | $\frac{3^2q^2\xi}{2^3}$ | $\frac{2^{13}\xi}{3^8q^8}$ | $\frac{2^2\xi}{3q}$ | $\frac{3q\xi}{2}$ | $\frac{2^{15}\xi}{3^9q^9}$ | $\frac{2^{12}\xi}{3^7q^7}$ | $2\xi$ |
| $\xi$ | $1 \cdot 125 q^2\xi$ | $1 \cdot 24859 \frac{\xi}{q^8}$ | $1 \cdot 3333 \frac{\xi}{q}$ | $1 \cdot 5 q\xi$ | $1 \cdot 664787 \frac{\xi}{q^9}$ | $1 \cdot 872885 \frac{\xi}{q^7}$ | $2\xi$. |

Die Schwingungszahlen stehen zueinander in folgenden Beziehungen:

$$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{Ces}{Bes} = \frac{3^2}{2^3}q^2$$

$$\frac{Fes}{D} = \frac{Bes}{G} = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}$$

$$\frac{F}{Fes} = \frac{C}{Ces} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7q^7}{2^{11}}.$$

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme der zweiten Klasse zwischen dem großen ganzen Ton *C—D* und kleinen ganzen Ton *D—Fes* im allgemeinen einen Unterschied machen. Diese Ganztöne werden nur dann einander gleich, wenn

$$\frac{3^2}{2^3}q^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}, \; q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}} \text{ ist.}$$

Sonst ist das zwischen ihnen bestehende Intervall:

$$\frac{D}{C} : \frac{Fes}{D} = \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12}.$$

Will man eine allgemeine, in allen möglichen Klassen von Tonsystemen gleichmäßig gültige Definition des großen und kleinen halben Tones aufstellen, so kann dies nur die folgende, der reinen Tonleiter entnommene sein: Der große halbe Ton ist das Intervall zwischen der großen Terz und der Quarte, hier:

$$\frac{F}{Fes} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7q^7}{2^{11}};$$

ebenso: Der kleine Halbton ist das Intervall zwischen der großen und kleinen Terz, hier:

$$\frac{Fes}{Dis} = \frac{2^{27}}{3^{17} q^{17}}.$$

Da solchergestalt die Intervalle *Fes*—*F*, und *D*—*Dis* große Halbtöne sind, so bedeutet die Endsilbe *es*, so oft sie vorkommt, in allen Tonsystemen der zweiten Klasse eine Erniedrigung um einen *großen* Halbton, die Endsilbe *is* hingegen eine Erhöhung um einen solchen. Hier ist es also anders als in der ersten Klasse, wo *es* und *is* Erniedrigung und Erhöhung um einen *kleinen* Halbton andeuten.

Diese beiden Halbtöne setzen sich zu einem kleinen ganzen Ton zusammen wie in der reinen Tonleiter, denn es ist: $\frac{Fes}{Dis} \cdot \frac{F}{Fes} = \frac{2^{16}}{3^{10} q^{10}}$ ein kleiner ganzer Ton. Das Intervall zwischen den beiden Halbtönen

$$\frac{F}{Fes} : \frac{Fes}{Dis} = \frac{3^{24} q^{24}}{2^{38}} = \left[\frac{3^{12} q^{12}}{2^{19}}\right]^2$$

ist zweimal das Intervall zwischen den beiden ganzen Tönen.

Endlich sind noch die beiden Septimen, die sich in der Nähe der Unterdominante *F* befinden, ins Auge zu fassen. Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle bestimmen die Gleichungen:

$$\frac{F}{Geses} = \frac{Eis}{F} = \frac{3^{12} q^{12}}{2^{19}} \text{ und } \frac{Eis}{Geses} = \left[\frac{3^{12} q^{12}}{2^{19}}\right]^2,$$

mithin steht die Unterdominante von den beiden Septimen des Oberdominantakkordes in demselben musikalischen Abstande, wie die beiden ganzen Töne, und es liegen diese zwei Septimen zu verschiedenen Seiten der Unterdominante, die eine höher, die andere um ebensoviel tiefer. Unter sich aber stehen sie in demselben Abstande, wie die beiden Halbtöne. Fällt mithin der große mit dem kleinen ganzen Ton in Eins zusammen, so wird auch der große dem kleinen Halbtone gleich, und die beiden Septimen gehen in der Unterdominante auf, das geschieht nach dem Obigen für:

$$q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}}, \text{ also } q = 0 \cdot 99\,887$$

was die wohlbekannte Quintentemperatur im 12stufigen chromatischen Tonsysteme ist.

Dieses Tonsystem gehört also auch zur zweiten Klasse und zeichnet sich vor allen anderen aus durch die merkwürdige Eigenschaft, beiden Klassen zugleich gewissermaßen als Fundamental-Tonsystem anzugehören.

Es versteht sich von selbst, daß man nicht bloß über dem Grundtone $C = Q_0$, sondern auch über jedem anderen, der temperierten Quintenreihe entnommenen Tone $Q_p$ eine Tonleiter errichten kann. Die

allgemeine Formel für dieselbe geht aus derjenigen für den Grundton $Q_0$ dadurch hervor, daß man sämtliche Stellenzeiger um $p$ Einheiten vermehrt, wodurch erhalten wird:

$$(46) \qquad Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-8} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-9} \quad Q_{p-7} \quad Q_p .$$

Diese Formel unterscheidet sich sehr wesentlich von der für die Tonsysteme der ersten Klasse gültigen, nämlich:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+4} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+3} \quad Q_{p+5} \quad Q_p ,$$

und zwar hauptsächlich durch einen besonderen Umstand, der Erwähnung verdient. Die letztere, d. h. die Tonleiter der ersten Klasse besteht aus zwei Tetrachorden oder Gruppen von 4 Tönen:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+4} \quad Q_{p-1}$$
$$Q_{p+1} \quad Q_{p+3} \quad Q_{p+5} \quad Q_p .$$

die auseinander auf dieselbe Weise abgeleitet werden, wie man auch die aufeinander folgenden Tonarten zu entwickeln pflegt; nämlich durch Erhöhung aller Stellenzeiger um die Einheit.

Die Folge hiervon ist, daß die erste Hälfte jeder Tonleiter mit der letzten Hälfte der nächst vorhergehenden kongruent ist, wie im folgenden Beispiele einiger aufeinander folgender Tonleitern der ersten Klasse deutlich zu ersehen ist:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *A* | *H* | *C* |
| *G* | *A* | *H* | *C* | *D* | *E* | *Fis* | *G* |
| *D* | *E* | *Fis* | *G* | *A* | *H* | *Cis* | *D* usw. |

Dies ist nun in der zweiten Klasse nicht mehr der Fall. Hier läßt sich die Tonleiter nicht mehr in Tetrachorde zerlegen, sowie auch die reine Tonleiter eine Zerlegung dieser Art nicht gestattet.

Der genaueren Orientierung wegen mögen hier die Tonleitern der zweiten Klasse über den Grundtönen

$$Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \cdots$$

ebenso

$$Q_{-1} \quad Q_{-2} \quad Q_{-3} \quad Q_{-4} \quad Q_{-5} \quad Q_{-6} \cdots$$

auch in ihrer musikalischen Bezeichnung angeführt werden:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | *D* | *Fes* | *F* | *G* | *Bes* | *Ces* | *C* |
| *G* | *A* | *Ces* | *C* | *D* | *Fes* | *Ges* | *G* |
| *D* | *E* | *Ges* | *G* | *A* | *Ces* | *Des* | *D* |
| *A* | *H* | *Des* | *D* | *E* | *Ges* | *As* | *A* |
| *E* | *Fis* | *As* | *A* | *H* | *Des* | *Es* | *E* |
| *H* | *Cis* | *Es* | *E* | *Fis* | *As* | *B* | *H* |
| *Fis* | *Gis* | *B* | *H* | *Cis* | *Es* | *F* | *Fis* |
| . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . |

| *F* | *G* | *Bes* | *B* | *C* | *Eses* | *Fes* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *B* | *C* | *Eses* | *Es* | *F* | *Ases* | *Bes* | *B* |
| *Es* | *F* | *Ases* | *As* | *B* | *Deses* | *Eses* | *Es* |
| *As* | *B* | *Deses* | *Des* | *Es* | *Geses* | *Ases* | *As* |
| *Des* | *Es* | *Geses* | *Ges* | *As* | *Ceses* | *Deses* | *Des* |
| *Ges* | *As* | *Ceses* | *Ces* | *Des* | *Feses* | *Geses* | *Ges.* |

Man wird keine Schwierigkeit finden, die Reihe dieser Tonleitern nach beiden Seiten fortzusetzen ins Unbegrenzte. In der vertikalen Richtung bilden die Töne dieser Leitern eine auf- oder absteigende geordnete Reihe von Quinten, die beliebig fortgesetzt werden kann.

Auch isoliert kann jede dieser Tonleitern aus der allgemeinen Formel gebildet werden, zunächst in der mathematischen Bezeichnung, die dann mit Hilfe der Quintentabelle in die musikalische umgesetzt werden kann. Zum Beispiele: Man wünscht die Dur-Tonleiter zweiter Klasse über dem Grundtone $Eis = Q_{11}$, so setzt man in der allgemeinen Formel $p = 11$ und erhält:

$$Q_{11} \quad Q_{13} \quad Q_{3} \quad Q_{10} \quad Q_{12} \quad Q_{2} \quad Q_{4} \quad Q_{11}.$$

Die Quintentabelle lehrt nun, daß dies nach der musikalischen Bezeichnung heiße:

*Eis Fisis A Ais His D E Eis.*

Man kann auch eine allgemeine Formel für die Moll-Tonleitern zweiter Klasse aus den Moll-Dreiklängen des Grundtones und der Oberdominante darstellen und wird zu diesem Ende auf folgende Weise vorgehen. Man bildet vor allem den Moll-Dreiklang des Grundtones $Q = C$. Es ist:

$$Q_0 = C = \zeta, \quad Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}} = 1{\cdot}201355 q^9 \zeta, \; Q_1 = G = \frac{3}{2} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta;$$

hieraus bildet man sodann die Mollakkorde der Unterdominante $F$ und der Oberdominante $G$ durch Einsetzen der ihnen entsprechenden Schwingungszahlen $\frac{4}{3q}\zeta$ und $\frac{3}{2}q\zeta$ anstatt $\zeta$; sie sind:

$$Q_{-1} = F = \frac{4}{3q}\zeta = 1{\cdot}3333 \frac{\zeta}{2}, \; Q_8 = Gis = \frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{12}} = 1{\cdot}601806 q^8 \zeta,$$

$$Q_0 = 2\zeta = C,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{3} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta, \; Q_{10} = Ais = \frac{3^{10} q^{10}}{2^{15}} \zeta = 1{\cdot}802032 q^{10} \zeta,$$

$$Q_2 = D = \frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3} = 1{\cdot}125 q^2 \zeta.$$

Ordnet man endlich die Töne dieser 3 Akkorde nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bekommt man zunächst die Moll-Tonleiter über dem Grundtone $Q_0 = C$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | *D* | *Dis* | *F* | *G* | *Gis* | *Ais* | *C* |
| $Q_0$ | $Q_2$ | $Q_9$ | $Q_{-1}$ | $Q_1$ | $Q_8$ | $Q_{10}$ | $Q_0$ |
| $\zeta$ | $\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta$ | $\frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}}$ | $\frac{2^2\zeta}{3q}$ | $\frac{3}{2}q\zeta$ | $\frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{12}}$ | $\frac{3^{10} q^{10} \zeta}{2^{15}}$ | $2\zeta$ |
| $\zeta$ | $1{\cdot}125 q^2\zeta$ | $1{\cdot}201355 q^9\zeta$ | $1.3333\frac{\zeta}{q}$ | $1{\cdot}5 q\zeta$ | $1{\cdot}601806 q^8\zeta$ | $1{\cdot}802032 q^{10}\zeta$ | $2\zeta$. |

Hieraus folgt die mathematische Formel für die Molltonleiter über dem Grundtone $Q_p$ durch Erhöhung sämtlicher Stellenzeiger um $p$ Einheiten:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+9} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+8} \quad Q_{p+10} \quad Q_{p}.$$

Es wird auch hier, um den Zusammenhang zwischen den Moll- und Dur-Tonarten klarer ersichtlich zu machen, frommen, einige der Mollskalen in der musikalischen Bezeichnung vorzuführen, etwa die über den Grundtönen $Q_0$, $Q_{-1}$, $Q_{-2} \ldots Q_1$, $Q_2 \ldots$ aufgebauten.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *C* | *D* | *Dis* | *F* | *G* | *Gis* | *Ais* | *C* |
| *F* | *G* | *Gis* | *B* | *C* | *Cis* | *Dis* | *F* |
| *B* | *C* | *Cis* | *Es* | *F* | *Fis* | *Gis* | *B* |
| *Es* | *F* | *Fis* | *As* | *B* | *H* | *Cis* | *Es* |
| *As* | *B* | *H* | *Des* | *Es* | *E* | *Fis* | *As* |
| *Des* | *Es* | *E* | *Ges* | *As* | *A* | *H* | *Des* |
| *Ges* | *As* | *A* | *Ces* | *Des* | *D* | *E* | *Ges* |
| *Ces* | *Des* | *D* | *Fes* | *Ges* | *G* | *A* | *Ces* |
| *Fes* | *Ges* | *G* | *Bes* | *Ces* | *C* | *D* | *Fes* |
| *Bes* | *Ces* | *C* | *Eses* | *Fes* | *F* | *G* | *Bes* |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| *G* | *A* | *Ais* | *C* | *D* | *Dis* | *Eis* | *G* |
| *D* | *E* | *Eis* | *G* | *A* | *Ais* | *His* | *D* |
| *A* | *H* | *His* | *D* | *E* | *Eis* | *Tibis* | *A* |
| *E* | *Fis* | *Fisis* | *A* | *H* | *His* | *Cisis* | *E* |
| *H* | *Cis* | *Cisis* | *E* | *Fis* | *Fisis* | *Gisis* | *H* |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

Ihre Betrachtung und der Vergleich mit den eben angeführten Dur-Tonleitern lehrt, daß es in der zweiten Klasse ganz andere Verhältnisse und ganz andere Verwandtschaften der Tonarten gebe, als in der ersten Klasse. So sind z. B. in allen Tonsystemen der ersten Klasse *C*-Dur und *A*-Moll verwandte Tonarten, und die *C*-Durskala

besteht aus genau denselben Tönen, wie die *A*-Molltonleiter. Von dieser Verwandtschaft ist in den Tonsystemen der zweiten Klasse keine Spur mehr zu entdecken. Denn es ist mit Ausnahme von *D* der *C*-Dur nicht ein einziger in der *A*-Moll-Leiter vorhanden; dagegen zeigt sich *C*-Dur mit *Bes*-Moll, und *A*-Moll mit *His*-Dur verwandt, weil die entsprechenden Tonleitern nur je um einen einzigen Ton voneinander verschieden sind. Eine leichte Untersuchung lehrt, daß die folgenden Dur-Tonarten den unmittelbar unten bezeichneten Molltonarten beziehungsweise verwandt sind in derselben Weise, wie *C*-Dur mit *A*-Moll in der ersten Klasse:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... *As* | *Es* | *B* | *F* | *C* | *G* | *D* | *A* | *E* | *H* | *Fis* ... | Dur |
| = ... *Geses* | *Deses* | *Ases* | *Eses* | *Bes* | *Fes* | *Ces* | *Ges* | *Des* | *As* | *Es* ... | Moll. |

Kürzer jedoch und zweckmäßiger drückt man diese Verhältnisse allgemein in der arithmetischen Sprache folgendermaßen aus: In der ersten Klasse der Tonsysteme ist $Q_p$ Dur mit $Q_{p+3}$ Moll verwandt, denn die diesen Tönen entsprechenden Tonleitern:

$$\begin{array}{lllllllll} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & \text{Moll} \end{array}$$

bestehen genau aus denselben Tönen.

In der zweiten Klasse hingegen ist $Q_p$ Dur mit $Q_{p-9}$ Moll verwandt, denn die diesen Tönen angehörigen Leitern nämlich:

$$\begin{array}{lllllllll} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & Q_{p-10} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & \text{Moll} \end{array}$$

weichen bloß in einem Tone, der $Q_{p+2}$ in der Dur- und $Q_{p-10}$ in der Mollskala ist, voneinander ab.

Diese Verschiedenheit in der Verwandtschaft ist aber natürlich nicht die einzige zwischen den Tonsystemen der zwei Klassen bestehende. Diese ist vielmehr eine sehr mannigfache und tiefgreifende, kann jedoch in dieser Abhandlung nicht erschöpfend besprochen werden. Nur soviel mag zur oberflächlichen Orientierung des musikverständigen Lesers hier gesagt sein, daß, wenn er in dem folgenden Schema die ganze Tonsippschaft erster Klasse als nach den Verwandtschaftsgraden gruppiert erkennt

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ... *G* | *D* | *A* | *E* | *H* | *Fis* | *Cis* |
| ... *Es* | *B* | *F* | *C* | *G* | *D* | *A* | *E* |
| | ... *Ges* | *Des* | *As* | *Es* | *B* | *F* | *C*, |

das ähnliche Schema in der zweiten Klasse folgendermaßen aussieht:

| | *Ases* | | *Eses* | | *Bes* | | *Fes* | | *Ces* | | *Ges* | | *Des* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Es* | | *B* | | *F* | | *C* | | *G* | | *D* | | *A* | | *E* |
| | *Fis* | | *Cis* | | *Gis* | | *Dis* | | *Ais* | | *Eis* | | *His.* | |

Die in diesen zwei Schematen gleichgelegenen Töne spielen auch in den beiden Klassen der Tonsysteme dieselbe Rolle.

Nimmt man allgemein an, der Musiker brauche $p+1$ Tonleitern in Dur sowohl wie auch in Moll, über den Grundtönen $Q_0$, $Q_1$, $Q_2 \dots Q_p$, um gute Musik machen zu können, so lehrt die Ansicht der allgemeinen Formeln im vierten Abschnitte für die Dur- und Moll-Skalen über dem Grundtone $Q_p$ und der Vergleich mit jenen über dem Grundtone $Q_0$, daß hierzu die folgende Reihe fortlaufender Quinten, $p+20$ an der Zahl, notwendig ist:

$$Q_{-9} \quad Q_{-8} \dots Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \dots Q_p \quad Q_{p+1} \dots Q_{p+10},$$

also um 19 Töne mehr als Tonarten und Leitern. Hiebei sind überdies die Septimen noch gar nicht in Betracht gezogen und müssen genommen werden, wie sie in der betreffenden Tonart vorhanden sind. Dies leidet eine Ausnahme bei geschlossenen Tonsystemen, bei welchen auch hier ein sehr bedeutendes Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden kann. So oft es nämlich gelingt, ein $(p+1)$ stufiges geschlossenes Tonsystem aufzufinden, genügt dasselbe vollkommen zur Aufstellung von $p+1$ Moll- und Dur-Tonleitern, die mit allen Intervallen gleichmäßig versehen sind.

Es entsteht also die nicht unwichtige Frage: Gibt es geschlossene Tonsysteme der zweiten Klasse, und welche sind ihre Stufenzahlen? Diese Frage zu beantworten erwäge man, daß in einem $(p+1)$stufigen geschlossenen Tonsysteme die Bestandtöne eine geometrische Progression bilden:

$$\zeta \quad \alpha\zeta \quad \alpha^2\zeta \quad \alpha^3\zeta \dots \alpha^p\zeta, \quad \text{wo} \quad \alpha^{p+1} = 2 \quad \text{ist.}$$

Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $p+1$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, notwendigerweise ganze Zahl. Das kleinste der in einer Tonleiter zweiter Klasse vorkommende Intervall ist nun vermöge der kurz vorher angestellten Betrachtungen das zwischen einem großen und kleinen ganzen Ton vorhandene. Angenommen, es eigne sich $k$ Tonstufen an, der kleine Halbton hingegen nehme von diesen Stufen $m$ für sich in Anspruch, so bekommt der große Halbton dem oben Gesagten nach $(m+2k)$ Stufen. Der kleine ganze Ton erhält, weil er aus den beiden Halbtönen zusammengesetzt ist, $(2m+2k)$ Stufen. Also besitzt der große ganze Ton die Stufenzahl $2m+3k$.

In der Tonleiter zweiter Klasse kommen, sowie in der reinen Tonleiter, 3 große ganze, 2 kleine ganze, und 2 große Halbtöne vor; sie erhalten zusammen genommen $12m + 17k$ Stufen, oder $12(m + k) + 5k$ an der Zahl. Sie machen auch eine Oktave aus, man hat daher die Gleichung:

$$p + 1 = 12(m + k) + 5k, \tag{47}$$

in welcher für $k$ und $m$ beliebige ganze und positive Werte gesetzt werden können.

Wir setzen erstens $k = 0$, so ergibt sich die erste Gattung der geschlossenen Tonsysteme der zweiten Klasse, die für

$$\begin{array}{rllll} m = & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ p + 1 = & 12 & 24 & 36 & 48 \ldots \text{stufig} \end{array}$$

ausfallen; sie sind alle von dem 12stufigen chromatischen Systeme nicht verschieden, welches mithin auch in der zweiten Klasse für sich eine Gattung darstellt.

Die zweite Gattung geschlossener Tonsysteme erhält man für $k = 1$; sie besitzen beziehentlich für

$$\begin{array}{rllllllll} m = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ p + 1 = 12(m + 1) + 5 = & 17 & 29 & 41 & 53 & 65 & 77 & 89 & 101 \ldots \text{Stufen.} \end{array}$$

Die ihnen entsprechenden Quintentemperaturen $q$ erhält man, wenn man der Reihe nach setzt:

$$Q_0 = Q_{17} \quad Q_{29} \quad Q_{41} \quad Q_{53} \quad Q_{65} \quad Q_{77},$$

d. h.

$$1 = 0{\cdot}962169 q^{17}, 0{\cdot}975296 q^{29}, 0{\cdot}988602 q^{41}, 1{\cdot}00209 q^{53}, 1{\cdot}015762 q^{65}, 1{\cdot}029620 q^{77},$$

woraus

$$q = 1{\cdot}002236,\ 1{\cdot}000863,\ 1{\cdot}000278,\ 0{\cdot}999961,\ 0{,}999759,\ 0{\cdot}999621 \text{ usw.}$$

folgt.

Eine dritte Gattung geschlossener Tonsysteme liefert die Annahme $k = 2$, der die Stufenzahl: $p + 1 = 12(m + 2) + 10$ entspricht, welcher nun wieder für

$$\begin{array}{rlllllllll} m = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ldots \\ p + 1 = 12(m + 2) + 10 = & 34 & 46 & 58 & 70 & 82 & 94 & 106 & 118 & 130 \ldots \end{array}$$

stufige Tonsysteme entsprechen. Sie sind nicht alle von den der zweiten Gattung angehörigen verschieden, das 34stufige ist vielmehr identisch mit dem 17stufigen, das 58-, 82-, 106-, 130 ... stufige be-

ziehentlich identisch mit dem 29-, 41-, 53-, 65stufigen zweiter Gattung, so daß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig die den Annahmen

$$m = 1,\quad 3,\quad 5,\quad 7 \ldots 2n + 1$$

entsprechenden übrig bleiben, und also die Formel, welche nur Tonsysteme dritter Gattung liefert, geschrieben werden kann:

$$p + 1 = 24(n + 2) - 2.$$

In der Tat ergibt diese für die folgenden Werte von $n$ die entsprechenden Stufenzahlen:

$$\begin{array}{rcccccc} n = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots, \\ p + 1 = 24(n + 2) - 2 = & 46, & 70, & 94, & 118, & 142, & 166, \ldots, \end{array}$$

welche Tonsysteme der dritten Gattung angehören, die unter den zur zweiten Gattung zählenden nicht angetroffen werden. Sie können alle als in die zweite Gattung interpolierte Tonsysteme betrachtet werden.

Das 46stufige fällt seiner Quintentemperatur, mithin auch seinen übrigen Eigenschaften nach zwischen das 17- und 29stufige zweiter Gattung, das 70stufige zwischen das 29- und das 41stufige, das 94-stufige zwischen das 41- und 53stufige, das 118stufige zwischen das 53- und 65stufige zweiter Gattung. Wenn mithin die Quintentemperatur $q$ des 53stufigen Tonsystems vielleicht für zu klein, die des 65stufigen dagegen aus irgend einem Grunde als zu hoch erachtet werden sollte, so bietet sich zunächst das 118stufige Tonsystem als möglicherweise entsprechend an.

Die Quintentemperaturen $q$ dieser geschlossenen Tonsysteme dritter Gattung erhält man wieder, wenn man der Reihe nach tetzt:

$$\begin{array}{lrll} & Q_0 = & Q_{46}, & Q_{70}, \quad Q_{94}, \quad Q_{118}, \\ \text{das heißt} & 1 = & 0.938400 q^{46}, & 0.964180 q^{70}, \\ \text{woraus} & q = & 1.0002536, & 1.000521 \end{array}$$

berechnet wird. Nun wäre eine vierte Gattung geschlossener Tonsysteme an der Reihe, erhalten durch die Voraussetzung $k = 3$, der die Stufenzahl

$$p + 1 = 12(m + 4) + 3$$

entspricht. Diese Systeme zählen beziehentlich:

$$\begin{array}{rccccccccccc} m= & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \ldots \\ p+1=12(m+4)+3= & 51, & 63, & 75, & 87, & 99, & 111, & 123, & 135, & 147, & 159, & 171, \ldots \end{array}$$

Stufen. Von ihnen ist das 51-, 87-, 123-, 159stufige mit dem 17-, 29-, 41-, 53-, ... stufigen der zweiten Gattung identisch. Die übrigen

sind zwischen die Tonsysteme zweiter Gattung zu zweien und zweien eingeschoben.

So fortschreitend und der Reihe nach $k = 4, 5, 6, \ldots$ annehmend bekäme man eine 5., 6., 7., ... usw. Gattung geschlossener Tonsysteme von immerfort zunehmenden Stufenzahlen, die zum Teil sich zwischen dieselben einschieben. Begreiflicherweise behaupten die früheren vor den späteren Gattungen angehörigen Tonsysteme unter übrigens gleichen Umständen wegen der namhaft geringeren Stufenzahl den Vorzug, der übrigens in dem Falle, wo man alle Töne zu verwenden nicht in der Lage ist, an Bedeutung sehr verlieren kann, und auch dann wirklich verliert, wenn man wegen der Einrichtung der Tastatur von der geschlossenen Beschaffenheit des Tonsystems keinen Gebrauch machen kann.

Wir wollen nun mit einigen Tonsystemen, in welchen die Summe der Quadrate aller mit ihren Gewichtszahlen multiplizierten Verfälschungen der konsonanten Intervalle ein Minimum ist, einige Bekanntschaft suchen, so wie wir dies bei dem Tonsysteme der ersten Klasse getan haben, bemerken aber hier, daß man gerade wie bei den Tonsystemen erster Klasse für die Septime eine doppelte Wahl treffen kann. So wie sich nämlich dort als Septimen von $C$ zwei Töne, nämlich $B$ und *Ais* darbieten, von welchen der erste diese Stelle im 12stufigen Systeme wirklich übernimmt, während sich für die große Mehrzahl der übrigen Tonsysteme erster Klasse *Ais* besser verwerten läßt, so verhält sich die Sache in der zweiten Klasse auch. Es bieten sich als Septimen dar erstens die vierzehnte vom Grundtone $C$ gezählte Quarte *Ceses*; wählt man sie, so ergeben sich für die Temperaturen der konsonanten Hauptintervalle die Gleichungen (45), d. h.

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8}, \quad t = \frac{5 \cdot 3^8 q^9}{2^{15}}. \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} \cdot q^{14}}.$$

Man kann aber noch einem anderen Tone die Rolle der Septime übertragen, nämlich der neununddreißigsten vom Grundtone $C$ aus gezählten Quinte, deren musikalischer Name *Eisisisisis* ist. Die Schwingungszahl dieses Reintones entnimmt man der Quintentabelle, welche $Q_{39} = \frac{3^{39}}{2^{61}} = 1.757515\mathfrak{z}$ ist.

Geht man nun von den reinen Tönen zu temperierten über, so erhält einerseits die 39. Quinte den Faktor $q^{39}$, während andererseits die reine Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\mathfrak{z}$ in die temperierte $\frac{7}{4}s\mathfrak{z}$ übergeht. Man hat also hier:

$$\frac{7}{4}s = \frac{3^{39}}{2^{61}} \cdot q^{39} \quad \text{oder} \quad s = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}} q^{39}.$$

Diese zweite Septime ist viel weiter vom Grundtone entfernt als die erste, erweist sich also nur brauchbar bei solchen Tonsystemen, die eine sehr bedeutende Stufenzahl oder einen sehr großen Tonreichtum besitzen.

Setzen wir jetzt, von den Temperaturen zu den Verfälschungen übergehend,

$$q = 1 + x, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma;$$

führen wir diese Werte in die obigen Formeln ein und lassen, weil $x$ der Natur der Sache nach einen sehr kleinen Bruch vorstellt, die höheren Potenzen desselben weg, so ergeben sich für die Verfälschungen der Hauptintervalle folgende Gleichungen:

$$\theta = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8}\left[-\frac{37}{2^{15}} - 8x\right],$$

$$\tau = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9x\right],$$

$$\sigma = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14x\right]$$

oder, wenn die 39. Quinte als Septime beliebt wird:

$$\sigma = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39x\right].$$

Nennen wir jetzt die Gewichte der Verfälschungen der Quinte, großen Terz, kleinen Terz, Septime beziehentlich $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$, so ist die Summe der Quadrate, die ein Minimum werden soll, folgende:

$$\sum = \mathfrak{q}^2 x^2 + \mathfrak{T}^2 \theta^2 + \mathfrak{t}^2 \tau^2 + \mathfrak{s}^2 \sigma^2,$$

und man hat im Falle des Minimums $\frac{d\sum}{dx} = 0$ oder, da

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{2^{18}}{5 \cdot 3^8}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{5 \cdot 3^{10}}{2^{15}}, \quad \frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2^{26}}{3^{14}},$$

bezw. wenn die zweite Septime vorgezogen wird,

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{39 \cdot 3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}$$

ist, eine der folgenden zwei Bestimmungsgleichungen für $x$

$$\mathfrak{q}^2 x + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{5^2 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8x\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9x\right] - \frac{2^{51}\mathfrak{s}^2}{7 \cdot 3^{28}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14x = 0\right.$$

oder für den Fall der zweiten Septime

$$\mathfrak{q}^2 x + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{2^2 \cdot 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8x\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9x\right]$$

$$+ \frac{39 \cdot 3^{78}\mathfrak{s}^2}{7^2 \cdot 2^{118}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39x\right] = 0.$$

Durch die Auflösung dieser beiden Gleichungen gewinnt man die vorteilhafteste Verfälschung der Quinte, welche das wohlklingendste Tonsystem gibt, ausgedrückt durch eine der folgenden beiden Formeln:

$$\varkappa = -\frac{2^{48}\cdot 3^{12}\cdot 7\cdot 37\mathfrak{T}^2 + 5^3\cdot 3^{38}\cdot 7\cdot 37\mathfrak{t}^2 - 2^{56}\cdot 5^2\cdot 73649\mathfrak{s}^2}{2^{30}\cdot 3^{28}\cdot 5^2 7\mathfrak{q}^2 + 2^{66}\cdot 3^{12}\cdot 7\mathfrak{T}^2 + 5^4\cdot 3^{48}\cdot 7\mathfrak{t}^2 + 2^{82}\cdot 5^2\cdot 7\mathfrak{s}^2},$$

(48) oder für den Fall der entlegeneren Septime:

$$\varkappa = -\frac{2^{136}\cdot 7^2\cdot 37\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 37\mathfrak{t}^2 + 3^{56}\cdot 5^2\cdot 13\cdot 17329886895011851\mathfrak{s}^2}{2^{118}\cdot 3^{16}\cdot 5^2\cdot 7^2\mathfrak{q}^2 + 2^{154}\cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^4\cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 3^{96}\cdot 5^2\cdot 13^2\mathfrak{s}^2}.$$

Wenden wir uns zuvörderst an die erste dieser beiden Formeln, welche *Ceses* als die Septime von *C* auffaßt, und setzen wir in derselben erst $\mathfrak{q}$, dann $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{t}$ und zuletzt $\mathfrak{s}$ unendlich, gewissermaßen nach dem Tonsysteme fragend, in welchem einmal die Quinte, dann die große Terz, sodann die kleine Terz und schließlich die Septime rein und untemperiert sind, so erhält man diesen vier Annahmen entsprechend

für $\mathfrak{q} = \infty, \quad \varkappa = 0,$

" $\mathfrak{T} = \infty, \quad \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{37}{262144} = -\frac{1}{7085},$

" $\mathfrak{t} = \infty, \quad \varkappa = -\frac{37}{5\cdot 3^{10}} = -\frac{37}{295245} = -\frac{1}{7980},$

" $\mathfrak{s} = \infty, \quad \varkappa = \frac{73649}{7\cdot 2^{26}} = \frac{73649}{469762048} = +\frac{1}{6378}.$

Bei den Tonsystemen, welche das entlegenere *Eis*[5] als Septime erwählen, gestalten sich die Werte, welche die zweite Formel (48) gibt, in den obigen vier Fällen folgendermaßen:

für $\mathfrak{q} = \infty, \quad \varkappa = 0,$

" $\mathfrak{T} = \infty, \quad \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{1}{7085},$

" $\mathfrak{t} = \infty, \quad \varkappa = -\frac{37}{9\cdot 3^{10}} = -\frac{1}{7980},$

" $\mathfrak{s} = \infty, \quad \varkappa = \frac{17329886895011851}{3^{40}\cdot 13} = -\frac{1}{9120}.$

In beiden Fällen sind also die ersten drei Werte von $\varkappa$ gleich, nur für $\mathfrak{s} = \infty$ sind sie verschieden.

Multipliziert man Zähler und Nenner der ersten dieser vier verschiedenen Werte von $\varkappa$ mit $\mathfrak{q}^2$, des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$ des vierten mit $\mathfrak{s}^2$, addiert sodann alle Zähler der auf diese Weise gewonnenen Brüche und auch alle Nenner, konstruiert hieraus einen Bruch, dessen Zähler die Summe aller Zähler und dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, so erhält man bekanntlich einen Mittelwert

zwischen den vier vorliegenden Werten von $\varkappa$, der größer ist als der kleinste und kleiner als der größte derselben. Dieser Mittelwert ist aber offenbar der allgemeine Wert der zweiten Formel (48) für $\varkappa$ selbst, mithin ist in allen Tonsystemen zweiter Klasse, welche $Eis^5$ zur Septime erwählen, die Verfälschung der Quinte $\varkappa$ zwischen folgenden sehr eng aneinander liegenden Grenzen eingeschlossen:

$$-\frac{1}{7085} < \varkappa < 0.$$

Und läßt man die Verfälschung $\varkappa$ von Null aus allmählich nach der negativen Seite abnehmen, so begegnet man zuert dem Werte $\varkappa = -\frac{1}{9120}$, welcher das Tonsystem der reinen Septime gibt; dann kommt man zu dem Werte $\varkappa = -\frac{1}{7980}$, welchem das Tonsystem der reinen Kleinterzen entspricht, schließlich gelangt man zu $\varkappa = -\frac{1}{7085}$, zu dem das Tonsystem der Großterzen gehört, und mit welchem Werte von $\varkappa$ die Reihe derjenigen Werte geschlossen ist, die überhaupt aus der Formel (48) für die verschiedensten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ gezogen werden können.

Ein Tonsystem mit sehr reiner Quinte, verfälscht nämlich nur mit $\frac{1}{25382}$ der Schwingungszahl haben wir bei Bildung der Gattungen geschlossener Tonsysteme zweiter Klasse in dem 53stufigen System kennen gelernt; es gehört zu den Systemen, welche *Ceses* als Septime haben. Diese scheinen mithin von allen Werten von $\varkappa$ von Null an bis $\varkappa = -\frac{1}{9120}$ Besitz zu nehmen, und von da geht erst der Bereich derjenigen Tonsysteme an, für welche $Eis^5$ als Septime dient. Hieraus geht hervor, daß sich die Grenzen der Werte von $\varkappa$ für die in Rede stehenden Tonsysteme noch enger zusammenziehen lassen; man hat nämlich

$$-\frac{1}{7085} < \varkappa < -\frac{1}{9120}.$$

Um zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Verfälschungen der übrigen Intervalle, nämlich $\theta$, $\tau$ und $\sigma$ enthalten sind, wenn $\varkappa$ zwischen den oben angegebenen Grenzen bleibt, setzt man für $\varkappa$ zuerst eine, dann die andere seiner beiden Grenzen in die Formeln für $\theta$, $\tau$ und $\sigma$ ein und berechnet die Werte dieser letzteren. Man gewinnt so

$$\text{für } \varkappa = -\frac{1}{7085}, \quad \theta = 0, \quad \tau = -\frac{1}{7085}, \quad \sigma = -\frac{1}{811},$$

$$\text{„} \quad \varkappa = -\frac{1}{9120}, \quad \theta = -\frac{1}{3973}, \quad \tau = \frac{1}{7082}, \quad \sigma = 0.$$

Während also zwischen diesen Grenzen die große Terz immer ein wenig zu tief bleibt um eine Größe, welche $\frac{1}{3973}$ nicht überschreitet, ist die kleine Terz anfangs ungefähr um die Hälfte dieses Betrages zu tief und wird dann um gleichviel zu hoch. Die Septime bleibt immer zu tief, aber auch nur um einen sehr geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl.

Der bloße Anblick der kleinen gebrochenen Werte, die aus den Formeln (48) gewonnen werden, lehrt, daß es unter den Tonsystemen zweiter Klasse und vorzugsweise unter denjenigen, die sich der entlegenen Septime $Eis^5$ bedienen, sehr reine, wohlklingende gibt, bei welchen die Verfälschung der konsonanten Intervalle nur beiläufig $\frac{1}{8000}$ der Schwingungszahl beträgt, also selbst mit den allerfeinsten Beobachtungsmitteln nicht mehr wahrnehmbar ist. Diese Reinheit kommt aber leider teuer zu stehen, indem ein sehr beträchtlicher Aufwand an Tonmitteln damit verknüpft ist und durch die jedermann zu Gebote stehenden Stimmmittel nicht zu erreichen ist und, wenn zufällig erreicht, auf keine Weise vom menschlichen Ohr beurteilt werden kann.

Suchen wir nun einige dieser Tonsysteme mehr im besonderen kennen zu lernen. Das mit vollkommen reinen Quinten ist bereits oben angeführt worden, wobei wir gesehen haben, daß es ein sehr brauchbares Tonsystem sei, welches nur um $\frac{1}{886}$ temperierte Terzen enthält.

Das 53stufige System haben wir als ein solches kennen gelernt, welches die Quinte nur um den sehr kleinen Bruchteil $\frac{1}{25382}$ zu tief nimmt. Man hat also in diesem 53stufigen System $q = \frac{25381}{25382}$.

Rechnet man hiezu die Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle nach den Formeln (45), so erhält man

$$T = \frac{1229}{1230} = 1 - \frac{1}{1230}, \quad t = \frac{1293}{1292} = 1 + \frac{1}{1292}, \quad s = \frac{364}{363} = 1 + \frac{1}{363}.$$

Der Anblick dieser Zahlen lehrt, daß man hier ein Tonsystem hat, welches bescheidene Ansprüche vollkommen befriedigen kann. Es verbindet mit beinahe ganz reinen Quinten eine große und kleine Terz, die 10- bis 12mal reiner sind als die Terzen des chromatischen Systems. Die Septime ist wohl um etwas, einem feinen Gehöre bereits Merkliches zu hoch, sie verträgt dies aber viel besser als eine gleich große Verfälschung in entgegengesetzter Richtung, was in der Natur dieses konsonanten Intervalles zu liegen scheint, sowie auch ein geringes

Schweben dieses Intervalles dem psychischen Charakter desselben sehr gut entspricht und dem Wohlklang keinen Eintrag tut. Petzval hielt es daher der Mühe wert, dieses unstreitig sehr brauchbare System zweiter Klasse einer ausführlichen Berechnung zu unterwerfen. Da es ein geschlossenes 53stufiges Tonsystem ist, so sind seine nach der Größe der Schwingungszahlen geordneten Töne im musikalischen Sinne äquidistant, d. h. diese Schwingungszahlen bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied $\zeta$ und deren Exponent $\sqrt[53]{2}$ ist. Die von Petzval berechnete Tabelle ist die nachstehende. In der zweiten Spalte befinden sich die musikalischen Namen der Tonstufen, in der dritten ihre arithmetischen Benennungen, in der vierten die Logarithmen der Schwingungszahlen, in der fünften die Schwingungszahlen selbst in Form von Dezimalbrüchen, in der sechsten ihre einfachsten angenäherten Werte in Form eines gewöhnlichen Bruches, in der siebenten die Logarithmen der reziproken Werte der Schwingungszahlen, oder was dasselbe ist, die Logarithmen der Saitenlängen, die Saitenlänge für $C$ gleich Eins genommen, endlich in der achten die Saitenlängen selbst. (Siehe S. 392 f.)

In diesem 53stufigen Tonsysteme besitzt der große ganze Ton 9 Stufen, der kleine ganze Ton 8 Stufen, der große Halbton hat 5 Stufen, der kleine Halbton hat deren 3, der große und kleine Halbton geben zusammen $5 + 3 = 8$, also einen kleinen Ganzton, wie es sein muß. Die Schwingungszahlen dieser verschiedenen Fundamental-Intervalle sind von den in der reinen Tonleiter vorhandenen nur außerordentlich wenig verschieden. So hat der aus 3 Stufen bestehende Halbton das Schwingungsverhältnis mit $1.040014 = \frac{26}{25}$, während in der reinen Tonleiter dieser Halbton $\frac{25}{24} = 1.041667$ ist; der große Halbton, der aus fünf Stufen zusammengesetzt ist, hat die Schwingungszahl 1.067577, eine Zahl, die sich von dem Schwingungsverhältnisse in der reinen Tonleiter, nämlich $\frac{15}{16} = 1.066667$ noch weniger unterscheidet. Mit noch größerer Genauigkeit sind die beiden Ganztöne in diesem System wiedergegeben, nämlich der kleine $= 1.110295$, was beinahe genau $\frac{10}{9}$, und der große $= 1.124911$, was beinahe genau $\frac{9}{8}$ ist. Die beiden Terzen sind von genügender, Quinte und Quarte aber von ausgezeichneter Reinheit. An brauchbaren Intervallen verschiedener Art, die durch einfache Brüche ausgedrückt sind, ist ein namhafter Überfluß vorhanden. Daran, daß die Septime etwas stärker temperiert ist, wird wohl kein Musiker Anstand nehmen, weil ja ein jeder dieses Intervall mißachtet und nicht einmal für eine Konsonanz gelten läßt.

53 stufiges Tonsystem II. Klasse.

| r | | | $\log \sqrt[53]{2^r} =$ | $\sqrt[53]{2^r} =$ | | Saitenlänge | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | *C* | $Q_0$ | 0·0000000 | 1·000000 | 1 | 1·00000 | |
| 1 | *His* | $Q_{12}$ | 0·0056798 | 1·013164 | $\frac{77}{76}$ | 0·98701 | |
| 2 | *Ais*³ | $Q_{24}$ | 0·0113596 | 1·026501 | $\frac{39}{38}$ | 0·97418 | |
| 3 | *Es*³ | $Q_{-17}$ | 0·0170394 | 1·040014 | $\frac{26}{25}$ | 0·96153 | |
| 4 | *Des* | $Q_{-5}$ | 0·0227192 | 1.053705 | $\frac{39}{37}$ | 0·94903 | |
| 5 | *Cis* | $Q_7$ | 0·0283991 | 1·067577 | | 0·93670 | |
| 6 | *His*² | $Q_{14}$ | 0·034078 | 1·081630 | | 0·92453 | |
| 7 | *Fes*³ | $Q_{-22}$ | 0·0397587 | 1·095869 | | 0·91252 | |
| 8 | *Es*² | $Q_{-10}$ | 0·0454385 | 1·110295 | | 0·90066 | |
| 9 | *D* | $Q_2$ | 0·0511183 | 1·124911 | $\frac{9}{8}$ | 0·88896 | |
| 10 | *Cis*² | $Q_{14}$ | 0·0567981 | 1·139720 | | 0·87741 | |
| 11 | *His*³ | $Q_{26}$ | 0·0624779 | 1·154723 | | 0·86601 | *Ges*⁴ $= Q_{-27}$ |
| 12 | *Fes*² | $Q_{-15}$ | 0·0681577 | 1·169924 | | 0·85476 | |
| 13 | *Es* | $Q_{-3}$ | 0·0738375 | 1·185325 | $\frac{31}{26}$ | 0·84365 | |
| 14 | *Dis* | $Q_9$ | 0·0795174 | 1·200929 | $\frac{6}{5}$ | 0·83269 | |
| 15 | *Cis*³ | $Q_{21}$ | 0·0851972 | 1·216739 | | 0·82187 | |
| 16 | *Ges*³ | $Q_{-20}$ | 0·0908770 | 1·232756 | | 0·81119 | |
| 17 | *Fes* | $Q_{-8}$ | 0·0965568 | 1·248984 | | 0·80065 | |
| 18 | *E* | $Q_4$ | 0·1022366 | 1·265426 | | 0·79025 | |
| 19 | *Dis*² | $Q_{16}$ | 0·1079164 | 1·282084 | | 0·77998 | |
| 20 | *As*⁴ | $Q_{-25}$ | 0·1135962 | 1·298961 | | 0·76985 | *Cis*⁴ $= Q_{28}$ |
| 21 | *Ges*² | $Q_{-13}$ | 0·1192760 | 1·316061 | | 0·75984 | |
| 22 | *F* | $Q_{-1}$ | 0·1249558 | 1·333385 | | 0·74997 | |
| 23 | *Eis* | $Q_{11}$ | 0·1306356 | 1·350939 | | 0·74023 | |
| 24 | *Dis*³ | $Q_{23}$ | 0·1363154 | 1·368723 | | 0·73061 | |
| 25 | *As*³ | $Q_{-18}$ | 0·1419953 | 1·386741 | | 0·72112 | |

| $r$ | | | $\log\sqrt[53]{2^r} =$ | $\sqrt[53]{2^r} =$ | | Saitenlänge | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | *Ges* | $Q_{-6}$ | 0·1476751 | 1·404996 | | 0·71175 | |
| 27 | *Fis* | $Q_6$ | 0·1533549 | 1·423491 | | 0·70250 | |
| 28 | *Eis²* | $Q_{18}$ | 0·1590347 | 1·442230 | | 0·69337 | |
| 29 | *Bes³* | $Q_{-23}$ | 0·1647145 | 1·461216 | | 0·68436 | |
| 30 | *As²* | $Q_{-11}$ | 0·1703943 | 1·480452 | | 0·67547 | |
| 31 | *G* | $Q_1$ | 0·1760741 | 1·499941 | | 0·66669 | |
| 32 | *Fis²* | $Q_{13}$ | 0·1817540 | 1·519686 | | 0·65803 | |
| 33 | *Eis³* | $Q_{25}$ | 0·1874338 | 1·539692 | | 0·64948 | *Ces⁴* = $Q_{-28}$ |
| 34 | *Bes²* | $Q_{-16}$ | 0·1931136 | 1·559960 | | 0·64104 | |
| 35 | *As* | $Q_{-4}$ | 0·1987934 | 1·580496 | | 0·63271 | |
| 36 | *Gis* | $Q_8$ | 0·2044732 | 1·601302 | $\frac{8}{5}$ | 0·62449 | |
| 37 | *Fis³* | $Q_{20}$ | 0·2101530 | 1·622382 | $\frac{13}{8}$ | 0·61638 | |
| 38 | *Ces³* | $Q_{-21}$ | 0·2158328 | 1·643739 | | 0·60837 | |
| 39 | *Bes* | $Q_{-9}$ | 0·2215126 | 1·665377 | | 0·60046 | |
| 40 | *A* | $Q_3$ | 0·2271925 | 1·687301 | | 0·59266 | |
| 41 | *Gis²* | $Q_{15}$ | 0·2328723 | 1·709512 | | 0·58496 | |
| 42 | *Fis⁴* | $Q_{27}$ | 0·2385521 | 1·732017 | | 0·57736 | *Des⁴* = $Q_{-26}$ |
| 43 | *Ces²* | $Q_{-14}$ | 0·2442319 | 1·754817 | | 0·56986 | |
| 44 | *B* | $Q_{-2}$ | 0·2499116 | 1·777917 | | 0·56246 | |
| 45 | *Ais* | $Q_{10}$ | 0·2555914 | 1·801323 | | 0·55515 | |
| 46 | *Gis³* | $Q_{22}$ | 0·2612713 | 1·825036 | | 0·54793 | |
| 47 | *Des³* | $Q_{-19}$ | 0·2669511 | 1·849060 | | 0·54082 | |
| 48 | *Ces* | $Q_{-7}$ | 0·2726309 | 1·873402 | | 0·53379 | |
| 49 | *H* | $Q_5$ | 0·2783108 | 1·898064 | | 0·52685 | |
| 50 | *Ais²* | $Q_{17}$ | 0·2839906 | 1·923050 | | 0·52001 | |
| 51 | *Gis⁴* | $Q_{29}$ | 0·2896704 | 1·948365 | | 0·51325 | *Es⁴* = $Q_{-24}$ |
| 52 | *Des²* | $Q_{-12}$ | 0·2953502 | 1·974014 | | 0·50658 | |
| 53 | *C* | $Q_0$ | 0·3010300 | 2·000000 | | 0·50000 | |

Es ist noch die Frage zu beantworten, auf welche Weise die Namen der 53 Tonstufen bestimmt worden sind. Es reicht hierzu die Kenntnis der folgenden zwei Umstände aus. Erstens hat der ganze Ton neun Stufen; hieraus folgt, daß die von *C* aus gezählte neunte Stufe den Namen *D* tragen wird, von da aus heißt die neunte, also von *C* aus die neunzehnte Stufe *E*, von da aus weitere je neun Stufen gezählt, gibt $N^0$ 27 *Fis*, ebenso $N^0$ 36 *Gis*, $N^0$ 45 *Ais*; die $54^{te}$ ist aber gleichbedeutend mit der ersten Stufe und heißt *His*. Der zweite Umstand ist, daß die Silbe *is*, zu irgend einem Tone hinzugesetzt, eine Erhöhung um genau einem großen Halbton, also um 5 Stufen bedeutet; man zähle also von *C* aus 5, 10, 15, 20, 25, usw. Stufen, und man erhält der Reihe nach die Töne: *Cis*, *Cisis*, $Cis^3$, $Cis^4$ usf. Auf dieselbe Weise erhält man von *D* je 5 Stufen zählend *Dis*, *Disis*, $Dis^3$, $Dis^4$, usf. Endlich bedeutet die angefügte Endsilbe *es* eine Erniedrigung um 5 Stufen; daher man nach rückwärts fünf Stufen zählend jedesmal die Endsilbe *es* mit anfügen kann. Zudem weiß man, daß die große Terz aus einem großen und einem kleinen Ganzton zusammengesetzt ist, also $9 + 8 = 17$ Stufen hat; die kleine Terz besteht aus einem großen ganzen und aus einem kleinen Halbton, hat also $9 + 5 = 14$ Stufen; die Quinte ist zusammengesetzt aus einer großen und einer kleinen Terz, befindet sich daher auf der $17 + 14 = 31^{ten}$ Stufe, dorthin setze man also *G* usw.

Hat man sich diesen ganzen Reichtum von 53 Tönen an irgend einem Instrumente, wie Orgel oder Harmonium verschafft, so hat man 53 Dur- und Molltonarten, bei welchen man im Quintenzirkel herumwandern kann, und es ist nicht notwendig, sich die Töne in einer Tabelle zurechtzulegen, um in derselben ersichtlich zu machen, über welche Intervalle man in einer jeden Tonart verfügt, weil man in allen Tonarten alle Intervalle hat. Kann man aus irgend einer Ursache von allen 53 Tönen nicht Gebrauch machen, muß man sich vielmehr auf eine geringere Anzahl beschränken, so ist es unerläßlich, sich diesen Vorrat zum musikalischen Gebrauche gewählter Töne, die eine zusammenhängende Quintenreihe zu bilden haben, tabellarisch zurechtzulegen.

Zur Beurteilung jedoch, welche geringste Anzahl von Tönen hinreiche, um gute Musik machen und namentlich die Meisterwerke neuerer Tonsetzer vortragen zu können, bieten die bisher gewonnenen Einsichten nicht genügenden Anhalt, und ist es notwendig sich einige, wenn auch nur oberflächliche Kenntnisse der Harmonielehre zu verschaffen. Nur ist die gewöhnliche Harmonielehre, wie sie in verschiedenen Werken über diesen Gegenstand angetroffen wird, bloß für das 12stufige Tonsystem gültig; für denjenigen, der sich einen weit größeren Ton-

reichtum gestatten kann, und darunter sogar neue Konsonanzen wie die reine Septime, ist sie zu enge gehalten und muß notwendig eine Erweiterung erfahren. Petzval hat sich denn auch zu diesem Ende mit den *mathematischen Grundsätzen, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre* nötig sind, befaßt. Von diesen Arbeiten ist indessen der größte Teil verloren gegangen, und bilden die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen nur einzelne Bruchstücke davon.

Im Zusammenhange mit dieser Harmonielehre steht auch die von ihm ersonnene *rationelle Tastatur*, von welcher, weil sie sich gleichfalls auf die vorgetragene Theorie bezieht, und weil Petzval diesen Gegenstand in seinen Vorträgen mit besonderer Vorliebe zu behandeln pflegte, einiges im nächsten Abschnitte Platz finden mag.

## VI. Die rationelle Tastatur.

Es ist eine allgemein anerkannte Tatsache, daß, wenn man aus einer beträchtlichen Anzahl von Elementen beliebiger Art die mannigfaltigsten Kombinationen zu machen und Gruppen zu zweien, dreien, vieren usf. auf die verschiedenste Weise zu bilden hat, man Sorge tragen muß, sich diese Elemente auf die vorteilhafteste Weise, zum bequemen Gebrauche geordnet, zurechtzulegen. Dies ist vorzugsweise mit den zum musikalischen Gebrauche bestimmten Tönen der Fall. Die rationellste Anordnung derselben kann dann auch als das Urbild einer rationellen Tastatur betrachtet werden.

Petzval bezeichnet diejenige als die rationelle Tastatur, welche die geringste Anzahl möglichst bequemer Fingersätze in den verschiedenen Tonarten, in denen Musikstücke auf derselben vorgetragen werden, zuläßt. Sie hat zu der Tastatur des gebräuchlichen Klaviers sozusagen den direkten Gegensatz zu bilden. Denn während bei diesem Instrumente zu dem Vorrate von zwölf Tönen, der eine wahre Tonarmut genannt werden muß, nicht weniger als 12 verschiedene, meist sehr unbequeme Fingersätze benötigt werden, braucht man bei allen Tonsystemen der ersten Klasse nur *einen einzigen* sehr bequemen Fingersatz, wenn man die rationelle Tastatur annimmt. Sie ist so beschaffen, daß, wenn man ein Musikstück in irgend einer Tonart einstudiert hat, man es auch in allen übrigen Tonarten, wie viele deren im Tonsysteme auch sein mögen, ohne Schwierigkeit und genau mit denselben Bewegungen der Hand abspielen kann.

Diese rationelle Tastatur oder vielmehr das geometrische Urbild, sozusagen der Grundriß derselben, wird auf eine höchst einfache Weise gebildet. Man schreibt nämlich die bekannte Quintenreihe in horizon-

taler Richtung auf, vom Grundtone *C* nach rechts und links ins Unbegrenzte fortgesetzt:

... *Ges, Des, As, Es, B, F, C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, Gis*

und zeichnet in derselben vom Grundtone angefangenen jeden zweiten Ton nach Belieben aus, z. B. durch Unterstreichen. Aus den auf diese Weise bezeichneten Tönen bildet man eine besondere erste Reihe:

(I) ... *Fes, Ges, As, B, C, D, E, Fis, Gis, Ais, His,* ...

aus den übrigen eine besondere zweite Reihe:

(II) ... *Ces, Des, Es, F, G, A, H, Cis, Dis, Eis,* ...

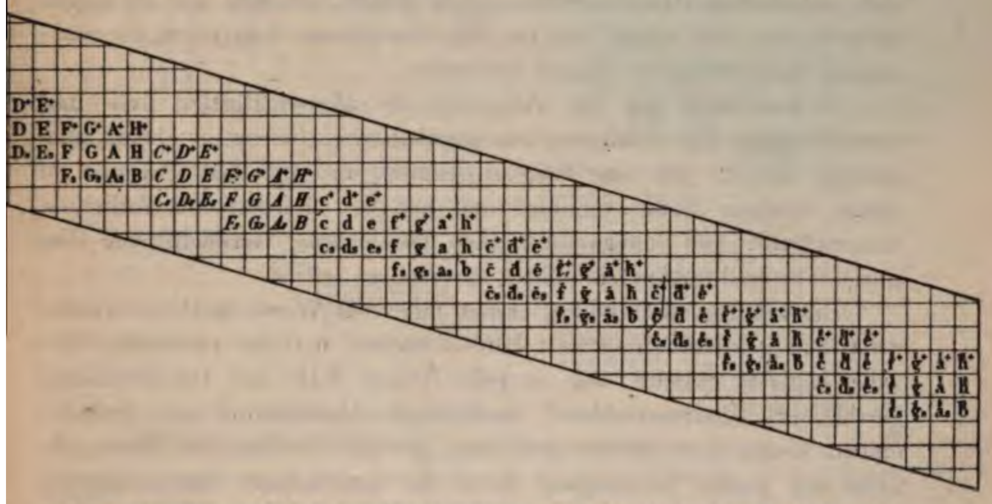
Diese zwei Reihen schreibt man nun abwechselnd untereinander, so jedoch, daß, wenn in einer hinzuzuschreibenden Reihe *C* vorkommt, dies unter *Cis* der nächst vorhergehenden Reihe zu stellen ist. Kommt aber in der nächst aufzuschreibenden Reihe *Ces* vor, so hat es unter *C* seinen Platz einzunehmen.

Man erhält auf diese Weise eine Art Abbildung der rationellen Tastatur, welche allen Tonsystemen der ersten Klasse gemeinsam ist und in allen Tonarten nur einen einzigen Fingersatz hat. Hiervon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise: In der Reihe reiner Quinten ist das musikalische Intervall zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tönen ausgedrückt durch die Zahl $\frac{3}{2}$, und geht man nicht zu dem nächst folgenden, sondern zu dem zweiten über, so besteht zwischen diesem und dem zweitfolgenden ein Intervall von $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, oder wenn man sich die Töne der Quintenreihe auf die erste Oktave zurückgeführt denkt, das Intervall $\frac{9}{8}$ gleich einem großen Ganzton. Hieraus folgt, daß in jeder der beiden Reihen I und II die Töne äquidistant und je um einen ganzen Ton voneinander verschieden sind.

Zeichnet man nun in der angeführten Weise die rationelle Tastatur auf, nämlich:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cis,* | *Dis,* | *Eis,* | | | | | | | | | | | | | | |
| *C,* | *D,* | *E,* | *Fis,* | *Gis,* | *Ais,* | *His,* | | | | | | | | | | |
| *Ces,* | *Des,* | *Es,* | *F,* | *G,* | *A,* | *H,* | *Cis,* | *Dis,* | *Eis,* | | | | | | | |
| | | | *Fes,* | *Ges,* | *As,* | *B,* | *C,* | *D,* | *E,* | *Fis,* | *Gis,* | *Ais,* | *His,* | | | |
| | | | | | | | *Ces,* | *Des,* | *Es,* | *F,* | *G,* | *A,* | *H,* | *Cis,* | *Dis,* | ... |
| | | | | | | | | | | *Fes,* | *Ges,* | *As,* | *B,* | *C,* | *D,* | ... |
| | | | | | | | | | | | | | | *Ces,* | *Des,* | ... |

so sind auch in der vertikalen Richtung die Töne der übereinander geschriebenen Reihen äquidistant und je um einen kleinen Halbton voneinander verschieden. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß je zwei Tonpaare, welche in demselben horizontalen und in demselben vertikalen Abstande sich befinden, auch in demselben musikalischen Abstande



stehen werden. Die beigedruckte schematische Anordnung stellt die *rationelle Tastatur der Tonsysteme I. Klasse* dar. Stellt z. B. das erste Tonpaar eine große Terz vor, so wird das zweite auch eine große Terz sein; da dies aber von zwei beliebigen Tonpaaren gesagt werden kann, so gilt es allgemein für eine jede geometrische Gestalt. Alle Tongruppen nämlich, welche in der Tastatur durch gerade Linien zusammengezogen, kongruente geometrische Figuren bilden, besitzen auch, die Tonhöhe abgerechnet, gleichzeitig oder hintereinander angeschlagen einerlei Klang.

Da auf dieser Tastatur ein jedes Tonstück in allen Tonarten einerlei geometrische Gestalt hat, und da die Tonleiter ebenfalls ein kleines Musikstück ist, ja dasselbe auch von jedem Akkorde gesagt werden kann, so haben Tonleiter und Akkorde hier allenthalben einerlei Form, und es kann jedes dieser Tongebilde durch eine *Patrone* dargestellt werden.

Alle Dur-Tonleitern besitzen dann eine Patrone gemeinschaftlich, und wo immer man dieselbe auf die rationelle Tastatur legen mag, stets wird man durch die Fenster der Patrone eine richtige Durtonleiter heraussehend erblicken. In gleicher Weise gehören zu den Moll-Tonleitern die bekanntlich anders im Aufsteigen und anders im Absteigen gebildet werden, zwei Patronen und zu einem jeden der in der Musik gebräuchlichen, sei es konsonanten oder dissonanten Akkorde, je eine Patrone.

Die Anzahl der in der Musik gebrauchten Akkorde ist nun allerdings außerordentlich groß, und man würde ziemlich viele Patronen gebrauchen, wenn man einen jeden Akkord durch eine solche darstellen wollte. Sie haben aber nicht alle dieselbe Wichtigkeit, insbesondere war dies nicht der Fall für Petzvals Vorträge, in welchen er nicht eine vollständige Harmonielehre geben wollte, sondern nur zu zeigen bestrebt war, daß irgend ein von ihm berechnetes Tonsystem die praktischen Bedürfnisse der Musik befriedige.

Er hat daher aus den Akkorden die allerwichtigsten drei- und vierstimmigen, die im allgemeinen musikalischen Gebrauche stehen, auserlesen, und für jede eine Patrone gebildet, und alle diese Patronen in einem einzigen Blatte vereinigt und mit der üblichen musikalischen Nomenklatur und kontrapunktischen Bezeichnung versehen, wie dies aus der beigedruckten Abbildung zu ersehen ist.[1])

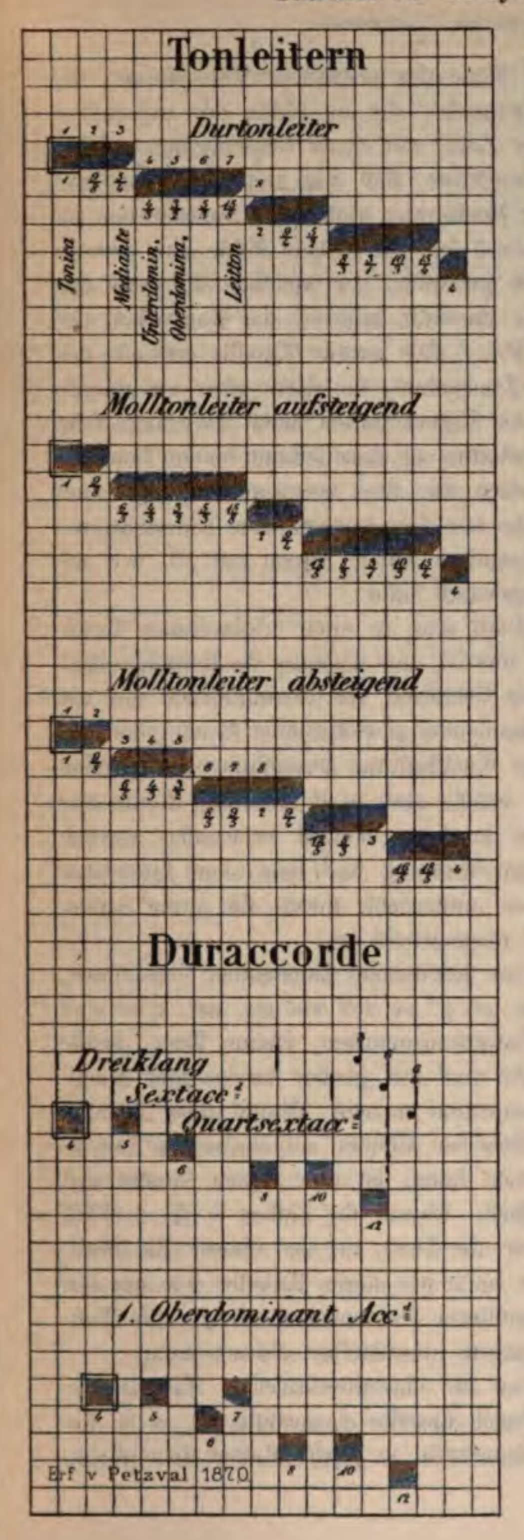
Diese Patronensammlung erspart hier viel Worte, weil der wissenschaftlich gebildete Leser mit Hilfe derselben und der rationellen Tastatur sogleich erkennt, was in jeder Tonart Moll- und Dur-Dreiklang, Sextakkord, Quartsextakkord, verminderter Quintakkord usw. bedeute. Zudem dienen diese Blätter auch dazu, gewisse Probleme der Harmonielehre mit großer Leichtigkeit durch die unmittelbare Anschauung zu lösen, ein Tonstück aus einer Tonart in eine beliebige andere zu übertragen, zu jedem gegebenen Gesange oder einer Melodie die vierstimmige Akkordbegleitung zu finden usf.

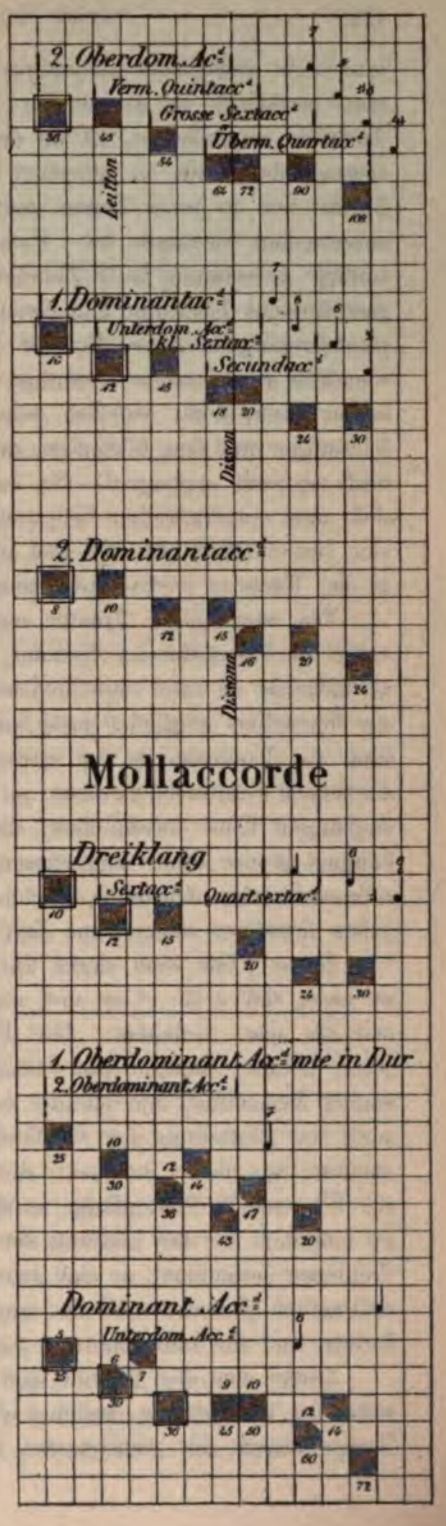
Mittels der rationellen Tastatur und der dazu gehörigen Patronensammlung gewinnt man aber nur eine allgemeine Kenntnis der Eigenschaften der Tonsysteme der ersten Klasse. Der intelligente Musiker und besonders derjenige, der von einem neuen Tonsysteme Gebrauch zu machen wünscht, kann sich mit einer solchen nicht begnügen, denn es liegt ihm ja ob, sich sein nach diesem Tonsystem ausgeführtes Instrument selber zu stimmen oder mindestens die Anleitung dazu zu geben.

Er muß sich daher mit den besonderen Eigenschaften des Tonsystems, das er zum praktischen Gebrauche gewählt und aus gewichtigen Gründen allen anderen vorgezogen hat, innigst befreunden, den musikalischen Abstand je zweier derselben in einer jeden Tonart muß er in Zahlen anzugeben wissen, und muß auch die zu demselben gehörige Saitenlänge kennen, und allenfalls auch imstande sein Fragen zu beantworten, wie die folgenden: Gibt es in irgend einer Tonart einen Akkord 6, 7, 9, 11 und in welcher? Dazu ist aber unerläßlich, daß

---

1) In der Abbildung hat man sich die schraffierten Felder ausgeschnitten zu denken; die so entstandenen Löcher nennt Petzval die „Fenster."


Tonleitern
Durtonleiter
Tonica
Mediante
Unterdomin.
Oberdomina.
Leitton
Molltonleiter aufsteigend
Molltonleiter absteigend
Duraccorde
Dreiklang
Sextacc
Quartsextacc
1. Oberdominant Acc
Erf v Petzval 1870


2. Oberdom. Ac
Verm. Quintacc
Grosse Sextacc
Überm. Quartacc
Leitton
1. Dominantac
Unterdom. Ac
Kl. Sextacc
Secundacc
Disson
2. Dominantacc
Mollaccorde
Dreiklang
Sextacc
Quartsextac
1. Oberdominant Ac wie in Dur
2. Oberdominant Acc
Dominant Acc
Unterdom. Acc

man sich wenigstens diejenigen Töne des erwählten Tonsystems, die man praktisch zu verwenden wünscht, die im Bilde der rationellen Tastatur ersichtlichen, 21 an der Zahl, mit ihren Schwingungsverhältnissen tabellarisch so geordnet vorführe, daß man mit einem einzigen Blicke den in jeder Tonart zur Verfügung stehenden Tonreichtum zu untersuchen imstande ist. Petzval hat zu diesem Ende eine zweckmäßige Anordnung in 3 Tabellen getroffen, von welchen die erste das geschlossene 31stufige Tonsystem darstellt, nämlich das Tonsystem der *gleichberechtigten Intervalle.* (S. 401.) Die zweite Tabelle enthielt das ebenfalls geschlossene 43stufige Tonsystem, die dritte aber ein unendliches Tonsystem, welches seinen Eigenschaften nach zwischen dem 31stufigen und dem 43stufigen enthalten ist; diese letzten beiden Tabellen sind verloren gegangen. Sie haben alle drei vorausgesetzt, daß man sich zum musikalischen Gebrauche von dem vorhandenen Tonreichtume von beziehentlich 31, 43 und unendlich vielen Tönen nur 21, wie sie in der Tastatur vorkommen, ausgewählt habe.

Die vorhandene Tabelle enthält also in einer horizontalen Reihe unten die Tonstufen des Systems, hier 31, und darunter die Schwingungsverhältnisse in zwei verschiedenen Gestalten: als Dezimalbruch und als ein demselben möglichst nahe kommender gewöhnlicher Bruch; darüber sind die Tonarten in der ersten Vertikallinie bezeichnet mit großen deutschen Frakturbuchstaben, an welche sich in horizontaler Reihe alle diejenigen Töne anschließen, die in dieser Tonart verwendet werden können in der ihnen zugewiesenen Ordnung und dem, dem Intervalle entsprechenden Abstande, welcher numerisch durch die unter einem jeden derselben vorhandene Zahl ausgedrückt ist.

Diese Töne sind durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, so zwar, daß z. B. $c^{+}$ so viel wie *cis*, $g^{+}$ so viel wie *gis*, usf., $c_{,}$ so viel wie *ces* usw. bedeudet. Die Hauptkonsonanzen, kleine Terz, große Terz, Quinte, Septime und Oktave sind mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, um leichter kenntlich zu sein. Damit diese Tabelle auch zur Einteilung des Griffbrettes bei solchen musikalischen Instrumenten, die derlei besitzen, dienen kann, ist eine eigene Spalte mit der Überschrift Saitenlänge eröffnet. Durch die Ziffern I, II . . . VIII ist zugleich an der unteren Seite die Dur-, an der oberen die Moll-Tonleiter bezeichnet, so daß man auch aus dieser Tabelle, wie aus der rationellen Tastatur und der angefügten Patronensammlung, alle Tonleitern und die konsonannten Akkorde unmittelbar ablesen kann.

Links von der Tabelle stehen die charakteristischen Hauptmerkmale des Tonsystems, welches durch dieselbe dargestellt ist, d. h. die Temperaturen der konsonanten Intervalle in gewöhnlicher Bruchform,

31 stufiges Tonsystem I. Klasse.

| Molltonleiter | I | | | | | II | | | III | | | | | IV | | | | | V | | | VI | | | | | VII | | | | | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Saitenlängen | 1·00000 | 0·97789 | 0·95626 | 0·93512 | 0·91444 | 0·89422 | 0·87446 | 0·85512 | 0·83621 | 0·81772 | 0·79964 | 0·78196 | 0·76467 | 0·74776 | 0·73122 | 0·71505 | 0·69925 | 0·68378 | 0·66867 | 0·65388 | 0·63942 | 0·62528 | 0·61146 | 0·59794 | 0·58472 | 0·57179 | 0·55914 | 0·54678 | 0·53469 | 0·52287 | 0·51131 | 0·50000 |
| $q=\frac{334}{335}$ $T=\frac{2213}{2212}$ $t=\frac{290}{291}$ $s=\frac{1593}{1594}$ Tonarten | $\mathfrak{F}_s$ | | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $A_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $C_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $D$ | | | $e_s$ | | $e$ | $F_s$ |
| | $\mathfrak{C}_s$ | | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $E_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $G_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $A$ | | | $b$ | | $h$ | $C_s$ |
| | $\mathfrak{G}_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $B$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $D_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $E$ | $f_s$ | | $f$ | | $f^+$ | $G_s$ |
| | $\mathfrak{D}_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $F_s$ | $e^+$ | $F$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $A_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $H$ | $c_s$ | | $c$ | | $c^+$ | $D_s$ |
| | $\mathfrak{A}_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $C_s$ | $h^+$ | $C$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $E_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $F^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $A_s$ |
| | $\mathfrak{E}_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $G_s$ | | $G$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $B$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $C^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $E_s$ |
| | $\mathfrak{B}$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $D_s$ | | $D$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $F$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $G^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $B$ |
| | $\mathfrak{F}$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $A_s$ | | $A$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $C$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $D^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $F$ |
| | $\mathfrak{C}$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $E_s$ | | $E$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $G$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $A^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $C$ |
| | $\mathfrak{G}$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $B$ | | $H$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $D$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $E^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $G$ |
| | $\mathfrak{D}$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $F$ | | $F^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $A$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $H^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $D$ |
| | $\mathfrak{A}$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $C$ | | $C^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $E$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $A$ |
| | $\mathfrak{E}$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $G$ | | $G^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $H$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $E$ |
| | $\mathfrak{H}$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $D$ | | $D^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $F^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $H$ |
| | $\mathfrak{F}^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $A$ | | $A^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $C^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $F^+$ |
| | $\mathfrak{C}^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $E$ | $f_s$ | $E^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $G^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $C^+$ |
| | $\mathfrak{G}^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $H$ | $c_s$ | $H^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $D^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $G^+$ |
| | $\mathfrak{D}^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $e^+$ | $f$ | | $F^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $A^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $D^+$ |
| | $\mathfrak{A}^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $h^+$ | $c$ | | $C^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | $f_s$ | $E^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $A^+$ |
| | $\mathfrak{E}^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $G^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | $c_s$ | $H^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $d^+$ | $e_s$ | | $e$ | | $E^+$ |
| | $\mathfrak{H}^+$ | $c$ | | $c^+$ | $d_s$ | | $d$ | | $D^+$ | $e_s$ | | $e$ | | $e^+$ | $f$ | | $f^+$ | $g_s$ | | $g$ | | $g^+$ | $a_s$ | | $a$ | | $a^+$ | $b$ | | $h$ | | $H^+$ |
| Stufen | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| Schwingungsverhältnisse | 1·00000 | 1·02261 | 1·04574 | 1·06938 | 1·09356 | 1·11829 | 1·14357 | 1·16943 | 1·19587 | 1·22291 | 1·25057 | 1·27884 | 1·30776 | 1·33733 | 1·36757 | 1·39849 | 1·43010 | 1·46245 | 1·49551 | 1·52933 | 1·56391 | 1·59928 | 1·63544 | 1·67242 | 1·71023 | 1·74890 | 1·78845 | 1·82889 | 1·87024 | 1·91253 | 1·95578 | 2·00000 |
| nahe | 1 | $\frac{45}{44}$ | $\frac{23}{22}$ | $\frac{77}{72}$ | $\frac{31}{29}$ | $\frac{19}{17}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{11}{9}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{23}{18}$ | $\frac{17}{13}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{26}{19}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{10}{7}$ | $\frac{19}{13}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{26}{17}$ | $\frac{25}{16}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{18}{11}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{53}{31}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{59}{33}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{21}{11}$ | $\frac{88}{45}$ | 2 |
| Durtonleiter | I Tonica | | | | | II | | | | | III Mediante | | | IV Unterdominante | | | | | V Oberdominante | | | | | VI | | | | | VII Leitton | | | VIII |

namentlich die Temperatur *q* der Quinte, die *T* der großen Terz, *t* der kleinen Terz und *s* der Septime. Die ganz gleiche Anordnung hatten auch die beiden anderen Tabellen.

Sowie dies aus den beiden verloren gegangen hervorging, so zeigt auch die vorhandene, daß nicht alle Tonarten sämtliche konsonanten Intervalle besitzen, namentlich fehlt zu den Grundtönen *Fes*, *Ces*, *Ges* die kleine Terz; man wird daher aus *Fes*-, *Ces*- und *Ges*-Moll nicht spielen können, und es sind mithin diese Tonarten reine Dur-Tonarten. Ebenso fehlt zu den Grundtönen *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* die große Terz; es sind also die Tonarten *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* spezifische Molltonarten. Die übrigen Grundtöne von *Des* angefangen bis *Gis*, 14 an der Zahl, haben sowohl große als kleine Terzen. Man hat daher den genügenden Vorrat von 14 Tonarten, die nach Belieben Dur oder Moll sein können. Desgleichen ist ersichtlich, daß man nur bei 11 der 21 Tonarten, die sich in jener Tabelle befinden, reine Septimen hat; die übrigen müssen sich mit einem dissonanten Stellvertreter begnügen.

Außer der hier vorgeführten rationellen Tastatur für die Tonsysteme der ersten Klasse hat Petzval vermutlich auch eine solche für die Tonsysteme der zweiten Klasse hergestellt, die indessen verloren gegangen zu sein scheint. Die Vermutung gründet sich darauf, daß sich zwei Patronen für diese Tastatur gefunden haben: Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit lateinischem Grundtone, und Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit gotischem Grundtone. Diese Tastaturen samt den Patronen hat Petzval hauptsächlich zu seinen Studien über die Bildung der Akkorde und die mathematischen Grundsätze, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre nötig sind, benützt.

Die Tastatur für die Tonsysteme erster Klasse hat Petzval überdies im Jahre 1870 an einem Klavier praktisch durchgeführt. In seiner ausgedehnten Sommerwohnung auf dem Kahlenberge bei Wien hatte er nämlich auch eine vollständig eingerichtete mechanische Werkstätte, in welcher er mit großer Geschicklichkeit allerhand Instrumente und Behelfe für seine verschiedenen Studien und physikalischen Versuche herstellte — die von ihm geschliffenen Linsen für optische Instrumente hatten einen Weltruf. So hatte er also auch einen fertigen, leeren Klavierkasten für das 31stufige Tonsystem (mit 21 ausgewählten Tönen für die Oktave) eingerichtet, mit Saiten bespannt, und die von ihm ersonnene Tastatur selbst hergestellt und eingebaut. Er pflegte seine Hörer gelegentlich in seine Wohnung einzuladen und trug ihnen als Beispiel zu seinen Vorträgen verschiedene Musikstücke vor, an denen er praktisch erwies, wie einfach das Spiel einerseits sei, und

wie man andererseits an Instrumenten mit festen Tönen durch Erweiterung der Tonreihe die Unreinheiten vermeiden und einen höheren Wohlklang zu erzielen vermag.

Aber er pflegte zu sagen, daß weder eine verbesserte Tastatur noch auch eines der von ihm berechneten tonreicheren Tonsysteme Eingang finden werde. „Denn das tonarme, 12stufige widersteht doch allen Angriffen hinlänglich durch die bloße Trägheit der Massen, und derjenige, welcher sich die unfruchtbare Aufgabe stellen würde, dasselbe zu verdrängen, und wenn auch durch ein besseres zu ersetzen, würde einen hoffnungslosen Kampf unternehmen müssen nicht nur mit den vielen Millionen in ihrer Ruhe gestörten Musikern, die den Erdball bevölkern, sondern auch mit den noch zahlreicheren Millionen musikalischer Instrumente, in denen das chromatische System verkörpert ist, und die in Form von Kisten, Schachteln, Röhren usw. mit hölzerner und blecherner Halsstarrigkeit sich einem jeden Versuche, ein besseres Tonsystem einzuführen, widersetzen würden. Wären daher die bitteren Vorwürfe auch alle begründet, die dem chromatischen System von Seite seiner heftigsten Gegner gemacht werden, wäre es wirklich wahr, daß es den Sänger zwinge, der Klavierbegleitung zuliebe falsch zu singen, den Violinspieler falsch zu geigen, daß es das Gehör ganzer Völker verderbe und als alleinige Ursache zu betrachen sei, daß die moderne Musik alles Sangbare allmählig ganz verliert und in einen barbarischen Lärm der Instrumentalmassen mehr und mehr ausartet, so müßte man sich diesem betrübenden, aber unabänderlichen Sachverhalte eben fügen, und diesen musikalischen Katzenjammer in stoischem Gleichmute als einen integrierenden Bestandteil des Fluches der Erbsünde ansehen, von dem sich das Menschengeschlecht nimmer befreien kann.“

Diese pessimistische Vorraussage Petzvals dürfte sich indessen nicht verwirklichen, vielmehr deuten insbesondere die späteren Bestrebungen anderer auf das Gegenteil hin. So hat 14 Jahre später (1884) Jankó den gleichen Gedanken hinsichtlich des einheitlichen Fingersatzes mit seiner Klaviatur ausgeführt, mit der Abweichung, daß die Tasten nicht in drei sondern in sechs Reihen, und zwar stufenförmig über einander angeordnet sind. Da aber diese Klaviatur für ein 12-stufiges System eingerichtet ist, so stellt sie sich eigentlich nur als eine auf eine bequeme Hand- und Fingerhaltung abzielende Verbesserung des gebräuchlichen Klavieres dar.

Zu den Tasteninstrumenten dagegen, die auch für eine reine Stimmung eingerichtet sind, gehören:

Das Harmonium von Appun, (das sogenannte mathematische Harmonium) mit 36 Stufen (1868), das Bosanquetsche Harmonium

mit 53 Stufen (1875), das Enharmonium des Japaners Tanaka mit 20 Stufen (1890), das Harmonium von Steiner (1891) und zuletzt das Harmonium von Eitz mit 52 Stufen in jeder Oktave. Das letztere Instrument, welches sich im Institute für theoretische Physik der Universität Berlin befindet, ist wegen seiner zwar sinnreichen aber sehr verwickelten Klaviatur vom spieltechnischen Standpunkte aus schwer zu behandeln, dagegen für wissenschaftliche Zwecke ganz vorzüglich geeignet.

Diese Bestrebungen weisen wohl deutlich darauf hin, daß man die Sache keineswegs auf sich beruhen läßt; auch dürfen wir daraus mit einiger Sicherheit den Schluß ziehen, daß man nicht eher ruhen werde, bis nicht etwas Vollkommeneres aber genügend Einfaches gefunden sein wird. Und wenn auch nach der praktisch-musikalischen Seite (z. B. in betreff der Notenschrift) noch manche Ergänzung nötig sein wird, so werden doch Petzvals Untersuchungen ihren Wert behalten, und wird er doch immer als Führer dienen können.

---

## A. Reihe der reinen Quinten.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 = 1{\cdot}000000$ | *C* | $Q_{22}$ | $\frac{3^{22}}{2^{34}} = 1{\cdot}826618$ | *Gis*³ | $Q_{44}$ | $\frac{3^{44}}{2^{69}} = 1{\cdot}668266$ | *Dis*⁶ |
| $\frac{3}{2} = 1{\cdot}500000$ | *G* | $Q_{23}$ | $\frac{3^{23}}{2^{36}} = 1{\cdot}369963$ | *Dis*³ | $Q_{45}$ | $\frac{3^{45}}{2^{71}} = 1{\cdot}251200$ | *Ais*⁶ |
| $\frac{3^2}{2^3} = 1{\cdot}125000$ | *D* | $Q_{24}$ | $\frac{3^{24}}{2^{38}} = 1{\cdot}027472$ | *Ais*³ | $Q_{46}$ | $\frac{3^{46}}{2^{72}} = 1{\cdot}876800$ | *Eis*⁶ |
| $\frac{3^3}{2^4} = 1{\cdot}687500$ | *A* | $Q_{25}$ | $\frac{3^{25}}{2^{39}} = 1{\cdot}541209$ | *Eis*³ | $Q_{47}$ | $\frac{3^{47}}{2^{74}} = 1{\cdot}407600$ | *His*⁶ |
| $\frac{3^4}{2^6} = 1{\cdot}265625$ | *E* | $Q_{26}$ | $\frac{3^{26}}{2^{41}} = 1{\cdot}155906$ | *His*³ | $Q_{48}$ | $\frac{3^{48}}{2^{76}} = 1{\cdot}055700$ | *Fis*⁶ |
| $\frac{3^5}{2^7} = 1{\cdot}898437$ | *H* | $Q_{27}$ | $\frac{3^{27}}{2^{42}} = 1{\cdot}733860$ | *Fis*³ | $Q_{49}$ | $\frac{3^{49}}{2^{77}} = 1{\cdot}583550$ | *Cis*⁷ |
| $\frac{3^6}{2^9} = 1{\cdot}423828$ | *Fis* | $Q_{28}$ | $\frac{3^{28}}{2^{44}} = 1{\cdot}300395$ | *Cis*⁴ | $Q_{50}$ | $\frac{3^{50}}{2^{79}} = 1{\cdot}187662$ | *Gis*⁷ |
| $\frac{3^7}{2^{11}} = 1{\cdot}067871$ | *Cis* | $Q_{29}$ | $\frac{3^{29}}{2^{45}} = 1{\cdot}950592$ | *Gis*⁴ | $Q_{51}$ | $\frac{3^{51}}{2^{80}} = 1{\cdot}781493$ | *Dis*⁷ |
| $\frac{3^8}{2^{12}} = 1{\cdot}601806$ | *Gis* | $Q_{30}$ | $\frac{3^{30}}{2^{47}} = 1{\cdot}462944$ | *Dis*⁴ | $Q_{52}$ | $\frac{3^{52}}{2^{82}} = 1{\cdot}336120$ | *Ais*⁷ |
| $\frac{3^9}{2^{14}} = 1{\cdot}201354$ | *Dis* | $Q_{31}$ | $\frac{3^{31}}{2^{49}} = 1{\cdot}097208$ | *Ais*⁴ | $Q_{53}$ | $\frac{3^{53}}{2^{84}} = 1{\cdot}002090$ | *Eis*⁷ |
| $\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1{\cdot}802032$ | *Ais* | $Q_{32}$ | $\frac{3^{32}}{2^{50}} = 1{\cdot}645812$ | *Eis*⁴ | $Q_{54}$ | $\frac{3^{54}}{2^{85}} = 1{\cdot}503135$ | *His*⁷ |
| $\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1{\cdot}351524$ | *Eis* | $Q_{33}$ | $\frac{3^{33}}{2^{52}} = 1{\cdot}234359$ | *His*⁴ | $Q_{55}$ | $\frac{3^{55}}{2^{87}} = 1{\cdot}127351$ | *Fis*⁷ |
| $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{\cdot}013643$ | *His* | $Q_{34}$ | $\frac{3^{34}}{2^{53}} = 1{\cdot}851539$ | *Fis*⁴ | $Q_{56}$ | $\frac{3^{56}}{2^{88}} = 1{\cdot}691027$ | *Cis*⁸ |
| $\frac{3^{13}}{2^{20}} = 1{\cdot}520464$ | *Fis*² | $Q_{35}$ | $\frac{3^{35}}{2^{55}} = 1{\cdot}388654$ | *Cis*⁵ | $Q_{57}$ | $\frac{3^{57}}{2^{90}} = 1{\cdot}268270$ | *Gis*⁸ |
| $\frac{3^{14}}{2^{22}} = 1{\cdot}140348$ | *Cis*² | $Q_{36}$ | $\frac{3^{36}}{2^{57}} = 1{\cdot}041490$ | *Gis*⁵ | $Q_{58}$ | $\frac{3^{58}}{2^{91}} = 1{\cdot}902405$ | *Dis*⁸ |
| $\frac{3^{15}}{2^{23}} = 1{\cdot}710523$ | *Gis*² | $Q_{37}$ | $\frac{3^{37}}{2^{58}} = 1{\cdot}562236$ | *Dis*⁵ | $Q_{59}$ | $\frac{3^{59}}{2^{93}} = 1{\cdot}426804$ | *Ais*⁸ |
| $\frac{3^{16}}{2^{25}} = 1{\cdot}282892$ | *Dis*² | $Q_{38}$ | $\frac{3^{38}}{2^{60}} = 1{\cdot}171677$ | *Ais*⁵ | $Q_{60}$ | $\frac{3^{60}}{2^{95}} = 1{\cdot}070103$ | *Eis*⁸ |
| $\frac{3^{17}}{2^{26}} = 1{\cdot}924338$ | *Ais*² | $Q_{39}$ | $\frac{3^{39}}{2^{61}} = 1{\cdot}757515$ | *Eis*⁵ | $Q_{61}$ | $\frac{3^{61}}{2^{96}} = 1{\cdot}605154$ | *His*⁸ |
| $\frac{3^{18}}{2^{28}} = 1{\cdot}443253$ | *Eis*² | $Q_{40}$ | $\frac{3^{40}}{2^{63}} = 1{\cdot}318136$ | *His*⁵ | $Q_{62}$ | $\frac{3^{62}}{2^{98}} = 1{\cdot}203866$ | *Fis*⁸ |
| $\frac{3^{19}}{2^{30}} = 1{\cdot}082440$ | *His*² | $Q_{41}$ | $\frac{3^{41}}{2^{64}} = 1{\cdot}977205$ | *Fis*⁵ | $Q_{63}$ | $\frac{3^{63}}{2^{99}} = 1{\cdot}805799$ | *Cis*⁹ |
| $\frac{3^{20}}{2^{31}} = 1{\cdot}623660$ | *Fis*² | $Q_{42}$ | $\frac{3^{42}}{2^{66}} = 1{\cdot}482903$ | *Cis*⁶ | $Q_{64}$ | $\frac{3^{64}}{2^{101}} = 1{\cdot}354349$ | *Gis*⁹ |
| $\frac{3^{21}}{2^{33}} = 1{\cdot}217745$ | *Cis*³ | $Q_{43}$ | $\frac{3^{43}}{2^{68}} = 1{\cdot}112177$ | *Gis*⁶ | $Q_{65}$ | $\frac{3^{65}}{2^{103}} = 1{\cdot}015762$ | *Dis*⁹ |

## A. Reihe der reinen Quinten.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{66}$ | $\frac{3^{66}}{2^{104}} = 1{\cdot}523643$ | *Ais*$^{9}$ | $Q_{88}$ | $\frac{3^{88}}{2^{139}} = 1{\cdot}391557$ | *Eis*$^{12}$ | $Q_{110}$ | $\frac{3^{110}}{2^{174}} = 1{\cdot}270921$ | *His*$^{15}$ |
| $Q_{67}$ | $\frac{3^{67}}{2^{106}} = 1{\cdot}142732$ | *Eis*$^{9}$ | $Q_{89}$ | $\frac{3^{89}}{2^{141}} = 1{\cdot}043667$ | *His*$^{12}$ | $Q_{111}$ | $\frac{3^{111}}{2^{175}} = 1{\cdot}906382$ | *Fis*$^{15}$ |
| $Q_{68}$ | $\frac{3^{68}}{2^{107}} = 1{\cdot}714098$ | *His*$^{9}$ | $Q_{90}$ | $\frac{3^{90}}{2^{142}} = 1{\cdot}565501$ | *Fis*$^{12}$ | $Q_{112}$ | $\frac{3^{112}}{2^{177}} = 1{\cdot}429786$ | *Cis*$^{16}$ |
| $Q_{69}$ | $\frac{3^{69}}{2^{109}} = 1{\cdot}285573$ | *Fis*$^{9}$ | $Q_{91}$ | $\frac{3^{91}}{2^{144}} = 1{\cdot}174126$ | *Cis*$^{13}$ | $Q_{113}$ | $\frac{3^{113}}{2^{179}} = 1{\cdot}072340$ | *Gis*$^{16}$ |
| $Q_{70}$ | $\frac{3^{70}}{2^{110}} = 1{\cdot}928360$ | *Cis*$^{10}$ | $Q_{92}$ | $\frac{3^{92}}{2^{145}} = 1{\cdot}761189$ | *Gis*$^{13}$ | $Q_{114}$ | $\frac{3^{114}}{2^{180}} = 1{\cdot}608510$ | *Dis*$^{16}$ |
| $Q_{71}$ | $\frac{3^{71}}{2^{112}} = 1{\cdot}446270$ | *Gis*$^{10}$ | $Q_{93}$ | $\frac{3^{93}}{2^{147}} = 1{\cdot}320892$ | *Dis*$^{13}$ | $Q_{115}$ | $\frac{3^{115}}{2^{182}} = 1{\cdot}206382$ | *Ais*$^{16}$ |
| $Q_{72}$ | $\frac{3^{72}}{2^{114}} = 1{\cdot}084702$ | *Dis*$^{10}$ | $Q_{94}$ | $\frac{3^{94}}{2^{148}} = 1{\cdot}981338$ | *Ais*$^{13}$ | $Q_{116}$ | $\frac{3^{116}}{2^{183}} = 1{\cdot}809573$ | *Eis*$^{16}$ |
| $Q_{73}$ | $\frac{3^{73}}{2^{115}} = 1{\cdot}627054$ | *Ais*$^{10}$ | $Q_{95}$ | $\frac{3^{95}}{2^{150}} = 1{\cdot}486003$ | *Eis*$^{13}$ | $Q_{117}$ | $\frac{3^{117}}{2^{185}} = 1{\cdot}357180$ | *His*$^{16}$ |
| $Q_{74}$ | $\frac{3^{74}}{2^{117}} = 1{\cdot}220290$ | *Eis*$^{10}$ | $Q_{96}$ | $\frac{3^{96}}{2^{152}} = 1{\cdot}114502$ | *His*$^{13}$ | $Q_{118}$ | $\frac{3^{118}}{2^{187}} = 1{\cdot}017885$ | *Fis*$^{16}$ |
| $Q_{75}$ | $\frac{3^{75}}{2^{118}} = 1{\cdot}830436$ | *His*$^{10}$ | $Q_{97}$ | $\frac{3^{97}}{2^{153}} = 1{\cdot}671754$ | *Fis*$^{13}$ | $Q_{119}$ | $\frac{3^{119}}{2^{188}} = 1{\cdot}526828$ | *Cis*$^{17}$ |
| $Q_{76}$ | $\frac{3^{76}}{2^{120}} = 1{\cdot}372827$ | *Fis*$^{10}$ | $Q_{98}$ | $\frac{3^{98}}{2^{155}} = 1{\cdot}253815$ | *Cis*$^{14}$ | $Q_{120}$ | $\frac{3^{120}}{2^{190}} = 1{\cdot}145121$ | *Gis*$^{17}$ |
| $Q_{77}$ | $\frac{3^{77}}{2^{122}} = 1{\cdot}029620$ | *Cis*$^{11}$ | $Q_{99}$ | $\frac{3^{99}}{2^{156}} = 1{\cdot}880723$ | *Gis*$^{14}$ | $Q_{121}$ | $\frac{3^{121}}{2^{191}} = 1{\cdot}717681$ | *Dis*$^{17}$ |
| $Q_{78}$ | $\frac{3^{78}}{2^{123}} = 1{\cdot}544430$ | *Gis*$^{11}$ | $Q_{100}$ | $\frac{3^{100}}{2^{158}} = 1{\cdot}410542$ | *Dis*$^{14}$ | $Q_{122}$ | $\frac{3^{122}}{2^{193}} = 1{\cdot}288261$ | *Ais*$^{17}$ |
| $Q_{79}$ | $\frac{3^{79}}{2^{125}} = 1{\cdot}158322$ | *Dis*$^{11}$ | $Q_{101}$ | $\frac{3^{101}}{2^{160}} = 1{\cdot}057906$ | *Ais*$^{14}$ | $Q_{123}$ | $\frac{3^{123}}{2^{194}} = 1{\cdot}932391$ | *Eis*$^{17}$ |
| $Q_{80}$ | $\frac{3^{80}}{2^{126}} = 1{\cdot}737484$ | *Ais*$^{11}$ | $Q_{102}$ | $\frac{3^{102}}{2^{161}} = 1{\cdot}586860$ | *Eis*$^{14}$ | $Q_{124}$ | $\frac{3^{124}}{2^{196}} = 1{\cdot}449293$ | *His*$^{17}$ |
| $Q_{81}$ | $\frac{3^{81}}{2^{128}} = 1{\cdot}303113$ | *Eis*$^{11}$ | $Q_{103}$ | $\frac{3^{103}}{2^{163}} = 1{\cdot}190145$ | *His*$^{14}$ | $Q_{125}$ | $\frac{3^{125}}{2^{198}} = 1{\cdot}086970$ | *Fis*$^{17}$ |
| $Q_{82}$ | $\frac{3^{82}}{2^{129}} = 1{\cdot}954669$ | *His*$^{11}$ | $Q_{104}$ | $\frac{3^{104}}{2^{164}} = 1{\cdot}785217$ | *Fis*$^{14}$ | $Q_{126}$ | $\frac{3^{126}}{2^{199}} = 1{\cdot}630455$ | *Cis*$^{18}$ |
| $Q_{83}$ | $\frac{3^{83}}{2^{131}} = 1{\cdot}466002$ | *Fis*$^{11}$ | $Q_{105}$ | $\frac{3^{105}}{2^{166}} = 1{\cdot}338913$ | *Cis*$^{15}$ | $Q_{127}$ | $\frac{3^{127}}{2^{201}} = 1{\cdot}222841$ | *Gis*$^{18}$ |
| $Q_{84}$ | $\frac{3^{84}}{2^{133}} = 1{\cdot}099501$ | *Cis*$^{12}$ | $Q_{106}$ | $\frac{3^{106}}{2^{168}} = 1{\cdot}004184$ | *Gis*$^{15}$ | $Q_{128}$ | $\frac{3^{128}}{2^{202}} = 1{\cdot}834262$ | *Dis*$^{18}$ |
| $Q_{85}$ | $\frac{3^{85}}{2^{134}} = 1{\cdot}649252$ | *Gis*$^{12}$ | $Q_{107}$ | $\frac{3^{107}}{2^{169}} = 1{\cdot}506277$ | *Dis*$^{15}$ | $Q_{129}$ | $\frac{3^{129}}{2^{204}} = 1{\cdot}375696$ | *Ais*$^{18}$ |
| $Q_{86}$ | $\frac{3^{86}}{2^{136}} = 1{\cdot}236939$ | *Dis*$^{12}$ | $Q_{108}$ | $\frac{3^{108}}{2^{171}} = 1{\cdot}129708$ | *Ais*$^{15}$ | $Q_{130}$ | $\frac{3^{130}}{2^{206}} = 1{\cdot}031772$ | *Eis*$^{18}$ |
| $Q_{87}$ | $\frac{3^{87}}{2^{137}} = 1{\cdot}855409$ | *Ais*$^{12}$ | $Q_{109}$ | $\frac{3^{109}}{2^{172}} = 1{\cdot}694562$ | *Eis*$^{15}$ | $Q_{131}$ | $\frac{3^{131}}{2^{207}} = 1{\cdot}547658$ | *His*$^{18}$ |

A. Reihe der reinen Quinten.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{132}$ | $\frac{3^{132}}{2^{209}}$ = 1·160744 | $Fis^{18}$ | $Q_{154}$ | $\frac{3^{154}}{2^{244}}$ = 1·060118 | $Cis^{22}$ | $Q_{176}$ | $\frac{3^{176}}{2^{278}}$ = 1·936431 | $Gis^{25}$ |
| $Q_{133}$ | $\frac{3^{133}}{2^{210}}$ = 1·741116 | $Cis^{19}$ | $Q_{155}$ | $\frac{3^{155}}{2^{245}}$ = 1·590177 | $Gis^{22}$ | $Q_{177}$ | $\frac{3^{177}}{2^{280}}$ = 1·452323 | $Dis^{25}$ |
| $Q_{134}$ | $\frac{3^{134}}{2^{212}}$ = 1·305837 | $Gis^{19}$ | $Q_{156}$ | $\frac{3^{156}}{2^{247}}$ = 1·192632 | $Dis^{22}$ | $Q_{178}$ | $\frac{3^{178}}{2^{282}}$ = 1·089242 | $Ais^{25}$ |
| $Q_{135}$ | $\frac{3^{135}}{2^{213}}$ = 1·958755 | $Dis^{19}$ | $Q_{157}$ | $\frac{3^{157}}{2^{248}}$ = 1·788949 | $Ais^{22}$ | $Q_{179}$ | $\frac{3^{179}}{2^{283}}$ = 1·633863 | $Eis^{25}$ |
| $Q_{136}$ | $\frac{3^{136}}{2^{215}}$ = 1·469066 | $Ais^{19}$ | $Q_{158}$ | $\frac{3^{158}}{2^{250}}$ = 1·341712 | $Eis^{22}$ | $Q_{180}$ | $\frac{3^{180}}{2^{285}}$ = 1·225397 | $His^{25}$ |
| $Q_{137}$ | $\frac{3^{137}}{2^{217}}$ = 1·101800 | $Eis^{19}$ | $Q_{159}$ | $\frac{3^{159}}{2^{252}}$ = 1·006284 | $His^{22}$ | $Q_{181}$ | $\frac{3^{181}}{2^{286}}$ = 1·838096 | $Fis^{25}$ |
| $Q_{138}$ | $\frac{3^{138}}{2^{218}}$ = 1·652700 | $His^{19}$ | $Q_{160}$ | $\frac{3^{160}}{2^{253}}$ = 1·509426 | $Fis^{22}$ | $Q_{182}$ | $\frac{3^{182}}{2^{288}}$ = 1·378572 | $Cis^{26}$ |
| $Q_{139}$ | $\frac{3^{139}}{2^{220}}$ = 1·239525 | $Fis^{19}$ | $Q_{161}$ | $\frac{3^{161}}{2^{255}}$ = 1·132069 | $Cis^{23}$ | $Q_{183}$ | $\frac{3^{183}}{2^{290}}$ = 1·033929 | $Gis^{26}$ |
| $Q_{140}$ | $\frac{3^{140}}{2^{221}}$ = 1·859287 | $Cis^{20}$ | $Q_{162}$ | $\frac{3^{162}}{2^{256}}$ = 1·698104 | $Gis^{23}$ | $Q_{184}$ | $\frac{3^{184}}{2^{291}}$ = 1·550894 | $Dis^{26}$ |
| $Q_{141}$ | $\frac{3^{141}}{2^{223}}$ = 1·394465 | $Gis^{20}$ | $Q_{163}$ | $\frac{3^{163}}{2^{258}}$ = 1·273578 | $Dis^{23}$ | $Q_{185}$ | $\frac{3^{185}}{2^{293}}$ = 1·163170 | $Ais^{26}$ |
| $Q_{142}$ | $\frac{3^{142}}{2^{225}}$ = 1·045849 | $Dis^{20}$ | $Q_{164}$ | $\frac{3^{164}}{2^{259}}$ = 1·910367 | $Ais^{23}$ | $Q_{186}$ | $\frac{3^{186}}{2^{294}}$ = 1·744755 | $Eis^{26}$ |
| $Q_{143}$ | $\frac{3^{143}}{2^{226}}$ = 1·568774 | $Ais^{20}$ | $Q_{165}$ | $\frac{3^{165}}{2^{261}}$ = 1·432775 | $Eis^{23}$ | $Q_{187}$ | $\frac{3^{187}}{2^{296}}$ = 1·308566 | $His^{26}$ |
| $Q_{144}$ | $\frac{3^{144}}{2^{228}}$ = 1·176580 | $Eis^{20}$ | $Q_{166}$ | $\frac{3^{166}}{2^{263}}$ = 1·074581 | $His^{23}$ | $Q_{188}$ | $\frac{3^{188}}{2^{297}}$ = 1·962850 | $Fis^{26}$ |
| $Q_{145}$ | $\frac{3^{145}}{2^{229}}$ = 1·764870 | $His^{20}$ | $Q_{167}$ | $\frac{3^{167}}{2^{264}}$ = 1·611872 | $Fis^{23}$ | $Q_{189}$ | $\frac{3^{189}}{2^{299}}$ = 1·472137 | $Cis^{27}$ |
| $Q_{146}$ | $\frac{3^{146}}{2^{231}}$ = 1·323653 | $Fis^{20}$ | $Q_{168}$ | $\frac{3^{168}}{2^{266}}$ = 1·208904 | $Cis^{24}$ | $Q_{190}$ | $\frac{3^{190}}{2^{301}}$ = 1·104103 | $Gis^{27}$ |
| $Q_{147}$ | $\frac{3^{147}}{2^{232}}$ = 1·985479 | $Cis^{21}$ | $Q_{169}$ | $\frac{3^{169}}{2^{267}}$ = 1·813356 | $Gis^{24}$ | $Q_{191}$ | $\frac{3^{191}}{2^{302}}$ = 1·656154 | $Dis^{27}$ |
| $Q_{148}$ | $\frac{3^{148}}{2^{234}}$ = 1·489109 | $Gis^{21}$ | $Q_{170}$ | $\frac{3^{170}}{2^{269}}$ = 1·360017 | $Dis^{24}$ | $Q_{192}$ | $\frac{3^{192}}{2^{304}}$ = 1·242116 | $Ais^{27}$ |
| $Q_{149}$ | $\frac{3^{149}}{2^{236}}$ = 1·116832 | $Dis^{21}$ | $Q_{171}$ | $\frac{3^{171}}{2^{271}}$ = 1·020013 | $Ais^{24}$ | $Q_{193}$ | $\frac{3^{193}}{2^{305}}$ = 1·863174 | $Eis^{27}$ |
| $Q_{150}$ | $\frac{3^{150}}{2^{237}}$ = 1·675248 | $Ais^{21}$ | $Q_{172}$ | $\frac{3^{172}}{2^{272}}$ = 1·530019 | $Eis^{24}$ | $Q_{194}$ | $\frac{3^{194}}{2^{307}}$ = 1·397380 | $His^{27}$ |
| $Q_{151}$ | $\frac{3^{151}}{2^{239}}$ = 1·256436 | $Eis^{21}$ | $Q_{173}$ | $\frac{3^{173}}{2^{274}}$ = 1·147514 | $His^{24}$ | $Q_{195}$ | $\frac{3^{195}}{2^{309}}$ = 1·048035 | $Fis^{27}$ |
| $Q_{152}$ | $\frac{3^{152}}{2^{240}}$ = 1·884654 | $His^{21}$ | $Q_{174}$ | $\frac{3^{174}}{2^{275}}$ = 1·721272 | $Fis^{24}$ | $Q_{196}$ | $\frac{3^{196}}{2^{310}}$ = 1·572053 | $Cis^{28}$ |
| $Q_{153}$ | $\frac{3^{153}}{2^{242}}$ = 1·413490 | $Fis^{21}$ | $Q_{175}$ | $\frac{3^{175}}{2^{277}}$ = 1·290954 | $Cis^{25}$ | $Q_{197}$ | $\frac{3^{197}}{2^{312}}$ = 1·179039 | $Gis^{28}$ |

B. Reihe der reinen Quarten.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_0$ | $1 = 1{\cdot}000000$ | *C* | $Q_{-22}$ | $\frac{2^{35}}{3^{22}} = 1{\cdot}094919$ | *Fes*$^3$ | $Q_{-44}$ | $\frac{2^{70}}{3^{44}} = 1{\cdot}198849$ | *Bes*$^6$ |
| $Q_{-1}$ | $\frac{2^{2}}{3^{1}} = 1{\cdot}333333$ | *F* | $Q_{-23}$ | $\frac{2^{37}}{3^{23}} = 1{\cdot}459892$ | *Bes*$^3$ | $Q_{-45}$ | $\frac{2^{72}}{3^{45}} = 1{\cdot}598465$ | *Es*$^7$ |
| $Q_{-2}$ | $\frac{2^{4}}{3^{2}} = 1{\cdot}777777$ | *B* | $Q_{-24}$ | $\frac{2^{39}}{3^{24}} = 1{\cdot}946523$ | *Es*$^4$ | $Q_{-46}$ | $\frac{2^{73}}{3^{46}} = 1{\cdot}065643$ | *As*$^7$ |
| $Q_{-3}$ | $\frac{2^{5}}{3^{3}} = 1{\cdot}185185$ | *Es* | $Q_{-25}$ | $\frac{2^{40}}{3^{25}} = 1{\cdot}297682$ | *As*$^4$ | $Q_{-47}$ | $\frac{2^{75}}{3^{47}} = 1{\cdot}420858$ | *Des*$^7$ |
| $Q_{-4}$ | $\frac{2^{7}}{3^{4}} = 1{\cdot}580246$ | *As* | $Q_{-26}$ | $\frac{2^{42}}{3^{26}} = 1{\cdot}730243$ | *Des*$^4$ | $Q_{-48}$ | $\frac{2^{77}}{3^{48}} = 1{\cdot}894477$ | *Ges*$^7$ |
| $Q_{-5}$ | $\frac{2^{8}}{3^{5}} = 1{\cdot}053497$ | *Des* | $Q_{-27}$ | $\frac{2^{43}}{3^{27}} = 1{\cdot}153495$ | *Ges*$^4$ | $Q_{-49}$ | $\frac{2^{78}}{3^{49}} = 1{\cdot}262984$ | *Ces*$^7$ |
| $Q_{-6}$ | $\frac{2^{10}}{3^{6}} = 1{\cdot}404663$ | *Ges* | $Q_{-28}$ | $\frac{2^{45}}{3^{28}} = 1{\cdot}537994$ | *Ces*$^4$ | $Q_{-50}$ | $\frac{2^{80}}{3^{50}} = 1{\cdot}683979$ | *Fes*$^7$ |
| $Q_{-7}$ | $\frac{2^{12}}{3^{7}} = 1{\cdot}872885$ | *Ces* | $Q_{-29}$ | $\frac{2^{46}}{3^{29}} = 1{\cdot}025329$ | *Fes*$^4$ | $Q_{-51}$ | $\frac{2^{81}}{3^{51}} = 1{\cdot}122653$ | *Bes*$^7$ |
| $Q_{-8}$ | $\frac{2^{13}}{3^{8}} = 1{\cdot}248590$ | *Fes* | $Q_{-30}$ | $\frac{2^{48}}{3^{30}} = 1{\cdot}367105$ | *Bes*$^4$ | $Q_{-52}$ | $\frac{2^{83}}{3^{52}} = 1{\cdot}496871$ | *Es*$^8$ |
| $Q_{-9}$ | $\frac{2^{15}}{3^{9}} = 1{\cdot}664786$ | *Bes* | $Q_{-31}$ | $\frac{2^{50}}{3^{31}} = 1{\cdot}822807$ | *Es*$^5$ | $Q_{-53}$ | $\frac{2^{85}}{3^{53}} = 1{\cdot}995828$ | *As*$^8$ |
| $Q_{-10}$ | $\frac{2^{16}}{3^{10}} = 1{\cdot}109857$ | *Es*$^2$ | $Q_{-32}$ | $\frac{2^{51}}{3^{32}} = 1{\cdot}215205$ | *As*$^5$ | $Q_{-54}$ | $\frac{2^{86}}{3^{54}} = 1{\cdot}330552$ | *Des*$^8$ |
| $Q_{-11}$ | $\frac{2^{18}}{3^{11}} = 1{\cdot}479810$ | *As*$^2$ | $Q_{-33}$ | $\frac{2^{53}}{3^{33}} = 1{\cdot}620273$ | *Des*$^5$ | $Q_{-55}$ | $\frac{2^{88}}{3^{55}} = 1{\cdot}774069$ | *Ges*$^8$ |
| $Q_{-12}$ | $\frac{2^{20}}{3^{12}} = 1{\cdot}973080$ | *Des*$^2$ | $Q_{-34}$ | $\frac{2^{54}}{3^{34}} = 1{\cdot}080182$ | *Ges*$^5$ | $Q_{-56}$ | $\frac{2^{89}}{3^{56}} = 1{\cdot}182712$ | *Ces*$^8$ |
| $Q_{-13}$ | $\frac{2^{21}}{3^{13}} = 1{\cdot}315387$ | *Ges*$^2$ | $Q_{-35}$ | $\frac{2^{56}}{3^{35}} = 1{\cdot}440243$ | *Ces*$^5$ | $Q_{-57}$ | $\frac{2^{91}}{3^{57}} = 1{\cdot}576950$ | *Fes*$^8$ |
| $Q_{-14}$ | $\frac{2^{23}}{3^{14}} = 1{\cdot}753849$ | *Ces*$^2$ | $Q_{-36}$ | $\frac{2^{58}}{3^{36}} = 1{\cdot}920324$ | *Fes*$^5$ | $Q_{-58}$ | $\frac{2^{92}}{3^{58}} = 1{\cdot}051300$ | *Bes*$^8$ |
| $Q_{-15}$ | $\frac{2^{24}}{3^{15}} = 1{\cdot}169233$ | *Fes*$^2$ | $Q_{-37}$ | $\frac{2^{59}}{3^{37}} = 1{\cdot}280216$ | *Bes*$^5$ | $Q_{-59}$ | $\frac{2^{94}}{3^{59}} = 1{\cdot}401733$ | *Es*$^9$ |
| $Q_{-16}$ | $\frac{2^{26}}{3^{16}} = 1{\cdot}558977$ | *Bes*$^2$ | $Q_{-38}$ | $\frac{2^{61}}{3^{38}} = 1{\cdot}706954$ | *Es*$^6$ | $Q_{-60}$ | $\frac{2^{96}}{3^{60}} = 1{\cdot}868978$ | *As*$^9$ |
| $Q_{-17}$ | $\frac{2^{27}}{3^{17}} = 1{\cdot}039318$ | *Es*$^3$ | $Q_{-39}$ | $\frac{2^{62}}{3^{39}} = 1{\cdot}137969$ | *As*$^6$ | $Q_{-61}$ | $\frac{2^{97}}{3^{61}} = 1{\cdot}245985$ | *Des*$^9$ |
| $Q_{-18}$ | $\frac{2^{29}}{3^{18}} = 1{\cdot}385757$ | *As*$^3$ | $Q_{-40}$ | $\frac{2^{64}}{3^{40}} = 1{\cdot}517293$ | *Des*$^6$ | $Q_{-62}$ | $\frac{2^{99}}{3^{62}} = 1{\cdot}661314$ | *Ges*$^9$ |
| $Q_{-19}$ | $\frac{2^{31}}{3^{19}} = 1{\cdot}847676$ | *Des*$^3$ | $Q_{-41}$ | $\frac{2^{65}}{3^{41}} = 1{\cdot}011528$ | *Ges*$^6$ | $Q_{-63}$ | $\frac{2^{100}}{3^{63}} = 1{\cdot}107542$ | *Ces*$^9$ |
| $Q_{-20}$ | $\frac{2^{32}}{3^{20}} = 1{\cdot}231784$ | *Ges*$^3$ | $Q_{-42}$ | $\frac{2^{67}}{3^{42}} = 1{\cdot}348705$ | *Ces*$^6$ | $Q_{-64}$ | $\frac{2^{102}}{3^{64}} = 1{\cdot}476723$ | *Fes*$^9$ |
| $Q_{-21}$ | $\frac{2^{34}}{3^{21}} = 1{\cdot}642379$ | *Ces*$^3$ | $Q_{-43}$ | $\frac{2^{69}}{3^{43}} = 1{\cdot}798273$ | *Fes*$^6$ | $Q_{-65}$ | $\frac{2^{104}}{3^{65}} = 1{\cdot}968964$ | *Bes*$^9$ |

## B. Reihe der reinen Quarten.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{-66}$ | $\frac{2^{105}}{3^{66}} = 1{\cdot}312643$ | $Es^{10}$ | $Q_{-88}$ | $\frac{2^{140}}{3^{88}} = 1{\cdot}437238$ | $As^{13}$ | $Q_{-110}$ | $\frac{2^{175}}{3^{110}} = 1{\cdot}573661$ | $Des^{16}$ |
| $Q_{-67}$ | $\frac{2^{107}}{3^{67}} = 1{\cdot}750191$ | $As^{10}$ | $Q_{-89}$ | $\frac{2^{142}}{3^{89}} = 1{\cdot}916318$ | $Des^{13}$ | $Q_{-111}$ | $\frac{2^{176}}{3^{111}} = 1{\cdot}049107$ | $Ges^{16}$ |
| $Q_{-68}$ | $\frac{2^{108}}{3^{68}} = 1{\cdot}166794$ | $Des^{10}$ | $Q_{-90}$ | $\frac{2^{143}}{3^{90}} = 1{\cdot}277545$ | $Ges^{13}$ | $Q_{-112}$ | $\frac{2^{178}}{3^{112}} = 1{\cdot}398809$ | $Ces^{16}$ |
| $Q_{-69}$ | $\frac{2^{110}}{3^{69}} = 1{\cdot}555725$ | $Ges^{10}$ | $Q_{-91}$ | $\frac{2^{145}}{3^{91}} = 1{\cdot}703394$ | $Ces^{13}$ | $Q_{-113}$ | $\frac{2^{180}}{3^{113}} = 1{\cdot}865079$ | $Fes^{16}$ |
| $Q_{-70}$ | $\frac{2^{111}}{3^{70}} = 1{\cdot}037150$ | $Ces^{10}$ | $Q_{-92}$ | $\frac{2^{146}}{3^{92}} = 1{\cdot}135596$ | $Fes^{13}$ | $Q_{-114}$ | $\frac{2^{181}}{3^{114}} = 1{\cdot}243386$ | $Bes^{16}$ |
| $Q_{-71}$ | $\frac{2^{113}}{3^{71}} = 1{\cdot}382867$ | $Fes^{10}$ | $Q_{-93}$ | $\frac{2^{148}}{3^{93}} = 1{\cdot}514128$ | $Bes^{13}$ | $Q_{-115}$ | $\frac{2^{183}}{3^{115}} = 1{\cdot}657848$ | $Es^{17}$ |
| $Q_{-72}$ | $\frac{2^{115}}{3^{72}} = 1{\cdot}843822$ | $Bes^{10}$ | $Q_{-94}$ | $\frac{2^{149}}{3^{94}} = 1{\cdot}009418$ | $Es^{14}$ | $Q_{-116}$ | $\frac{2^{184}}{3^{116}} = 1{\cdot}105232$ | $As^{17}$ |
| $Q_{-73}$ | $\frac{2^{116}}{3^{73}} = 1{\cdot}229215$ | $Es^{11}$ | $Q_{-95}$ | $\frac{2^{151}}{3^{95}} = 1{\cdot}345891$ | $As^{14}$ | $Q_{-117}$ | $\frac{2^{186}}{3^{117}} = 1{\cdot}473643$ | $Des^{17}$ |
| $Q_{-74}$ | $\frac{2^{118}}{3^{74}} = 1{\cdot}638953$ | $As^{11}$ | $Q_{-96}$ | $\frac{2^{153}}{3^{96}} = 1{\cdot}794522$ | $Des^{14}$ | $Q_{-118}$ | $\frac{2^{188}}{3^{118}} = 1{\cdot}964857$ | $Ges^{17}$ |
| $Q_{-75}$ | $\frac{2^{119}}{3^{75}} = 1{\cdot}092635$ | $Des^{11}$ | $Q_{-97}$ | $\frac{2^{154}}{3^{97}} = 1{\cdot}196348$ | $Ges^{14}$ | $Q_{-119}$ | $\frac{2^{189}}{3^{119}} = 1{\cdot}309905$ | $Ces^{17}$ |
| $Q_{-76}$ | $\frac{2^{121}}{3^{76}} = 1{\cdot}456847$ | $Ges^{11}$ | $Q_{-98}$ | $\frac{2^{156}}{3^{98}} = 1{\cdot}595131$ | $Ces^{14}$ | $Q_{-120}$ | $\frac{2^{191}}{3^{120}} = 1{\cdot}746540$ | $Fes^{17}$ |
| $Q_{-77}$ | $\frac{2^{123}}{3^{77}} = 1{\cdot}942463$ | $Ces^{11}$ | $Q_{-99}$ | $\frac{2^{157}}{3^{99}} = 1{\cdot}063420$ | $Fes^{14}$ | $Q_{-121}$ | $\frac{2^{192}}{3^{121}} = 1{\cdot}164360$ | $Bes^{17}$ |
| $Q_{-78}$ | $\frac{2^{124}}{3^{78}} = 1{\cdot}294975$ | $Fes^{11}$ | $Q_{-100}$ | $\frac{2^{159}}{3^{100}} = 1{\cdot}417894$ | $Bes^{14}$ | $Q_{-122}$ | $\frac{2^{194}}{3^{122}} = 1{\cdot}552480$ | $Es^{18}$ |
| $Q_{-79}$ | $\frac{2^{126}}{3^{79}} = 1{\cdot}726634$ | $Bes^{11}$ | $Q_{-101}$ | $\frac{2^{161}}{3^{101}} = 1{\cdot}890525$ | $Es^{15}$ | $Q_{-123}$ | $\frac{2^{195}}{3^{123}} = 1{\cdot}034986$ | $As^{18}$ |
| $Q_{-80}$ | $\frac{2^{127}}{3^{80}} = 1{\cdot}151089$ | $Es^{12}$ | $Q_{-102}$ | $\frac{2^{162}}{3^{102}} = 1{\cdot}260350$ | $As^{15}$ | $Q_{-124}$ | $\frac{2^{197}}{3^{124}} = 1{\cdot}379982$ | $Des^{18}$ |
| $Q_{-81}$ | $\frac{2^{129}}{3^{81}} = 1{\cdot}534785$ | $As^{12}$ | $Q_{-103}$ | $\frac{2^{164}}{3^{103}} = 1{\cdot}680467$ | $Des^{15}$ | $Q_{-125}$ | $\frac{1^{199}}{3^{125}} = 1{\cdot}839976$ | $Ges^{18}$ |
| $Q_{-82}$ | $\frac{2^{130}}{3^{82}} = 1{\cdot}023190$ | $Des^{12}$ | $Q_{-104}$ | $\frac{2^{165}}{3^{104}} = 1{\cdot}120311$ | $Ges^{15}$ | $Q_{-126}$ | $\frac{2^{200}}{3^{126}} = 1{\cdot}226651$ | $Ces^{18}$ |
| $Q_{-83}$ | $\frac{2^{132}}{3^{83}} = 1{\cdot}364254$ | $Ges^{12}$ | $Q_{-105}$ | $\frac{2^{167}}{3^{105}} = 1{\cdot}493748$ | $Ces^{15}$ | $Q_{-127}$ | $\frac{2^{202}}{3^{127}} = 1{\cdot}635534$ | $Fes^{18}$ |
| $Q_{-84}$ | $\frac{2^{134}}{3^{84}} = 1{\cdot}819005$ | $Ces^{12}$ | $Q_{-106}$ | $\frac{2^{169}}{3^{106}} = 1{\cdot}991664$ | $Fes^{15}$ | $Q_{-128}$ | $\frac{2^{203}}{3^{128}} = 1{\cdot}090356$ | $Bes^{18}$ |
| $Q_{-85}$ | $\frac{2^{135}}{3^{85}} = 1{\cdot}212670$ | $Fes^{12}$ | $Q_{-107}$ | $\frac{2^{170}}{3^{107}} = 1{\cdot}327776$ | $Bes^{15}$ | $Q_{-129}$ | $\frac{2^{205}}{3^{129}} = 1\ 453808$ | $Es^{19}$ |
| $Q_{-86}$ | $\frac{2^{137}}{3^{86}} = 1{\cdot}616893$ | $Bes^{12}$ | $Q_{-108}$ | $\frac{2^{172}}{3^{108}} = 1{\cdot}770368$ | $Es^{16}$ | $Q_{-130}$ | $\frac{2^{207}}{3^{130}} = 1{\cdot}938411$ | $As^{19}$ |
| $Q_{-87}$ | $\frac{2^{138}}{3^{87}} = 1{\cdot}077929$ | $Es^{13}$ | $Q_{-109}$ | $\frac{2^{173}}{3^{109}} = 1{\cdot}180245$ | $As^{16}$ | $Q_{-131}$ | $\frac{2^{208}}{3^{131}} = 1{\cdot}292274$ | $Des^{19}$ |

## B. Reihe der reinen Quarten.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{-132}$ | $\frac{2^{210}}{3^{132}}=1{\cdot}723032$ | $Ges^{19}$ | $Q_{-154}$ | $\frac{2^{245}}{3^{154}}=1{\cdot}886582$ | $Ces^{22}$ | $Q_{-176}$ | $\frac{2^{279}}{3^{176}}=1{\cdot}032827$ | $Fes^{25}$ |
| $Q_{-133}$ | $\frac{2^{211}}{3^{133}}=1{\cdot}148688$ | $Ces^{19}$ | $Q_{-155}$ | $\frac{2^{246}}{3^{155}}=1{\cdot}257721$ | $Fes^{22}$ | $Q_{-177}$ | $\frac{2^{281}}{3^{177}}=1{\cdot}377103$ | $Bes^{25}$ |
| $Q_{-134}$ | $\frac{2^{213}}{3^{134}}=1{\cdot}531584$ | $Fes^{19}$ | $Q_{-156}$ | $\frac{2^{248}}{3^{156}}=1{\cdot}676961$ | $Bes^{22}$ | $Q_{-178}$ | $\frac{2^{283}}{3^{178}}=1{\cdot}836138$ | $Es^{26}$ |
| $Q_{-135}$ | $\frac{2^{214}}{3^{135}}=1{\cdot}021056$ | $Bes^{19}$ | $Q_{-157}$ | $\frac{2^{249}}{3^{157}}=1{\cdot}117974$ | $Es^{23}$ | $Q_{-179}$ | $\frac{2^{284}}{3^{179}}=1{\cdot}224092$ | $As^{26}$ |
| $Q_{-136}$ | $\frac{2^{216}}{3^{136}}=1{\cdot}361408$ | $Es^{20}$ | $Q_{-158}$ | $\frac{2^{251}}{3^{158}}=1{\cdot}490632$ | $As^{23}$ | $Q_{-180}$ | $\frac{2^{286}}{3^{180}}=1{\cdot}632123$ | $Des^{26}$ |
| $Q_{-137}$ | $\frac{2^{218}}{3^{137}}=1{\cdot}815211$ | $As^{20}$ | $Q_{-159}$ | $\frac{2^{253}}{3^{159}}=1{\cdot}987510$ | $Des^{23}$ | $Q_{-181}$ | $\frac{2^{287}}{3^{181}}=1{\cdot}088082$ | $Ges^{26}$ |
| $Q_{-138}$ | $\frac{2^{219}}{3^{138}}=1{\cdot}210140$ | $Des^{20}$ | $Q_{-160}$ | $\frac{2^{254}}{3^{160}}=1{\cdot}325006$ | $Ges^{23}$ | $Q_{-182}$ | $\frac{2^{289}}{3^{182}}=1{\cdot}450776$ | $Ces^{26}$ |
| $Q_{-139}$ | $\frac{2^{221}}{3^{139}}=1{\cdot}613521$ | $Ges^{20}$ | $Q_{-161}$ | $\frac{2^{256}}{3^{161}}=1{\cdot}766675$ | $Ces^{23}$ | $Q_{-183}$ | $\frac{2^{291}}{3^{183}}=1{\cdot}934368$ | $Fes^{26}$ |
| $Q_{-140}$ | $\frac{2^{222}}{3^{140}}=1{\cdot}075680$ | $Ces^{20}$ | $Q_{-162}$ | $\frac{2^{257}}{3^{162}}=1{\cdot}177783$ | $Fes^{23}$ | $Q_{-184}$ | $\frac{2^{292}}{3^{184}}=1{\cdot}289578$ | $Bes^{26}$ |
| $Q_{-141}$ | $\frac{2^{224}}{3^{141}}=1{\cdot}434240$ | $Fes^{20}$ | $Q_{-163}$ | $\frac{2^{259}}{3^{163}}=1{\cdot}570378$ | $Bes^{23}$ | $Q_{-185}$ | $\frac{2^{294}}{3^{185}}=1{\cdot}719438$ | $Es^{27}$ |
| $Q_{-142}$ | $\frac{2^{226}}{3^{142}}=1{\cdot}912321$ | $Bes^{20}$ | $Q_{-164}$ | $\frac{2^{260}}{3^{164}}=1{\cdot}046919$ | $Es^{24}$ | $Q_{-186}$ | $\frac{2^{295}}{3^{186}}=1{\cdot}146292$ | $As^{27}$ |
| $Q_{-143}$ | $\frac{2^{227}}{3^{143}}=1{\cdot}274880$ | $Es^{21}$ | $Q_{-165}$ | $\frac{2^{262}}{3^{165}}=1{\cdot}395892$ | $As^{24}$ | $Q_{-187}$ | $\frac{2^{297}}{3^{187}}=1{\cdot}528389$ | $Des^{27}$ |
| $Q_{-144}$ | $\frac{2^{229}}{3^{144}}=1{\cdot}699841$ | $As^{21}$ | $Q_{-166}$ | $\frac{2^{264}}{3^{166}}=1{\cdot}861189$ | $Des^{24}$ | $Q_{-188}$ | $\frac{2^{298}}{3^{188}}=1{\cdot}018926$ | $Ges^{27}$ |
| $Q_{-145}$ | $\frac{2^{230}}{3^{145}}=1{\cdot}133227$ | $Des^{21}$ | $Q_{-167}$ | $\frac{2^{265}}{3^{167}}=1{\cdot}240792$ | $Ges^{24}$ | $Q_{-189}$ | $\frac{2^{300}}{3^{189}}=1{\cdot}358568$ | $Ces^{27}$ |
| $Q_{-146}$ | $\frac{2^{232}}{3^{146}}=1{\cdot}510969$ | $Ges^{21}$ | $Q_{-168}$ | $\frac{2^{267}}{3^{168}}=1{\cdot}654390$ | $Ces^{24}$ | $Q_{-190}$ | $\frac{2^{302}}{3^{190}}=1{\cdot}811424$ | $Fes^{27}$ |
| $Q_{-147}$ | $\frac{2^{233}}{3^{147}}=1{\cdot}007313$ | $Ces^{21}$ | $Q_{-169}$ | $\frac{2^{268}}{3^{169}}=1{\cdot}102927$ | $Fes^{24}$ | $Q_{-191}$ | $\frac{2^{303}}{3^{191}}=1{\cdot}207616$ | $Bes^{27}$ |
| $Q_{-148}$ | $\frac{2^{235}}{3^{148}}=1{\cdot}343084$ | $Fes^{21}$ | $Q_{-170}$ | $\frac{2^{270}}{3^{170}}=1{\cdot}470569$ | $Bes^{24}$ | $Q_{-192}$ | $\frac{2^{305}}{3^{192}}=1{\cdot}610155$ | $Es^{28}$ |
| $Q_{-149}$ | $\frac{2^{237}}{3^{149}}=1{\cdot}790779$ | $Bes^{21}$ | $Q_{-171}$ | $\frac{2^{272}}{3^{171}}=1{\cdot}960759$ | $Es^{25}$ | $Q_{-193}$ | $\frac{2^{306}}{3^{193}}=1{\cdot}073436$ | $As^{28}$ |
| $Q_{-150}$ | $\frac{2^{238}}{3^{150}}=1{\cdot}193852$ | $Es^{22}$ | $Q_{-172}$ | $\frac{2^{273}}{3^{172}}=1{\cdot}307172$ | $As^{25}$ | $Q_{-194}$ | $\frac{2^{308}}{3^{194}}=1{\cdot}431249$ | $Des^{28}$ |
| $Q_{-151}$ | $\frac{2^{240}}{3^{151}}=1{\cdot}591803$ | $As^{22}$ | $Q_{-173}$ | $\frac{2^{275}}{3^{173}}=1{\cdot}742897$ | $Des^{25}$ | $Q_{-195}$ | $\frac{2^{310}}{3^{195}}=1{\cdot}908332$ | $Ges^{28}$ |
| $Q_{-152}$ | $\frac{2^{241}}{3^{152}}=1{\cdot}061202$ | $Des^{22}$ | $Q_{-174}$ | $\frac{2^{276}}{3^{174}}=1{\cdot}161931$ | $Ges^{25}$ | $Q_{-196}$ | $\frac{2^{311}}{3^{196}}=1{\cdot}272221$ | $Ces^{28}$ |
| $Q_{-153}$ | $\frac{2^{243}}{3^{153}}=1{\cdot}414936$ | $Ges^{22}$ | $Q_{-175}$ | $\frac{2^{278}}{3^{175}}=1{\cdot}549241$ | $Ces^{25}$ | $Q_{-197}$ | $\frac{2^{313}}{3^{197}}=1{\cdot}696295$ | $Fes^{28}$ |

# Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen.

Von H. HAHN, G. HERGLOTZ und K. SCHWARZSCHILD.

In einem während des letzten Winters unter der Leitung von F. Klein abgehaltenen Seminar über Hydraulik haben wir über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen berichtet. Es ist das ein Gegenstand von weitgehender praktischer Bedeutung und zugleich von großem theoretischem Interesse, der aber von den Technikern wesentlich nur nach der praktischen Seite hin erforscht und von Physikern und Mathematikern wohl nicht nach Gebühr gewürdigt ist. Wir glauben daher in der Absicht der Vermittlung und Anregung die folgende Darstellung trotz ihres zum Teil referierenden, zum Teil vorläufigen Charakters veröffentlichen zu sollen.

**1. Allgemeines.** — Wenn ein sehr breiter Strom von der Tiefe $h$ in einem gleichförmigen Bett unter der Neigung $i$ zu Tale fließt, so wird man diese Wasserbewegung im Sinne der klassischen Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten behandeln, indem man ein Strömen der Flüssigkeit in parallelen Fäden mit einer der Stromrichtung parallelen Geschwindigkeit $u$ voraussetzt und $u$ von der Tiefe $y$ unter der Oberfläche abhängen läßt. Die Grundgleichungen von Stokes liefern dann die Bedingung stationären Strömens:

$$\frac{du}{dt} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + g \sin i = 0,$$

wo $\mu$ den Reibungskoeffizienten des Wassers und $g$ die Schwere bedeutet. Fügt man als Randbedingungen hinzu, daß am Boden die Flüssigkeit ruht ($u = 0$ für $y = h$) und daß an der Oberfläche keine Reibung stattfindet $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ für } y = 0\right)$, so erhält man sofort das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in dem Strome:

$$u = \frac{g \sin i}{\mu} \frac{(h^2 - y^2)}{2}.$$

Setzt man in diese Formel den Reibungskoeffizienten des Wassers ($\mu = 0.018$ im c. g. s. System) ein, die Neigung $\sin i = 0.0001$ und die Tiefe $h = 400$ cm entsprechend den Verhältnissen im Mittellauf unsrer Ströme, so folgt für die Geschwindigkeit $u$ an der Oberfläche der kolossale Betrag von 436 m/sec. Da die wirkliche Oberflächengeschwindigkeit unter diesen Umständen rund 1 m/sec. beträgt, so erhellt, daß in einem natürlichen Stromlauf eine Reibungskraft von ganz

anderer Größenordnung, als die gewöhnliche molekulare Reibung des Wassers, wirksam sein muß. Man kann diese Reibung auf nichts anderes zurückführen, als auf das Durcheinanderströmen aller Flüssigkeitsfäden, die sogen. *Turbulenz der Wasserbewegung.*

Es ist neben anderen von Reynolds[1]) durch Beobachtung von Farbenbändern in fließendem Wasser, von Couette[2]) durch Beobachtung der Dämpfung schwingender Flüssigkeitsbehälter festgestellt worden, daß die Laminarbewegung, das Strömen in parallelen Fäden, instabil wird, sobald die Geschwindigkeit der Strömung einen gewissen, mit wachsenden Dimensionen des Gefäßes abnehmenden Betrag überschreitet. Von der mathematischen Seite ist die Frage der Stabilität der Laminarbewegung von Lord Rayleigh und Lord Kelvin angegriffen worden. Rayleigh[3]) untersucht wesentlich reibungslose Flüssigkeiten, welche leider keine Kontinuitätsschlüsse auf das Verhalten reibender Flüssigkeiten gestatten, da die reibende Flüssigkeit an der Wand haftet, die reibungslose an ihr mit endlicher Geschwindigkeit gleitet. Lord Kelvin[4]) behandelt zwar direkt reibende Flüssigkeiten und kommt zu dem Schluß, daß es sich bei der Instabilität der Laminarbewegung um den merkwürdigen Fall handle, wo die unendlich kleinen Schwingungen um die Ausgangsbewegung stabil sind und erst Größen zweiter Ordnung, endliche Schwingungen die Instabilität herbeiführen. Doch kann sein Beweis keineswegs als zwingend angesehen werden, und so ist die ganze Frage von der mathematischen Seite aus als eine noch völlig offene zu bezeichnen.

Verzichtet man aber auf eine Erklärung des Entstehens der Turbulenz und sucht die Erscheinungen voll ausgebildeter Turbulenz, wie sie beim wirklichen Strömen in Röhren, Kanälen und Flüssen auftreten, zu erfassen und zu beschreiben, so sind es *die Untersuchungen von* Boussinesq, die hier am weitesten vordringen. (Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. d. Sciences. Tome 23. Paris 1877 und Théorie de l'Écoulement tourbillonant et tumultueux des liquides. Gauthier-Villars. Paris 1897.) Daß dieselben so wenig gekannt sind und z. B. in dem neuesten schönen Treatise on Hydraulics von Bovey (2. Auflage. Newyork 1902) nicht einmal zitiert werden, mag daran liegen, daß Herr Boussinesq sich einer aprioristisch-deduktiven Darstellungsweise bedient, für die das Gebiet noch nicht reif erscheint. Wir sind im folgenden bemüht, dieselbe durch eine möglichst induktive zu ersetzen.

---

1) London. Philos. Transactions. 174. (1883.)

2) Annales de Physique et de Chimie. (6.) 21. 1890.

3) Scientific papers. Vol. I, pag. 474. Vol. III, pag. 17, 575. Vol. IV, pag. 78, 210.

4) Philos. Mag. (5) 24. (1887) und Brit. Associat. Report. (1880).

Boussinesq zerlegt die wirklichen Geschwindigkeiten der Wasserteilchen $U, V, W$ in mittlere Geschwindigkeiten $u, v, w$ plus unregelmäßigen und rasch veränderlichen „turbulenten" Zusatzgeschwindigkeiten $u', v', w'$. *Die Wirkung dieser turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten besteht nach Boussinesq darin, daß für die mittleren Geschwindigkeiten Differentialgleichungen gelten, welche mit den klassischen Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten genau übereinstimmen, nur daß statt der Reibungskonstanten $\mu$ eine viel größere und je nach Art und Größe der turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten von Fall zu Fall und von Ort zu Ort veränderliche Reibungskonstante $\varepsilon$ eintritt.* Man hätte also z. B. für einen in der $x$-Richtung gleichförmig und stationär durch ein Bett von unveränderlichem Querschnitt fließenden Strom — ein Fall, auf den wir uns durchweg beschränken — die Differentialgleichung:

$$0 = \sin i \cdot g + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{2}$$

wobei $\varepsilon$ mit der Stelle im Querschnitt, mit $y$ und $z$ veränderlich wäre.

Die Differentialgleichungen für die mittleren Geschwindigkeiten einer turbulenten Strömung müssen eine reine Konsequenz der ursprünglichen hydrodynamischen Gleichungen für die Invidivualgeschwindigkeiten der einzelnen Wasserteilchen sein. Boussinesq sucht eine solche Ableitung wirklich durchzuführen und scheint die Ursache der vermehrten scheinbaren Reibung bei Turbulenz in der eigentlichen Reibung der Turbulenz selbst, in der stärkeren Verwandlung von Strömungsenergie in Wärme infolge der vielen raschen Geschwindigkeitswechsel zu suchen. H. A. Lorentz hat gezeigt[1]), daß diese Art der Ableitung nicht richtig sein kann und daß die vermehrte scheinbare Reibung durch den Transport und Austausch von Bewegungsgröße bedingt wird, der zwischen den einzelnen Stellen des Stromquerschnitts bei turbulenter Bewegung stattfindet. Man kann die Schwierigkeit des hier vorliegenden noch ungelösten Problems durch einen Vergleich mit der Gastheorie verdeutlichen und schärfer isolieren. Man spalte den Druck analog den Geschwindigkeiten in einen mittleren Teil $p$ und einen turbulenten Teil $p'$, nenne ferner $E'$ die mittlere Energie der turbulenten Zusatzbewegung und bezeichne allgemein durch einen Querstrich den Mittelwert einer räumlich rasch wechselnden Größe über ein geeignet kleines Gebiet. Dann kann man aus den hydrodynamischen Grundgleichungen durch einfache Mittelwertbildungen folgende Sätze ableiten unter der alleinigen Voraussetzung, daß die mittleren Geschwindigkeiten $u, v, w$ und die Mittelwerte über die Produkte und Quadrate der turbulenten

1) Verslagen der Akad. van Wetenschapen. Amsterdam 6 (1897).

Geschwindigkeiten $\overline{u'v'}$, $\overline{u'^2}$ usw. räumlich und zeitlich hinreichend langsam veränderlich sind:

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3}$$

$$\tfrac{2}{3}E'\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\overline{\left(u'\frac{\partial p'}{\partial y} + v'\frac{\partial p'}{\partial x}\right)} \tag{4}$$

$$\tfrac{4}{3}E'\frac{\partial u}{\partial x} = -\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}}. \tag{5}$$

In der Gastheorie[1]) gelangt man zu völlig analogen Gleichungen, wobei an Stelle der Terme $\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial y} + v'\frac{\partial p'}{\partial x}}$ und $\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}}$ die durch die Zusammenstöße der Moleküle erfolgenden zeitlichen Änderungen der Werte von $\overline{u'v'}$ und $\overline{u'^2}$ stehen, welche wir durch $\frac{D\overline{u'v'}}{Dt}$ und $\frac{D\overline{u'^2}}{Dt}$ bezeichnen wollen. Aus einer eingehenden Diskussion des Mechanismus der Zusammenstöße läßt sich dort der Nachweis erbringen, daß die Beziehungen gelten:

$$\frac{D\overline{u'v'}}{Dt} = -\varkappa \overline{u'v'}$$

$$\frac{D\overline{u'^2}}{Dt} = -\varkappa(\overline{u'^2} - \tfrac{2}{3}E'),$$

und damit folgen dann unmittelbar durch Einsetzen in (3), (4), (5) die bekannten Gleichungen für eine reibende Flüssigkeit, wobei der Reibungskoeffizient der Energie $E'$ der unregelmäßigen Bewegung der Moleküle, d. i. der Temperatur proportional wird. In unserem Falle würde also die Aufgabe bleiben, die Relationen:

$$\overline{\left(u'\frac{\partial p'}{\partial y} + v'\frac{\partial p'}{\partial x}\right)} = \varkappa \overline{u'v'}$$

und

$$\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}} = \varkappa(\overline{u'^2} - \tfrac{2}{3}E')$$

nachzuweisen. Es läßt sich denken, daß dies in Analogie zur Gastheorie geschehen könnte, indem man sich die Turbulenz in Gestalt von zahlreichen die Flüssigkeiten durchziehenden Wirbelkugeln vorstellte, deren Bewegungen und Zusammenstöße zu studieren wären.

Im folgenden nehmen wir jedenfalls mit Boussinesq für die turbulente Bewegung die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichungen bei variablem Reibungskoeffizienten $\varepsilon$ als gegeben an. Unter $\varepsilon$ haben wir

1) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über Wärme. S. 173 ff.

dabei eine der Energie der turbulenten Bewegung proportionale Größe zu verstehen und wollen uns daher erlauben, $\varepsilon$ kurz als „Turbulenz" zu bezeichnen. Wir sehen unsere weitere Aufgabe darin, aus den vorhandenen Beobachtungen auf Grund der Differentialgleichung (2) die Werte von $\varepsilon$ abzuleiten und auf diese Weise Aufklärung über das Verhalten der Turbulenz zu gewinnen.

Worüber wir zugleich Orientierung suchen, ist die Randbedingung, der die Flüssigkeit an den Wänden unterworfen ist. Zwar kann kein Zweifel bestehen, daß die letzten Flüssigkeitsteilchen an der Wand ruhen, auf der andern Seite zeigen aber schon rohe Beobachtungen, daß der Absturz der Geschwindigkeit in Röhren und Kanälen von Werten, die in bezug auf die Größenordnung der Mittelgeschwindigkeit entsprechen, auf Null erst in unmittelbarster Nachbarschaft der Wand erfolgt (auf Strecken von 1—2 cm bei Leitungen von 50—100 cm Durchmesser). Es empfiehlt sich daher, mit Herrn Boussinesq auf die Analyse dieses letzten Absturzes zu verzichten und der Flüssigkeit eine Randgeschwindigkeit $u_0$ zuzuschreiben. Die Wirkung der Wand kommt dann zum Ausdruck in der reibenden Kraft $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$, welche sie auf die Flüssigkeit ausübt, und welche wesentlich nur eine Funktion von $u_0$ und der Rauhigkeit der Wand sein kann. Bezeichnet $n$ die äußere Normale der Wand, so hat man daher eine Grenzbedingung der Form vorauszusetzen:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u_0) = 0. \tag{2a}$$

Es sind im ganzen die beiden Funktionen $\varepsilon$ und $\varphi$, die wir aus den Beobachtungen zu bestimmen haben.

**2. Das verfügbare Beobachtungsmaterial** ist von zweierlei Art. Einmal liegen zahlreiche Experimente über die Ergiebigkeit oder — was dasselbe ist — die *mittlere Geschwindigkeit* in Röhren, Kanälen und Flüssen vor. Es scheint, daß die beste Zusammenfassung der Ergebnisse solcher Versuche durch die Potenzenformel:

$$\bar{u} = c \cdot h^{\lambda} i^{\mu} \tag{6}$$

gegeben wird, wobei $i$ (nahe genug $= \sin i$) das Gefälle, $h$ der „hydraulische Radius" (Querschnitt dividiert durch benetzten Umfang) ist und $c$ einen mit der Rauhigkeit der Wandung abnehmenden Koeffizienten bedeutet. Als Einheiten benutzen wir Meter und Sekunde. Für offene Kanäle hat man nahe: $\lambda = {}^2/_3$, $\mu = {}^1/_2$ und $c = 100$ (für Zementbekleidung) bis $c = 30$ (für bewachsene Erddurchstiche). Für Röhren hat man $\lambda = 0{,}59$—$0{,}66$, $\mu = 0{,}51$—$0{,}58$ und $c = 30$ bis $60$. (S. Bovey,

l. c. pag. 153 u. 253.) Die ältere *Chézysche Formel*, welche $\lambda = \mu = {}^1/_2$ setzte, gibt für engere Intervalle eine erträgliche Annäherung.

Zweitens findet sich ein sehr wertvolles Beobachtungsmaterial in den Versuchen von Bazin über die *Verteilung der Strömungsgeschwindigkeiten* auf die einzelnen Punkte des Querschnitts verschieden geformter Wasserleitungen.[1])

**3. Eindimensionale Probleme.** a) **Der unendlich breite offene Kanal.** — In einem Kanal, dessen Breite groß gegen die Tiefe ist, wird die Geschwindigkeit $u$ nur abhängig von der Tiefe unter der Oberfläche. Zählen wir die $y$-Koordinate vertikal nach unten, so vereinfacht sich die Differentialgleichung (2) hier zu:

$$0 = ig + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Integriert man von einer Stelle $y_0$ aus, für welche $\frac{\partial u}{\partial y}$ verschwindet, so erhält man:

$$\varepsilon = \frac{ig(y_0 - y)}{\frac{\partial u}{\partial y}}, \tag{8}$$

woraus man bei beobachteter Geschwindigkeitsverteilung $u$ sofort die Turbulenz $\varepsilon$ berechnen kann. Nun hat Bazin die Geschwindigkeit $u$ in Kanälen von 0,08 bis 0,38 m Tiefe bei Neigungen von 0,0015 bis 0,009 von der Oberfläche weg bis wenige cm über dem Boden messend verfolgt und festgestellt, daß die Geschwindigkeit $u$ mit der Tiefe $y$ unter der Oberfläche von dem maximalen Oberflächenwert $u_m$ an abnimmt nach der parabolischen Formel:

$$u = u_m - 20\sqrt{ih} \cdot \frac{y^2}{h^2}. \tag{9}$$

Hieraus folgt: $y_0 = 0$ und durch Einsetzen in (8):

$$\varepsilon = \frac{g}{40} \cdot h \cdot \sqrt{hi}, \tag{10}$$

woraus vor allem die Tatsache zu entnehmen ist: *Im breiten Kanal ist die Turbulenz konstant über den ganzen Querschnitt.*

Für die Randgeschwindigkeit folgt:

$$u_0 = u_m - 20\sqrt{ih}.$$

1) Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. d. Sc. Tome 19. Paris (1865) und Tome 32 (1902). Diese beiden Publikationen werden weiterhin als $B_1$ nnd $B_2$ bezeichnet. Der ersteren ist ein Atlas beigegeben, auf den sich die Zitate Planche Nr. ... beziehen.

Wir bilden weiter die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$. Es ist:

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dy = u_m - \frac{20}{3}\sqrt{hi} = u_0 + \frac{40}{3}\cdot\sqrt{hi}.$$

Dieses Resultat ist anzuschließen an die Beobachtungen über die mittlere Geschwindigkeit in Kanälen. Adoptiert man hier zunächst die Chézysche Formel:

$$\bar{u} = c\sqrt{hi},$$

so folgt:

$$u_0 = \sqrt{B}\cdot\sqrt{hi}, \quad \sqrt{B} = c - \frac{40}{3}\cdot \tag{11}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Randbedingung (2a) ein, so findet man:

$$\varphi(u_0) = \frac{g}{B}u_0^2. \tag{12}$$

Damit sind die beiden gesuchten Funktionen $\varepsilon$ und $\varphi$ aus den Beobachtungen bestimmt. Den Wert von $\varepsilon$ kann man noch in der Form schreiben:

$$\varepsilon = \frac{g}{40}\cdot\frac{h\cdot u_0}{\sqrt{B}}. \tag{13}$$

So folgen die anschaulichen Resultate: *Der Widerstand der Wand ist gleich dem Quadrat der Randgeschwindigkeit, multipliziert mit einer bei wachsender Rauhigkeit der Wand wachsenden Konstanten (c nimmt mit wachsender Rauhigkeit ab). Die Turbulenz ist proportional der Wurzel aus dieser Konstanten, der Randgeschwindigkeit und der Tiefe des Kanals.* Es sind gerade diese Sätze, welche Herr Boussinesq als an sich plausible Hypothesen an die Spitze seiner Theorie stellt, was manchen Leser stutzig gemacht haben mag. Wir sehen hier, wie diese Sätze direkt aus den Beobachtungen folgen und wie die vorhandenen Beobachtungen gerade genügen und nur genügen, um sie abzuleiten und damit das, was in dem allgemeinen Ansatz noch willkürlich blieb, festzulegen.

Die Verhältnisse komplizieren sich, wenn man statt der Chézyschen Formel die allgemeine Formel: $\bar{u} = ch^\lambda i^\mu$ für die mittlere Geschwindigkeit einführt. Es zeigt sich dann sogar, daß ein Widerspruch mit Bazins Resultaten über die Geschwindigkeitsverteilung eintritt, der sich in Strenge nur aufheben ließe, wenn man den Widerstand der Wand außer von $u_0$ noch von $\varepsilon$ abhängig machte. Doch wird eine Vermittlung gebildet durch den Ansatz:

$$\varphi(u_0) = \frac{g}{B}u_0^{1/\mu}$$

$$\varepsilon = \frac{g}{3B}h\,u_0^{\frac{1-\mu}{\mu}}\frac{1}{cB^{-\mu}h^{\lambda-\mu} - 1},$$

aus welchem einerseits die Formel $\bar{u} = c h^{\lambda} i^{\mu}$, andererseits die Formel für die Verteilung der Geschwindigkeiten:

$$u = u_m - \tfrac{3}{2}(ip)^{\mu}(c h^{\lambda-\mu} - B^{\mu})\frac{y^2}{h^2}$$

hervorgeht, welch letztere für einen Wert von $\mu$ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ und $\lambda - \mu = \frac{1}{6}$ bei der geringen Variation von $h$, die bei Bazins Beobachtungen ($B_1$ pag. 229) erfolgte, durch geeignete Wahl von $B$ in praktisch völlig genügende Übereinstimmung mit dessen Resultaten zu bringen ist.

b) **Die kreisförmige Röhre.** — Hängt die Geschwindigkeit nur vom Abstand $r$ von der Röhrenmitte ab, so geht die Differentialgleichung (2) über in:

$$(14) \qquad 0 = ig + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon r \frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Da für $r = 0$ aus Symmetriegründen $\frac{\partial u}{\partial r}$ verschwinden muß, so folgt durch Integration:

$$(15) \qquad \varepsilon = -\frac{igr}{2\frac{\partial u}{\partial r}},$$

woraus bei bekannter Geschwindigkeitsverteilung wiederum $\varepsilon$ abzulesen ist.

Bazin hat seine Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung in Röhren sehr nahe durch die Formel ($B_1$ pag. 242)

$$(16) \qquad u = u_m - 20\sqrt{R \cdot i}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

darstellen können ($R$ Röhrenradius). Es folgt daraus:

$$\varepsilon = \frac{g}{120} i^{1/2} R^{3/2} \cdot \frac{R}{r}.$$

*Ein* zuverlässiges Resultat ist dieser Formel zu entnehmen: *Die Turbulenz nimmt gegen die Wand einer Kreisröhre hin stark ab.* Hingegen ist nach der Mitte der Röhre zu $\varepsilon$ als Quotient der beiden abnehmenden Größen $r$ und $\frac{\partial u}{\partial r}$ immer schlechter bestimmbar, und man wird für kleine $r$ in der obigen Formel nur eine bedeutungslose Extrapolation zu sehen haben.

In der Tat ergibt sich ein plausibleres Resultat für die Röhrenmitte, wenn man statt auf die Bazinsche Formel (16) auf dessen Beobachtungen selbst zurückgeht. Herr Bazin findet (vergl. $B_2$) für eine Röhre von 0,4 m Radius die folgenden Geschwindigkeiten:

| $\frac{r}{R}$ = | 0,000 | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 0,9375, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{u}{\bar{u}}$ = | 1,1675 | 1,1605 | 1,1475 | 1,1258 | 1,0923 | 1,0473 | 1,0008 | 0,9220 | 0,8465. |

Trägt man diese Werte graphisch auf, verbindet sie durch eine glatte Kurve und entnimmt dieser den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial r}$, so erhält man aus (15) die folgenden Werte von $\varepsilon$ (in einer willkürlichen Einheit)

| $\frac{r}{R}$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 0,93, |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 1,7 | 1,5 | 1,6 | 1,2 | 0,7 | 0,5. |

Wie man sieht, *bleibt die Turbulenz über etwa $^2/_3$ des Röhrenradius von der Mitte aus konstant, um erst an der Wand rapide abzusinken.*

Bildet man nach Formel (16) die mittlere Geschwindigkeit und zieht für letztere die Chézysche Formel heran, so findet man analog wie oben einen dem Quadrat der Randgeschwindigkeit proportionalen Reibungswiderstand, was in diesem zweiten Falle nicht näher ausgeführt werden soll. (Vgl. Boussinesq, Théorie de l'écoulement I § 14, 15).

**4. Zweidimensionale Probleme.** — Ist der Querschnitt des Wasserlaufs so beschaffen, daß $u$ nicht als Funktion einer Variabeln betrachtet werden kann, so wird es etwas schwieriger, aus der Verteilung von $u$ die Verteilung von $\varepsilon$ abzuleiten. Es handelt sich dann um die Bestimmung von $\varepsilon$ aus der (für $\varepsilon$ linearen) Differentialgleichung:

$$0 = ig + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{17}$$

oder:

$$0 = ig + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Zeichnet man die Linien $u = \text{const.}$ für in gleichen Intervallen fortschreitende Werte der Konstanten auf, bildet die orthogonalen Trajektorien derselben und führt ein krummliniges Koordinatensystem ein, dessen eine Koordinate $u$ selbst ist, während die andere $t$ auf jeder orthogonalen Trajektorie konstant ist, so hat man für das Linienelement:

$$ds^2 = p^2 du^2 + q^2 dt^2,$$

wobei $p$ dem Abstand zweier Linien $u = \text{const.}$, $q$ dem Abstand zweier benachbarter orthogonaler Trajektorien proportional ist. In diesem Koordinatensystem nimmt die Differentialgleichung für $\varepsilon$ die einfache Form an:

$$0 = ig + \frac{1}{pq}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varepsilon \frac{q}{p}\right),$$

deren Integral ist:

$$\varepsilon = -ig\frac{p}{q}\int pq\,du. \tag{18}$$

Will man die Abstände der Linien $u = \text{const.}$ und ihrer orthogonalen Trajektorien nicht zeichnerisch bestimmen, so kann man sich statt dessen der Formeln bedienen:

$$(19)\quad p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}, \quad q = p \cdot \sigma, \quad \log \sigma = \int du \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Willkürlichkeit der Integrationskonstante auf jeder einzelnen Trajektorie $t = \text{const.}$, welche im allgemeinen der Lösung der Differentialgleichung (17) anhaftet, wird in Praxi dadurch behoben, daß jedes Mal ein Punkt maximaler Geschwindigkeit im Querschnitt vorhanden ist, für welchen $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$ ist und für welchen man $\varepsilon$ aus:

$$0 = ig + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

bestimmen muß, wenn man keine Unstetigkeiten für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ oder $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ erhalten will. Mit anderen Worten: Die Unbestimmtheit der Lösung der Differentialgleichung wird in Praxis durch die Forderung, daß die Lösung im Punkte maximaler Geschwindigkeit stetig sein soll, beseitigt.

So einfach es im Prinzip scheint, für eine Reihe von Werten von $x$ oder $y$ die beobachteten Werte von $u$ aufzutragen, aus einer durch sie gelegten Kurve $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ abzulesen und dann die beiden Integrationen (19) und (18) mechanisch etwa mit 2stelliger Genauigkeit auszuführen, so hat diese Aufgabe doch in Praxi ihre Schwierigkeiten, da namentlich gegen den Rand des Querschnitts zu die Interpolation und Extrapolation der beobachteten Werte $u$ sehr willkürlich wird, weil die Beobachtungen stets einige *cm* von der Wand aufhören.

a) **Gedeckte Kanäle.** Bazin hat von zweidimensionalen Problemen nur einen Fall untersucht, bei welchem das Wasser ohne freie Oberfläche und von allen Seiten durch feste Wände eingeschlossen war, er hat die Geschwindigkeitsverteilung in *geschlossenen rechteckigen Kanälen* gemessen ($B_1$, pag. 168. Séries Nr. 51 u. 52). Wir haben auf die Mittelwerte seiner Versuche für einen Kanal von 0,8 *m* Breite und 0,5 *m* Höhe, die auf Planche XVIII in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, das obige Verfahren anzuwenden begonnen und zunächst gesehen, daß sich die Beobachtungen ungezwungen so interpolieren ließen, daß $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ konstant über den ganzen Querschnitt wurde. Die brauchbare Lösung der Differentialgleichung (17) ist dann: $\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{ig}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$,

d. h. auch die Turbulenz wird über den ganzen Querschnitt konstant. Zur Kontrolle haben wir die Beobachtungsresultate noch durch den allgemeinsten zu den Koordinatenachsen symmetrischen Ausdruck vierten Grades, der für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ einen konstanten Wert liefert, nämlich:

$$u = D - Ay^2 - Bz^2 - C(y^4 - 6y^2z^2 + z^4)$$

interpoliert, indem der Mittelpunkt des Rechtecks zum Nullpunkt des Koordinatensystems genommen und die $y$-Achse parallel der Längseite gelegt wurde. Die gefundene Formel:

$$(20) \qquad u = 1{,}176 - 1{,}50y^2 - 5{,}63z^2 - 0{,}0653(y^4 - 6y^2z^2 + z^4)$$

läßt zwar noch merkliche systematische Unterschiede gegen die Beobachtungen, genügt aber für den gleich zu erwähnenden Zweck:

Wir wollen nämlich jetzt nach der Randbedingung fragen, welche von dieser Geschwindigkeitsverteilung erfüllt wird. Man findet für die Normalderivierte von $u$ auf der Längsseite:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}347 - 1{,}78y^2$$

und auf der Schmalseite:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}284 - 2{,}85z^2.$$

Daraus folgt für die Ecke des Rechtecks ($y = 0{,}4$, $z = 0{,}25$) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}072$ resp. 0,106. Es nimmt also $\frac{\partial u}{\partial n}$ von der Mitte der Seiten nach den Ecken zu auf den 3. bis 5. Teil seines Wertes ab. Auf der andern Seite folgt aus (20) für die Geschwindigkeit in der Mitte der Seiten 0,803 resp. 0,798 und für die Geschwindigkeit in der Ecke 0,748, also nur eine Abnahme um 6—7 %.

Nun muß die Randbedingung die Form haben:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(u_0).$$

Da $\varepsilon$ konstant vorausgesetzt ist, sieht man, daß $\varphi(u_0)$ mindestens der sechsten Potenz von $u_0$ proportional sein müßte, um diese Gleichung zu erfüllen.

Das erscheint nicht akzeptabel. Man muß daher die Konstanz von $\varepsilon$ aufgeben und die Willkürlichkeit der Extrapolation der Bazinschen Werte bis an den Rand des Rechtecks so ausnützen, daß der Wert von $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$ in den Ecken vergrößert wird. Es läßt sich einsehen, daß man dies nur erreichen kann, indem man $\varepsilon$ an den Ecken abnehmen

läßt, wodurch sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ in einem stärkeren Verhältnis vergrößert, sodaß das Produkt $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$ wächst. Das qualitative Resultat, mit dem wir uns begnügen wollen, ist dieses: *Im geschlossenen rechteckigen Kanal ist die Turbulenz über den größten Teil des Querschnittes konstant und nimmt nur nach den Ecken zu ab.*

b) **Offene Kanäle.** Ein auffälliges Merkmal der Geschwindigkeitsverteilung in Flüssen, wie in offenen Kanälen, deren Breite nicht sehr groß gegen die Tiefe ist, besteht darin, daß die Maximalgeschwindigkeit sich nicht in der Mitte an der Oberfläche, sondern in einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche vorfindet, die bis zu $\frac{1}{3}$ der ganzen Tiefe ausmachen kann. Man sieht den Diagrammen der Geschwindigkeitsverteilung, die Bazin in seinem Atlas für die verschiedensten oben offenen Kanalformen auf Planche 20—22 gezeichnet hat, an, daß man diese Ergebnisse darstellen könnte durch Annahme eines Widerstandes der Luft, welcher etwa ein Viertel des Widerstands der Wände wäre. Indessen wird die Annahme eines merklichen Einflusses der Luft durch die einfache Beobachtung widerlegt, daß bei talwärts wehendem Wind von gleicher oder größerer Geschwindigkeit, als der Strom besitzt, die Maximalgeschwindigkeit keineswegs an die Oberfläche verlegt und überhaupt nichts Merkliches an dem Geschwindigkeitsbild geändert wird. Ist kein Luftwiderstand vorhanden, so muß übrigens, wie gleich hinzugefügt sei, an der Oberfläche die Grenzbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gelten.

Wie soll aber ohne Luftwiderstand das Herabsinken der Maximalgeschwindigkeit erklärt werden? Die Erklärung ergibt sich von selbst, wenn man etwa die von Bazin beobachtete Geschwindigkeitsverteilung in einem offenen Kanal von 2 *m* Breite und 0,66 *m* Tiefe (Planche XX, Fig. 8.) vornimmt, so extrapoliert, daß an der Oberfläche $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ wird, und auf die durch die vertikale Mittellinie gegebene Orthogonaltrajektorie die obige Methode anwendet. Es folgt dann, daß $\varepsilon$ nach der Oberfläche hin zunimmt. *Man kommt also zu dem Schluß, daß die freie Oberfläche eine Schicht größerer Turbulenz bildet*, und es läßt sich dann leicht vorstellen, daß dieselbe durch ihre größere effektive Zähigkeit eine ähnliche Wirkung wie der vermeintliche Luftwiderstand ausübt.

Beobachtet man das Herabsinken des Geschwindigkeitsmaximums auf den verschiedenen Diagrammen Bazins und nimmt seinen Betrag als ein Maß der Turbulenz der Oberfläche, so erhält man den Eindruck, daß die Turbulenz der Oberfläche wächst mit der größeren Rauheit der Kanalwände und daß sie sich umso fühlbarer macht, je schmäler

der Kanal im Vergleich zu seiner Tiefe ist. Die verstärkte Oberflächenturbulenz scheint also eine Wirkung der Zersplitterung der Wellen an der unregelmäßigen Uferwand zu sein. Wir werden gleich zu bemerken haben, daß sich die unter dem Wasserspiegel liegenden Teile der Wand ganz anders verhalten.

**5. Versuch über die Leitung der Turbulenz.** — Die Boussinesqsche Theorie ist ein Schema, in welchem sich die Beobachtungstatsachen, wie aus dem vorgehenden erhellt, durch geeignete Wahl von $\varepsilon$ in durchsichtiger Weise unterbringen lassen. Eine Voraussage der Erscheinungen würde sie aber erst dann gestatten, wenn neben die Gleichungen (2) für die mittlere Bewegung allgemeine Gleichungen für die Bestimmung der Größe der Turbulenz träten — genau so, wie die Gastheorie erst vollständig ist, wenn neben die hydrodynamischen Gleichungen für die Molarbewegung des Gases die Gleichung für seine Molekularbewegung, die Wärmeleitungsgleichung tritt. Die Analogie der Gastheorie soll uns bei einem Versuch zu einer solchen Ergänzung des Boussinesqschen Ansatzes leiten.

Sobald man einmal mit Herrn Boussinesq für die turbulente Strömung die Gleichungen reibender Flüssigkeiten mit veränderlichem Reibungskoeffizienten $\varepsilon$ angenommen hat, ist damit gesagt, wieviel Turbulenz jeder Zeit an jedem Ort auf Kosten der Energie der mittleren Bewegung $u, v, w$ entsteht, nämlich ebensoviel, als bei einer gewöhnlichen nicht turbulenten Flüssigkeit vom Reibungskoeffizienten $\varepsilon$ in Wärme übergeführt würde, und dieser Betrag wird durch die bekannte Dissipationsfunktion gegeben (der Ausdruck werde gleich auf den Fall der Strömung in einem Kanal von gleichförmigem Querschnitt reduziert):

$$F = \frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Es ist das eine direkte Folgerung aus dem Energieprinzip. Weiß man damit also, wieviel Turbulenz entsteht, so ist nur zu überlegen, wie diese Turbulenzenergie wieder verschwindet, da der Gesamtbetrag der Turbulenz bei stationärer Strömung konstant bleiben muß. Ein Teil derselben wird sich gewiß infolge der eigentlichen Molekularreibung der Flüssigkeit in Wärme verwandeln, man wird diesen Betrag aber wohl bei der Kleinheit der inneren Reibung des Wassers vernachlässigen dürfen, und so wird man zu der Annahme geführt, die durch das Absinken von $\varepsilon$ nach der Wand zu in den obigen Beispielen fast unumgänglich wird, *daß die Turbulenz durch Leitung über die ganze Flüssigkeit hin transportiert und an den Wänden durch Reibung verzehrt wird.*

Die Turbulenzmenge, welche der Volumeneinheit pro Zeiteinheit

durch Leitung zugeführt wird, wollen wir in vollständiger Analogie zur Wärmeleitung durch ein Gas gleich:

$$-\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial z^2}\right), \quad k \text{ konstant},$$

setzen, wobei die Leitfähigkeit gleich $k\varepsilon$ — wie beim Gas mit der Temperatur, so hier mit der Turbulenz wachsend — angesetzt ist. Für den stationären Zustand muß dann gelten:

$$0 = \varepsilon\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} + k\left\{\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial z^2}\right\}. \tag{20}$$

Die an die Wand abfließende Turbulenzmenge wird unter denselben Voraussetzungen durch $\frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial y}$ gegeben, und man wird passend versuchen, diese Abgabe als Funktion der Randgeschwindigkeit darzustellen, sodaß man die Randbedingung hat:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial p} = \psi(u_0). \tag{20a}$$

An einer freien Oberfläche, auf der sich der Einfluß der Wände nicht bemerkbar macht, wird entsprechend gelten:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial n} = 0. \tag{20b}$$

Wenden wir dies an auf den offenen Kanal von unendlicher Breite, so haben wir das vollständige Gleichungssystem:

$$0 = ig + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad 0 = \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + k\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial y^2}$$

mit den Randbedingungen für $y = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial y} = 0$$

und für $y = h$:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{B}u_0^2, \quad \frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial y} = \psi(u_0).$$

Die erste Differentialgleichung gibt integriert:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -igy.$$

Dies liefert in die zweite eingesetzt:

$$0 = \frac{i^2 g^2}{k}y^2 + \varepsilon\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial y^2}.$$

Beginnt man hier $\varepsilon$ nach Potenzen von $y$ in Rücksicht auf die Randbedingung für $y = 0$ zu entwickeln, so ergibt sich für die ersten Glieder:

$$\varepsilon = \varepsilon_m\left[1 - \frac{i^2 g^2}{24 k \varepsilon_m^3}y^4 - \cdots\right]$$

wobei $\varepsilon_m$ eine Integrationskonstante ist. Wählt man die Leitungskonstante $k$ groß genug, so genügt diese Annäherung, und es wird $\varepsilon$ sehr nahe konstant gleich dem Werte $\varepsilon_m$. Es folgt damit:

$$u = u_m - \frac{igy^2}{2\varepsilon_m}\left[1 + \frac{1}{72}\frac{i^2g^2}{k\varepsilon_m^3}y^4\right],$$

was man für großes $k$ auch auf: $u = u_m - \frac{igy^2}{2\varepsilon_m}$ beschränken darf. Es erübrigt die beiden Grenzbedingungen für $y = h$ zu erfüllen. Dieselben werden:

$$Bih = u_0^2, \quad \left(u_0 = u_m - \frac{igh^2}{2\varepsilon_m}\right)$$

$$\frac{1}{6}\frac{i^2g^2}{\varepsilon_m}h^3 = \psi(u_0).$$

Die Beobachtungen lieferten für $\varepsilon_m$ den Wert (vgl. (10)): $\varepsilon_m = \frac{g}{40}h\sqrt{hi}$. Man erhält denselben aus der letzten Gleichung, wenn man

$$\frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial n} = \psi(u_0) = \frac{40}{6}\frac{g}{B^{3/2}}u_0^3 \tag{21}$$

setzt.

Das Ergebnis läßt sich dahin zusammenfassen: *Man erhält aus dem der Gastheorie nachgebildeten Ansatz für die Leitung der Turbulenz im Falle des unendlich breiten Kanals das Beobachtungsresultat, wenn man die Leitungskonstante der Turbulenz sehr groß annimmt und die Verzehrung der Turbulenz durch die Wände proportional der dritten Potenz der Randgeschwindigkeit und einer mit der Rauhigkeit der Wand wachsenden Konstanten setzt.*

Man darf deswegen nicht glauben, daß die Differentialgleichung (20) mit der Randbedingung (21) nun bereits der abgeschlossene Ausdruck der Gesetze der Turbulenzleitung sei. Denn schon bei der Anwendung auf die Kreisröhre ist er mit den Beobachtungen nicht völlig zur Deckung zu bringen. Hier lauten die Differentialgleichungen:

$$0 = ig + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 = \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r}\right)$$

mit der Randbedingung für $r = 0$: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r} = 0$. Die Integration der ersten Gleichung und Einsetzung in die zweite gibt:

$$0 = \frac{i^2g^2r^2}{4k} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r}\right).$$

Da in der Kreisröhre $\varepsilon$ nach den Beobachtungen seinen Wert beträchtlich ändert, bedarf man eines vollen Überblicks über das Integral dieser Gleichung. Durch das Studium der Singularität von $\varepsilon$ im Punkte

$\varepsilon = 0$ wurde es nahe gelegt, $\varepsilon$ und $r$ als Funktionen eines Parameters $z$ darzustellen, der durch:

$$r\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r} = -\alpha z^4 \quad \text{mit} \quad \alpha = \left(\frac{i^2 g^2}{32\,k}\right)^{2/3}$$

definiert war. Es sind dann $r$ und $\varepsilon$ in ihrer Abhängigkeit von $z$ bestimmt durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}}\frac{z^3}{r^3}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\frac{z^7}{r^4}.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen findet man die in dem allein in Frage kommenden Bereich positiven $\varepsilon$'s sehr konvergenten Reihendarstellungen:

$$r = z\left\{1 - \frac{1}{2^5}\left(\frac{z^4}{32}\right) - \frac{17}{3\cdot 2^7}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 - \frac{199}{3^2\cdot 2^{10}}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 - \frac{18809}{3^2\cdot 5\cdot 2^{15}}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 - \cdots\right\}$$

$$\varepsilon = 2\sqrt{\alpha}\left\{1 - \left(\frac{z^4}{32}\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 - \frac{1}{3^2}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 - \frac{43}{3^2\cdot 2^6}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 - \cdots\right\}$$

aus denen dann folgt:

$$u = u_m - \frac{ig}{8\sqrt{\alpha}}z^2\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{z^4}{32}\right) + \frac{13}{480}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 + \frac{97}{8064}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 + \frac{4013}{829440}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Als hiernach die Kurve für $u$ als Funktion von $r$ konstruiert wurde, ergab sich, daß der aus den Beobachtungen folgende starke Abfall nach dem Rande zu durch keine Wahl der verfügbaren Konstanten ausreichend dargestellt werden konnte.

Immerhin lassen die vorhin gewonnenen Resultate darauf schließen, daß hier eine Vorstellung über die Turbulenzleitung gewonnen ist, die als erster Anhalt bei weiteren Untersuchungen dienen kann. Nach einer präziseren Formulierung wird man wohl aber erst dann zu suchen haben, wenn die vermehrte Beobachtung der Bewegung kleiner im Wasser suspendierter Teilchen einen direkteren Einblick in die Natur der Turbulenz eröffnet hat.

Göttingen, im März 1904.

---

## Eine Analogie zur Thermodynamik.

Von Viktor Fischer in Stuttgart.

In einer früheren Arbeit, die unter diesem Titel erschienen ist[1]), bin ich von der Vorstellung von Wirbelringen ausgegangen. Jetzt möchte ich an ihrer Stelle Wirbelkugeln betrachten. Man gelangt dabei für $\varkappa$, das dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem

1) Analogien zur Thermodynamik. Diese Zeitschr., Bd. 47, 1902, S. 1.

Druck zu demjenigen bei konstantem Volumen entspricht, zu einer Beziehung, die Zahlwerte ergibt, welche mit den vorliegenden Versuchswerten eine jedenfalls merkwürdige Übereinstimmung ergeben.

Eine Wirbelkugel denken wir uns zusammengesetzt aus lauter kleinen Kugeln, die konzentrisch angeordnet, von der Mitte gegen den Umfang entsprechend größer werden und sich in sphärischen Bahnen schraubenförmig bewegen. Die Kugel befinde sich z. B. in einer Flüssigkeit, die einen allseitigen gleichmäßigen Druck auf sie ausübt. Der von der Kugel ausgeübte gleiche Gegendruck rührt dann von den radial nach außen wirkenden Fliehkräften her.

Wir berechnen zunächst den durch die Fliehkräfte ausgeübten Gesamtdruck $F$.

Es sei die Fliehkraft $f$ pro Masseneinheit:

$$f = \omega^2 r,$$

dann ist

$$F = \int f dm = \int_0^R \omega^2 r \cdot \mu 4 r^2 \pi dr = \pi \mu \omega^2 R^4.$$

Führen wir in diesen Ausdruck die Kugelmasse $m$ und die Umfangsgeschwindigkeit $V$ ein, so erhalten wir:

$$F = \tfrac{3}{4} m \omega^2 R = \tfrac{3}{4} m \frac{V^2}{R}. \tag{1}$$

Bezeichnen wir den Druck pro Flächeneinheit mit $p$, so wird

$$4 R^2 \pi p = \pi \mu \omega^2 R^4$$

$$4p = \mu V^2$$

oder

$$pv = \frac{V^2}{4}, \tag{2}$$

wobei $v$ des spezifische Volumen bedeutet.

Nun wollen wir die kinetische Energie $E$ der Wirbelkugel berechnen.

Es sei die Energie pro Masseneinheit

$$e = \frac{r^2 \omega^2}{2},$$

dann ist:

$$E = \int e dm = \int_0^R \frac{r^2 \omega^2}{2} \mu 4 r^2 \pi dr = \tfrac{2}{5} \pi \mu \omega^2 R^5$$

$$E = \tfrac{3}{10} m \omega^2 R^2 = \tfrac{3}{10} m V^2.$$

Für eine Kugel von der Masseneinheit gilt daher:

$$\varepsilon = \tfrac{3}{10} V^2. \tag{3}$$

Führen wir in diese Beziehung den Wert für $V^2$ aus (2) ein, so wird:

(4) $$\varepsilon = \tfrac{6}{5} p v.$$

Das Energiedifferential

$$dq = d\varepsilon + da$$

können wir also schreiben:

$$dq = \tfrac{6}{5} v dp + \tfrac{11}{5} p dv.$$

Für

$$dq = 0$$

folgt daraus durch Integration

$$p v^{\frac{11}{6}} = \text{Const.}$$

Es ist daher

$$\varkappa = \tfrac{11}{6}.$$

Daß $\varkappa$ dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu derjenigen bei konstantem Volumen entspricht, erkennen wir aus folgendem:

Es wird für

$$v = \text{Const.}$$

$$dq = d\varepsilon = \tfrac{3}{10} d(V^2)$$

$$c_v = \tfrac{3}{10},$$

und für

$$p = \text{Const.}$$

$$dq = \tfrac{11}{5} p dv = \tfrac{11}{6} d\varepsilon = \tfrac{11}{20} d(V^2)$$

$$c_p = \tfrac{11}{20},$$

und

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{3}{10}} = \tfrac{11}{6} = \varkappa.$$

Es stellen also $c_p$ und $c_v$ die kinetischen Energien vor, die nötig sind, um das Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit der Einheitskugel einmal bei konstantem Druck, das andere Mal bei konstantem Volumen um die Einheit zu erhöhen.

Es ist nun

$$\varkappa = 1{,}83,$$

während nach Versuchen für einatomige Gase der Wert gefunden wurde:

$$\varkappa = 1{,}66.$$

Zwischen diesen beiden Werten herrscht also keine vollständige Übereinstimmung.

Betrachten wir aber den Fall, daß zwei Einheitskugeln miteinander gekoppelt sind.

Aus (4) folgt für eine Kugel

$$\tfrac{5}{6} = \varkappa - 1,$$

daher

$$\varkappa = \tfrac{5}{6} + 1.$$

Für zwei Kugeln wird also

$$\varkappa = \frac{5}{2 \cdot 6} + 1 = \tfrac{17}{12} = 1{,}417.$$

In diesem Falle herrscht also eine gute Übereinstimmung mit dem für zweiatomige Gase durch Versuche gefundenen Mittelwert

$$\varkappa = 1{,}41.$$

Allgemein wird für $n$ Einheitskugeln gelten:

$$\varkappa = \frac{5}{6n} + 1. \tag{5}$$

Wählen wir z. B. $n = 26$, so wird

$$\varkappa = \frac{5}{6 \cdot 26} + 1 = \tfrac{161}{156} = 1{,}032.$$

Dies stimmt mit dem für Terpentinöl $C_{10}H_{16}$ gefundenen Versuchswert

$$\varkappa = 1{,}030.$$

Wir wollen nun zum Vergleich, die durch Versuche gefundenen Werte, wie sie in der „Hütte" angegeben sind[1]), und die aus (5) berechneten Werte von $\varkappa$ nebeneinander schreiben:

| Name | Zeichen | Atomzahl | $\varkappa$ beobachtet | | $\varkappa$ berechnet |
|---|---|---|---|---|---|
| Wasserstoff | $H_2$ | 2 | | | |
| Sauerstoff | $O_2$ | 2 | | | |
| Stickstoff | $N_2$ | 2 | | | |
| Kohlenoxyd | $CO$ | 2 | | 1,41 | 1,417 |
| Stickoxyd | $NO$ | 2 | | | |
| Chlorwasserstoff | $ClH$ | 2 | | | |
| Luft rein und trocken | — | — | | | |
| Wasserdampf | $H_2O$ | 3 | 1,300 | | |
| Kohlensäure | $CO_2$ | 3 | 1,293 | 1,277 | 1,278 |
| Schweflige Säure | $SO_2$ | 3 | 1,255 | | |
| Stickoxydul | $N_2O$ | 3 | 1,258 | | |
| Ammoniak | $NH_3$ | 4 | 1,298 | | 1,208 |
| Acetylen | $C_2H_2$ | 4 | [1,281] | | |
| Methan | $CH_4$ | 5 | 1,270 | | 1,167 |
| Äthylen | $C_2H_4$ | 6 | 1,210 | | 1,139 |
| Alkohol | $C_2H_6O$ | 9 | 1,133 | | 1,093 |
| Benzol | $C_6H_6$ | 12 | 1,082 | | 1,069 |
| Terpentinöl | $C_{10}H_{16}$ | 26 | 1,030 | | 1,032 |

1) Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte", 18. Auflage, 1902. Abteilung I. Seite 286.

Wir sehen, daß für $n = 2$ und 3 die Mittelwerte eine gute Übereinstimmung zeigen. Schlechter ist sie für $n = 4, 5, 6$, während sie für die höheren Werte von $n$ wieder besser wird.

Ergänzen wir aber die obigen Werte durch die in Winkelmanns Handbuch der Physik[1] auf Seite 392 angegebenen Werte von $x$, so finden wir für den Mittelwert bei:

$n = 4$

| | $x$ |
|---|---|
| Ammoniak $NH_3$ . . . . . . . | 1,298 |
| Acetylen $C_2H_2$ . . . . . . . | 1,281 |
| Phosphortrichlorid $PCl_3$ . . . | 1,122 |
| Arsenchlorür $AsCl_3$ . . . . . | 1,110 |
| Mittelwert | 1,203 |
| nach (5) | 1,208 |

$n = 5$

| | $x$ |
|---|---|
| Methan $CH_4$ . . . . . . . . . | 1,270 |
| Zinnchlorid $SnCl_4$ . . . . . . | 1,087 |
| Titanchlorid $TCl_4$ . . . . . . | 1,087 |
| Chlorsilicium $SiCl_4$ . . . . . | 1,097 |
| Chloroform $CHCl_3$ . . . . . | 1,118 |
| Mittelwert | 1,132[2]) |
| nach (5) | 1,167 |

$n = 6$

| | $x$ |
|---|---|
| Aethylen $C_2H_4$ . . . . . . . . | 1,210 |
| Methylalkohol $CH_4O$ . . . . | 1,159 |
| Mittelwert | 1,185 |
| nach (5) | 1,139 |

Es besteht nun auch für diese Mittelwerte eine gute Übereinstimmung mit den aus Formel (5) berechneten Werten.

Für $n = 9$ und 12 wird die Übereinstimmung ebenfalls besser, wenn wir das Mittel aus beiden Tabellenwerten nehmen. Es wird dann für

$n = 9$

| | $x$ |
|---|---|
| Alkohol $C_2H_6O$ . . . . . . . | 1,133 |
| | 1,107 |
| Mittelwert | 1,120 |
| nach (5) | 1,093 |

1) Winkelmann, Handbuch der Physik. 1896. 2. Bd., II. Abteilung.

2) Benützen wir für Chloroform auch die Werte der untern Tabelle S. 393, ohne den Wiedemannschen Wert, so wird $x = 1,131$.

| $n = 12$ | $\varkappa$ |
|---|---|
| Benzol $C_6H_6$ . . . . . . . . . | 1,082 |
| | 1,073 |
| Mittelwert | 1,078 |
| nach (5) | 1,069 |

Wir wollen nun nach der Tabelle auf Seite 392 in Winkelmanns Handbuch noch die Werte für $n = 8, 10, 14, 15$ vergleichen.[1])

| Name | Zeichen | Atomzahl | $\varkappa$ Winkelmanns Tabelle | | $\varkappa$ Formel (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| Bromäthyl | $C_2H_5Br$ | 8 | 1,113 | 1,111 | 1,104 |
| Äthylenchlorid | $C_2H_4Cl_2$ | 8 | 1,109 | | |
| Cyanäthyl | $C_3H_5N$ | 10 | 1,093 | 1,092 | 1,083 |
| Aceton | $C_3H_6O$ | 10 | 1,090 | | |
| Essigäther | $C_4H_8O_2$ | 14 | 1,060 | | 1,060 |
| Äther | $C_4H_{10}O$ | 15 | 1,060 | 1,059 | 1,056 |
| Schwefeläthyl | $C_4H_{10}S$ | 15 | 1,058 | | |

Auch bei diesen Werten erkennen wir eine gute Übereinstimmung.

Mögen wir nun diese Übereinstimmung für einen Zufall halten oder ihr eine tiefere Ursache beilegen, jedenfalls gibt die Formel (5), den gegenwärtigen Versuchsergebnissen entsprechend, richtige Mittelwerte und ein richtiges Bild für die Abnahme des $\varkappa$ bei wachsender Atomzahl.

Stuttgart, den 20. Juni 1904.

---

## Bemerkungen über Hennebergs Aufsatz „Zur Torsionsfestigkeit".

Von C. Runge in Göttingen.

In einer Arbeit „Zur Torsionsfestigkeit"[2]) stellt Henneberg der St. Venantschen Behandlung der Torsion eines zylindrischen Stabes eine andere Methode gegenüber, die er als „die technische Methode" bezeichnet, und konstatiert, daß die letztere nicht immer zu richtigen Resultaten führt. Man vermißt indessen bei Henneberg die Erklärung,

1) Zu bemerken ist noch, daß die in der oberen Tabelle S. 393 angegebenen Werte von $\varkappa$ für $0°$ nach E. Wiedemann durchwegs höher liegen. Dies zeigt, daß Formel (5) nur für hohe Temperaturen gilt, wie sie den Regnaultschen Werten entsprechen.

2) Diese Zeitschrift. Bd. 51. S. 225.

warum „die technische Methode" so irreleiten kann, und es scheint mir daher wünschenswert, seinen Betrachtungen einiges hinzuzufügen.

Schon Kirchhoff und etwas nach ihm St. Venant selbst haben bemerkt, daß die Spannungen eines elastischen Körpers nicht willkürliche Funktionen des Ortes sein können, sondern daß zwischen ihren zweiten Differentialquotienten gewisse lineare Gleichungen bestehn. Es folgt daraus, daß „die technische Methode" gar keine Methode ist, das Torsions-Problem zu lösen, weil sie auf diese notwendigen Bedingungen gar keine Rücksicht nimmt. Wenn also Henneberg sagt, „die technische Methode" sei in ihren Voraussetzungen allgemeiner als die Methode St. Venants, so trifft er damit nicht den Kernpunkt der Sache. Allerdings sind die Voraussetzungen allgemeiner; sie sind zu allgemein, weil sie notwendige Bedingungen vernachlässigen.

Wenn $u, v, w$ die Verschiebungskomponenten eines Punktes sind, der in der spannungsfreien Gleichgewichtslage die Koordinaten $x, y, z$ hat, so gelten für die Zugspannungen $\sigma$ und die Schubspannungen $\tau$ die Gleichungen:

(I) $\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ und die beiden analogen Gleichungen,

(II) $\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ und die beiden analogen Gleichungen.

Wenn man nun für gegebene Spannungen $\sigma, \tau$ die Verschiebungskomponenten $u, v, w$ zu bestimmen sucht, so erkennt man, daß es für beliebig gegebene Spannungen gar nicht möglich ist, daß vielmehr zwischen den Spannungen gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn es ausführbar sein soll, $u, v, w$ den Gleichungen (I) und (II) gemäß zu berechnen. Man kann diese Bedingungen auf folgende Weise herleiten.

Wir lösen zunächst die Gleichungen (I) nach $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ auf und finden

(I*) $2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ und die beiden analogen Gleichungen,

wo $\varkappa = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}$ gesetzt ist. Ferner differenzieren wir die Gleichungen (II) nach der Reihe nach $x, y, z$ und finden

(III) $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$ und die beiden analogen Gleichungen.

Diese Gleichungen lösen wir nach $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ auf und finden

(III*) $2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}$ und die beiden analogen Glei-

chungen. (I*) und (III*) sind nur verträglich, wenn die Gleichungen gelten

$$\text{(IV)}\quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\sigma_x - \varkappa\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right)$$

und die beiden analogen Gleichungen.

Wenn die Bedingungen (IV) erfüllt sind, so kann man durch Integration Funktionen $u, v, w$ so bestimmen, daß (I*) und (III*) und damit auch (I) und (III) erfüllt sind. Mit den Gleichungen (III) sind aber noch nicht die Gleichungen (II) erfüllt. Durch Integration der Gleichungen (III) erhalten wir

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \Phi_1(yz).$$

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \Phi_2(zx)$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \Phi_3(xy).$$

Diese Gleichungen würden in die Gleichungen (II) verwandelt werden können, wenn

$$\Phi_1(yz) = \varphi_1(y) + f_1(z), \quad \Phi_2(zx) = \varphi_2(z) + f_2(x),$$
$$\Phi_3(xy) = \varphi_3(x) + f_3(y)$$

wäre. Man brauchte dann nur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ so zu bestimmen, daß

$$\mu\bar{u} = \mu u + \int \varphi_2(z)\,dz + \int f_3(y)\,dy$$

$$\mu\bar{v} = \mu v + \int \varphi_3(x)\,dx + \int f_1(z)\,dz$$

$$\mu\bar{w} = \mu w + \int \varphi_1(y)\,dy + \int f_2(x)\,dx$$

wäre. Dann würden, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ nicht nur die Gleichungen (II) sondern auch die Gleichungen (I) erfüllen. Denn es bliebe $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}$. Damit aber $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ so zerfallen, ist notwendig und hinreichend, daß $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} = 0$ sei. Wir erhalten damit die weiteren Bedingungen $\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \mu\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}\right)$ und die beiden analogen, oder, wenn wir aus (I) die Ausdrücke für $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ einsetzen:

$$\text{(V)}\quad 2\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_y - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_z - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z))$$

und die beiden analogen Gleichungen.

Die Gleichungen (IV) und (V) sind notwendige Folgerungen der Gleichungen (I) und (II). Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen aber auch umgekehrt, daß, wenn die Gleichungen (IV) und (V) erfüllt

sind, man auch immer für $u$, $v$, $w$ Funktionen finden kann, welche die Gleichungen (I) und (II) erfüllen.

Die Gleichungen (IV) und (V) sind mithin notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Spannungskomponenten $\sigma$, $\tau$ möglich sind, ganz abgesehn davon, ob Gleichgewicht besteht oder nicht.

Um die Torsion zylindrischer Stäbe zu untersuchen, denkt sich St. Venant die Erzeugenden des Zylinders parallel der $z$-Achse und setzt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ und $\tau_{zx}$, $\tau_{yz}$ unabhängig von $z$.

Die Gleichungen (V) sind unter diesen Annahmen von selbst erfüllt. Von den Gleichungen (IV) ist die dritte ebenfalls erfüllt. Die ersten beiden dagegen verlangen:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right).$$

Mit andern Worten, den Spannungen kann nur dann ein Deformationszustand entsprechen, wenn

$$-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \text{Const}$$

ist. Das gilt ganz abgesehen vom Gleichgewichtszustand.

Die Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich unter den gemachten Annahmen auf

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Dazu tritt dann noch die Randbedingung.

Bei der „technischen Methode" werden die Bedingungen (IV) und (V) ignoriert. Es ergeben sich dann unendlich viele Lösungen. Aber einer Lösung, die nicht zugleich die Gleichungen (IV) und (V) befriedigt, entspricht gar kein möglicher Deformationszustand.

Daß Hennebergs Ausdrücke der Schubspannungen $\tau$ für den Fall des rechteckigen und für den Fall des kreuzförmigen Querschnitts mit den Gleichungen (IV) und (V) nicht vereinbar sind, läßt sich unmittelbar erkennen, wenn man die Gleichungen (IV) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen in eine andere Form bringt.

Von den drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

differenziere man die zweite nach $z$ und die dritte nach $y$ und addiere sie zu der ersten der Gleichungen IV. Diese geht dann über in

$$(1-\varkappa)\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2},$$

und in analoger Weise erhält man zwei entsprechende Gleichungen. Für die rechten Seiten schreiben wir $-\Delta\tau_{yz}$, $-\Delta\tau_{zx}$, $-\Delta\tau_{xy}$. Durch Differenziation nach $x$, $y$, $z$ ergibt sich nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\Delta\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\Delta\tau_{xy}.$$

Diese Relation wird durch die Ausdrücke, die Henneberg nach der „technischen Methode“ für die Größen $\tau$ findet, im Falle des rechteckigen und kreuzförmigen Querschnittes nicht befriedigt, und damit erweisen sich diese Spannungszustände als unmöglich.

---

# Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgabe für 1907.

*Académie des Sciences de Paris.* Prix Vaillant (4000 Frs.). Perfectionner en un point important le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques, encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction $u$ et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire. — Les mémoires devront être envoyés au Secrétariat avant le 1[er] janvier 1907.

---

# Bücherschau.

**Hans Lorenz. Lehrbuch der Technischen Physik.** Erster Band. Technische Mechanik starrer Systeme. München und Berlin 1902 bei R. Oldenburg.

Zweifellos wendet sich heute das Interesse der Mathematiker und der Techniker wieder in erhöhtem Maße der Mechanik zu; einige große Probleme der modernen Maschinenkinetik mögen hauptsächlich den Antrieb dazu gegeben haben. Da ist denn nun erklärlich und auch erfreulich, wenn ein Buch wie das in Rede stehende erscheint, das es sich zur Aufgabe stellt, zusammenzufassen, was an neuen Problemen und Lösungsversuchen in der technischen Mechanik da ist, und das bestrebt ist, dies Material in einer auch für Studierende geeigneten Form darzustellen.

Es wäre nun sehr schön gewesen, wenn der Verfasser zwischen seiner ursprünglichen Absicht, gar keine mechanische Einleitung zu der geplanten technischen Physik zu schreiben, und der nun vorliegenden Ausführung, welche ein ganzes Lehrbuch der Mechanik darstellt, einen Mittelweg gefunden und einmal wirklich eine rein technische Mechanik geboten hätte, d. h. eine Anwendung des vorhandenen Lehrgebäudes der Mechanik auf die modernen Probleme der Technik unter Berücksichtigung spezifisch dafür ausgebildeter Methoden. Bis zu einem hohen Grade kommt das Buch diesem Wunsche nach — wenn es auch vielleicht noch nicht ganz der Entwicklung und Anwendungsfähigkeit der allgemeinen Mechanik gerecht wird —; aber der Verfasser hat geglaubt, auch eine Darstellung der Prinzipien der Mechanik geben zu sollen; und dieser Versuch kann leider nicht als gelungen bezeichnet werden.

Um gleich die hierher gehörenden Ausstellungen prinzipieller Natur abzumachen, sei es mir gestattet, dem Gedankengange des Verfassers zunächst so weit zu folgen, als er die Grundlagen der Mechanik berührt.

Da die Bewegungserscheinungen heute in weit höherem Maße als die Bedingungen des Gleichgewichtes unser Interesse in Anspruch nehmen und da auch, historisch betrachtet, die Mechanik erst dann ihren großen Aufschwung nehmen konnte, nachdem Galilei und Newton die fundamentale Bedeutung der Beschleunigung erkannt hatten, so ist es sehr treffend, wenn der Verfasser mit einer Analyse der Bewegungsvorgänge beginnt. (Kap. II) Dabei kann es sich zunächst nur um die Beobachtung von Einzelerscheinungen, also von bestimmten Bewegungsvorgängen handeln, denn diese müssen erst dem Lehrgebäude der Mechanik, — ihrem naturwissenschaftlichen Charakter entsprechend — Material und Grundlagen liefern. Dem entspricht denn auch der Charakter des zweiten Kapitels.

Es war nun wohl die Absicht des Verfassers, von hier aus zu einer Definition der Kraft aufzusteigen und somit den kinetischen Kraftbegriff dem Folgenden zugrunde zu legen an Stelle des unzulänglichen statischen. Der Weg dahin wäre etwa folgender gewesen: Von der bei der einzelnen Erscheinung als Funktion der Zeit beobachteten Beschleunigung geht man — mathematisch unter Elimination individualisierender Konstanten — zum Beschleunigungsgesetz für eine ganze Klasse von Erscheinungen über. Von dem so als Funktion der Zeit, des Ortes, eventuell auch der Geschwindigkeit und selbst höherer Ableitungen erhaltenen Beschleunigungsgesetz ist dann nur noch ein Schritt bis zum Kraftgesetz: Aus anthropomorphen wie auch aus Gründen der Zweckmäßigkeit multipliziert man noch mit einem Faktor, der Masse. Die Gleichung

$$\text{Masse mal Beschleunigung} = \text{Kraft}$$

enthält dann also im wesentlichen die Definition der Kraft. Sache des Experimentes und der Erfahrung ist es, die Existenz von Kraftgesetzen nachzuweisen und für ihre Anwesenheit Merkmale in der Außenwelt anzugeben. Das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zu beweisen, ist ebenfalls, wenigstens für eine Reihe einfacher Kraftgesetze, Sache der Erfahrung und des Experiments, im übrigen aber Postulat aller weiteren Forschung.

Ansätze, den Kraftbegriff in solcher Weise aus dem Beschleunigungs-

begriff zu entwickeln, sind beim Verfasser mehrfach vorhanden (Kap. IV.), so z. B., wenn er Seite 153 sagt: „Die Richtung einer Kraft identifizieren wir nun mit der Richtung der von ihr ausgeübten Beschleunigung.“ Dem steht dann freilich wieder ein Satz wie der (Seite 151) gegenüber: „In derselben bezw. analogen Weise können wir aber alle anderen in der Natur auftretenden Kräfte mit Gewichten vergleichen und so die Richtigkeit der Proportionalität zwischen der auf einen Körper wirkenden Kraft $P$ und seiner augenblicklichen Beschleunigung $p$ nachweisen.“ Vorher aber — und darauf bezieht sich das „in derselben —“ — ist die elastische Kraft einer Feder statisch, d. h. mit Hilfe eines Gewichtes gemessen worden. Also scheint der Verfasser an dieser Stelle wieder mehr an den statischen Kraftbegriff gedacht zu haben. Daß somit keine volle Klarheit über den Kraftbegriff gewonnen wird, liegt hauptsächlich daran, daß jede Definition fehlt; denn der Satz: „Die Bewegungsursache bezeichnen wir nun allgemein als die den Körper treibende Kraft“ dürfte wohl dafür zu unbestimmt sein. Dagegen will ich erwähnen, daß der Verfasser in der Bewegung einer durch eine Feder getriebenen Masse ein gutes Beispiel für die Zweckmäßigkeit gibt, die Masse als Faktor in das Kraftgesetz aufzunehmen; auch wird der empirische Charakter des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte gehörig betont.

Nun handelt es sich darum, von der Betrachtung des einzelnen Massenpunktes zum starren Körper fortzuschreiten. Nachdem Seite 157 das hierzu brauchbare Prinzip der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft in unklarer, weil tautologischer Fassung ausgesprochen ist, wird Seite 256 das Hebelgesetz durch einen Zirkelschluß gewonnen. Möglich, daß der Verfasser das Hebelgesetz als Axiom aufgefaßt wissen wollte — es folgt nämlich ein Hinweis auf die experimentelle Bestätigung —; aber aus dem Texte kann man das nicht herauslesen. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers werden darauf in bekannter Weise durch Grenzübergang aus einem von starren, gewichtslosen Stäben und Massenpunkten gebildeten Systeme gewonnen.

Damit wäre eigentlich alles das erreicht, was zunächst für eine Mechanik in elementarer Behandlungsweise nötig ist. Nun geht aber der Verfasser weiter und sucht auch noch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für beliebige Systeme darzustellen (Seite 272—273 und 470—471). Setzt man da in die ausgesprochenen Sätze statt des Wortes „System“ überall den Ausdruck „starrer Körper“, so kann man mit den Darlegungen zum Teil einverstanden sein, wenn auch der Beweis unzureichend ist, da virtuelle Verschiebungen mit wirklichen verwechselt und im Zusammenhange damit das Verschwinden der kinetischen Energie in der Ruhelage mit dem Eintritt eines Extremalwertes derselben beim Passieren einer Gleichgewichtslage identifiziert wird. Oder soll das ein neuer Grundsatz sein, daß beim Passieren einer Gleichgewichtslage eine momentane Vermehrung der kinetischen Energie ausgeschlossen ist? Merkwürdig ist auch die Meinung, welche an dieser Stelle ausgesprochen wird, als sei das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein spezieller Fall des d'Alembertschen Prinzips, während dies in Wahrheit zwei völlig koordinierte Prinzipien sind. Ganz unrichtig aber werden die Ausführungen für allgemeinere Systeme; in der bekannten Gleichung:

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

wird weder klar, welche Kräfte $X$, $Y$, $Z$ zu nehmen sind, noch erfährt man etwas über die Mannigfaltigkeit der virtuellen $dx$, $dy$, $dz$. Vor allem aber ist der Beweis verfehlt; nach der Begründung: „Da nun im Falle des Gleichgewichts das Gebilde ohnehin keine Formänderung erleidet, so kann man es hierbei stets als starr ansehen" kann man aus dem, was hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen genannt wird, höchstens die Schwerpunkts- und Flächensätze für ein beliebiges System gewinnen, nicht aber die vollständigen Bewegungsgleichungen.

Es scheint mir fast, als ob der Verfasser das Wesen eines allgemeineren Systems, als der starre Körper ist, und seine mechanische Bedeutung nicht ganz klar erfaßt hätte. In dieser Meinung wird man bestärkt, wenn man auf Seite 464 den Satz liest: „Die Formeln (5) und (6)", nämlich die Formeln für die Schwerpunkts- und Flächensätze, „welche man auch als den allgemeinen Ausdruck des d'Alembertschen Prinzipes bezeichnet". Eine entsprechende Behauptung steht Seite 263 in der Mitte. Aber die genannten Formeln sind nur eine spezielle Folgerung des d'Alembertschen Prinzips und werden nur für den starren Körper mit ihm identisch. Zu der vorhin geäußerten Ansicht zwingt auch die Behauptung in dem historischen Anhange (Seite 583), daß „die Lagrangesche Form des d'Alembertschen Prinzipes"

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dx^2}\right)\delta x + \cdots = 0$$

„leicht durch Auflösung der virtuellen Verschiebungen in bloße Translations- und davon unabhängige Drehungskomponenten in die bekannten sechs Differentialgleichungen d'Alemberts zerlegt werden" kann und daß „somit durch die Lagrangesche Fassung sachlich nichts Neues geleistet wird"; eine Schlußfolgerung, die niemand zugeben wird, der die Lagrangesche Mechanik kennt.

Es mag aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß alle diese Ausstellungen den konkreten Inhalt des Buches da, wo es sich um Einzelprobleme handelt, nicht berühren, da der Verfasser überall mit der Mechanik des starren Körpers auskommt, die sachlich richtig angegeben ist.

Diese Beschränkung in den Mitteln — so benutzt der Verfasser nirgendwo die Lagrangeschen Gleichungen — mag anfangs aus pädagogischen Gründen gerechtfertigt sein; gewinnt der Anfänger doch wohl tatsächlich eine leichtere und lebendigere Einsicht, wenn bei dem Studium der Bewegung eines Kurbelmechanismus z. B. nur die Mechanik des starren Körpers benutzt wird und wenn dabei gleich alle Gelenkreaktionen mitbestimmt werden. Auch hat diese, im eigentlichen Sinne synthetische Methode großen Erkenntniswert. Aber ich glaube doch, daß man dem studierenden Techniker späterhin auch die höheren und entwickelteren kinetischen Methoden der Mechanik, so die Lagrangeschen Gleichungen, darbieten sollte — freilich nicht in der rein formalen Ableitung, die man in dem schon genannten historischen Anhange findet —. Denn mit ihrer Hilfe überwindet man doch alle nebensächlichen Schwierigkeiten komplizierterer Probleme bedeutend leichter; ja, wenn man nur einmal alle Bewegungsmöglichkeiten eines Systems richtig erkannt hat, so stehen der expliziten Aufstellung der Bewegungsgleichungen eigentlich gar keine Schwierigkeiten mehr entgegen; diese sind jetzt dahin verwiesen, wo sie wirklich zu suchen sind, nämlich in der Erkenntnis des Kraftfeldes und in der mathematischen Durchführung. Auch

die Furcht, als sei es nicht möglich, auf diesem Wege die Reaktionen zu bestimmen, ist gänzlich unbegründet; das Lagrangesche Verfahren trennt nur das rein kinetische Problem vom kinetostatischen und erleichtert dadurch gleichzeitig die Behandlung beider.

Doch damit genug über die Grundlagen und Methoden der allgemeinen Mechanik; betrachten wir jetzt die technischen Anwendungen, welche den Hauptinhalt des Buches ausmachen, und die Einzeldurchführung. Da kann man wohl mit Recht behaupten, daß das Buch gegenüber der älteren Lehrbuchliteratur einen großen Fortschritt gemacht hat (von dem Föpplschen Werke sehe ich dabei ab): die alten Schulbeispiele treten überall zurück; sie verschwinden zwar nicht, soweit sie nützlich sind, aber sie bleiben nicht in ihrer fadendünnen Abstraktheit stehen, sie wachsen zu wirklichen Problemen aus. Man erkennt dies z. B. an der sorgfältigen Beachtung aller reibenden und dämpfenden Einflüsse: das vierte Kapitel: „Treibende Kräfte und Widerstandskräfte" enthält eine große Zahl durchgeführter Beispiele dieser Art. Den Reibungserscheinungen werden dabei überall die Coulomb-Morinschen Gesetze zugrunde gelegt. Man möchte hier vielleicht etwas mehr über die neuere Kritik dieser Gesetze erfahren; aber ich denke, daß der Verfasser davon noch im Anschluß an die geschmierte Reibung reden wird, die er in der Hydrodynamik zu behandeln verspricht.

Ein zweites charakteristisches Merkmal des Buches bildet die starke Betonung der Schwingungsprobleme und ihrer Wichtigkeit für die moderne Technik. Wir finden zunächst im zweiten Kapitel: „Geschwindigkeit und Beschleunigung" eine ziemlich weitgehende und wohl durchgearbeitete allgemeine Betrachtung dieser Bewegungsform, im vierten Kapitel schließt sich daran die Behandlung der gedämpften und der gezwungenen Schwingungen. Eine Anwendung finden diese Untersuchungen im 5. Kapitel: „Mechanik ebener Systeme" in den Paragraphen, in denen das einfache und das zusammengesetzte materielle Pendel behandelt werden (Glocke und Klöppel.) In Kapitel 6: „Mechanik räumlicher Systeme" begegnet man dieser Theorie dann wieder, wenn die Kreiselbewegung und im Anschlusse daran die Präzession der Erdachse, ferner das materielle Zentrifugalpendel und die Theorie der Regulierung einem gründlichen Studium unterworfen werden.

Nun noch eine kurze Übersicht der einzelnen Kapitel. Das erste Kapitel: „geometrische Bewegungslehre" enthält die notwendigen geometrisch-kinematischen Betrachtungen über Bewegung im allgemeinen, über Verschiebung, Drehung, Rollbewegung und dergleichen. Es darf vielleicht hervorgehoben werden, daß man hier eine Reihe nützlicher Einzeldinge findet, z. B. eine Theorie des Polarplanimeters und des Universalgelenkes. Das schon erwähnte zweite Kapitel nimmt den Zeitbegriff hinzu; u. a. trifft man hier bereits die Kinematik des Kurbelgetriebes an. Besondere Hervorhebung verdient das dritte Kapitel: „Die Relativbewegung". Der Verfasser darf sehr wohl in der Einleitung sagen, daß er auf dasselbe besondere Sorgfalt auch in bezug auf die Auswahl der Anwendungen verwandt habe. Hintereinander werden die relative Translationsbewegung und die relative Rotationsbewegung in der Ebene und im Raume entwickelt, wobei besonders darauf geachtet ist, daß die Rechnungen auch ihre anschauliche Intepretation finden. Von Anwendungen sei die scheinbare Planetenbewegung, die Bewegung auf der Erdoberfläche mitsamt dem Foucaultschen Pendel und die

Theorie des Federregulators sowie des punktförmigen Zentrifugalpendels und des Tachometers genannt. Über das vierte Kapitel habe ich schon gesprochen. Im fünften und sechsten Kapitel finden sich dann die größern technischen Probleme; hier wird man den Schwerpunkt des Buches suchen müssen. Einiges habe ich schon früher erwähnt; ich will nur noch besonders auf die Paragraphen 42: „Der Kräftespiel im Kurbelgetriebe," 45: „Die Bewegung der Fuhrwerke" und 58: „Der Massenausgleich mehrkurbliger Maschinen" hinweisen. Diese Abschnitte führen mitten in die modernen Probleme der Maschinentechnik ein, soweit sie mechanischer Natur sind. Man kann natürlich nicht erwarten, daß bei dem begrenzten Raume eines Lehrbuches alle Problemstellungen und Untersuchungen reproduziert werden, welche diesen Gegenständen so zahlreich zu Teil geworden sind; aber ich glaube, daß der Verfasser hier überall das Wichtigste herausgegriffen, und so dargestellt hat, daß es zu einer Einführung in dieses Gebiet wohl geeignet ist.

Man erkennt an alledem, daß das Buch mitten im heutigen Wissenschaftsbetriebe steht, daß es sich erfolgreich bemüht, dem Leser zu zeigen, wie fruchtbare Probleme die Technik in der letzten Zeit der Mechanik gestellt hat. Das Buch ist reich an schönen Einzelheiten und großen, gut durchgeführten Problemen; auch merkt man überall die eigene Hand des Verfassers. Ich glaube daher, das Buch dem Techniker wie auch dem Mathematiker in gleicher Weise empfehlen zu können. Nur wird es gut sein, die Grundlagen der Mechanik in diesem Buche mit Vorsicht zu studieren. Hoffentlich wird der Verfasser bei einer zweiten Auflage eine gründliche Umarbeitung der betreffenden Abschnitte vornehmen, um die darin vorhandenen — namentlich für Anfänger — mißlichen Mängel zu beseitigen. Dahin stehen zwei völlig verschiedene Wege offen, indem entweder das Prinzip der virtuellen Arbeiten und die hiermit aufs engste verknüpften Methoden der Lagrangeschen Mechanik vollständig ausgeschaltet werden, was ohne jede Schädigung des selbständigen Inhaltes des Werkes geschehen könnte, oder indem der Begriff des über den einzelnen starren Körper hinausgehenden Systems und seiner möglichen Verschiebungen einwandsfrei und klar entwickelt wird.

Karlsruhe, im April 1904. G. Hamel.

---

**K. Doehlemann, Geometrische Transformationen.** I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen. Sammlung Schubert XXVII. 8°, VII u. 322 S. mit 99 Fig. u. 6 Abbildungen. Leipzig 1902, G. I. Göschensche Verlagshandlung. Geb. in Leinwand *M*. 10. —.

Der vorliegende Band der „Sammlung Schubert" bietet unter dem Titel „Geometrische Transformationen I. Teil" eine analytische Behandlung der Projektivität der Grundgebilde 1., 2. und 3. Stufe nebst Anwendungen.

Der *I. Abschnitt* enthält die Einführung der projektiven Koordinaten für die Elemente aller Grundgebilde nach Wilhelm Fiedler, was nicht gerade passend als „Maßbestimmung" bezeichnet wird. Dabei werden die „absoluten Kreispunkte" und der „absolute Kugelkreis" hervorgehoben; ferner wird der „Winkel" als Logarithmus eines Doppelverhältnisses dargestellt, während im übrigen auf imaginäre Elemente nicht näher eingegangen wird.

Der *II. Abschnitt* enthält die lineare Transformation im binären Gebiete bei getrennten und vereinigten Trägern. Hier wird auch die zyklische Projektivität, speziell die involutorische Beziehung erörtert.

Der *III. Abschnitt* behandelt zunächst die kollineare Beziehung der Grundgebilde 2. Sufe. Der folgende Absatz über „projektive Eigenschaften der Kurven“ mit dem Beispiel von Newtons „divergierenden Parabeln“ dürfte für den Anfänger unklar sein. Hübsch ist dagegen das Möbiussche Netz behandelt. Bei der Untersuchung der Zentralkollineation und der anderen besonderen Kollineationen (auf zyklische Kollineationen wird nur hingewiesen) werden auch Konstruktionen ausgeführt. Damit wird der Übergang zu einem großen Kapitel (55 S.) über *Anwendungen* der kollinearen Beziehung angebahnt. In diesem wird zunächst der *Pantograph* und der *Perspektograph* an der Hand guter Abbildungen erklärt. Dann sind zahlreiche Beispiele über das Vorkommen kollinearer Gebilde in der *darstellenden Geometrie* gegeben, insbesondere wird die Schlömilchsche Lösung der Aufgabe behandelt: „Fünf Punkte oder 5 Geraden einer Ebene in fünf Punkte, beziehungsweise 5 Tangenten eines Kreises zu projizieren“. Hier wäre doch mehr hervorzuheben gewesen, welche weiteren besonderen Annahmen bei dieser Lösung der an sich unbestimmten Aufgabe gemacht werden, da in n.⁰ 138 dieselbe Aufgabe mit anderen Annahmen gelöst und dann eine ganze Reihe von Kegelschnittkonstruktionen auf grund der Verwandtschaft mit dem Kreise ausgeführt wird.

Der *IV. Abschnitt* bringt in Kürze die projektiven Raumtransformationen. Nach der Möbiusschen Netzkonstruktion wird auf das Gesetz der rationalen Verhältnisse bei *Kristallen* hingewiesen, nach den besonderen Raumkollineationen auf die affine Änderung eines *Kristalles* bei Änderung der Temperatur und auf das Vorkommen der Verwandtschaften bei der Abbildung durch *optische Instrumente* und in der *Reliefperspektive* (der *Reliefmodellierapparat* von Pfeifer wird durch 2 Abbildungen erläutert). Das Nullsystem wird nur kurz erwähnt und von Anwendungen in der graphischen Statik wird abgesehen, wohl mit Rücksicht darauf, daß der XXXIV. Band Näheres darüber aufweist. Den Schluß bilden die Kollineationen und Korrelationen, welche Flächen 2. Grades in sich überführen, ferner die orthogonale Substitution.

Die Literaturangaben sind zahlreich, aber nicht gleichmäßig abgewogen; auf S. 247 hätte z. B. unbedingt und zwar an erster Stelle „Fiedler, darstellende Geometrie“ genannt werden sollen. Die Ausstattung ist recht gut; von den Drukfehlern werden nur wenige (etwa S. 238, die letzten 2 Zeilen) störend sein. Das Buch ist im allgemeinen klar geschrieben und wird wegen der vielfach vorkommenden Anwendungen den Leserkreis der „Sammlung Schubert“ anregen und befriedigen.

Wien. Th. Schmid.

---

## Neue Bücher.[1])

### Analysis.

1. Laemmel, Rudolf, Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. Zürich 1904, Speidel. M. 2.

### Astronomie.

2. Buchholz, Hugo, Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper auf Grund der Gyldénschen Störungstheorie, II. Tl.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

(Denkschr. der mathem.-naturw. Kl. der Wiener Ak., Bd. 77.). Wien, Gerolds Sohn.

3. Foerster, Wilhelm, Astrometrie oder Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume, zugleich als Grundlage aller Zeit- u. Raummessung. 1. Heft; Die Sphärik u. die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen u. die sphärischen Koordinatenmessungen. Berlin, Reimer. M. 4.
4. Turner, H. H., Astronomical discovery. London 1904, Arnold. 10s. 6d.

s. auch Nr. 31.

### Darstellende Geometrie.

5. Chomé, F., Cours de géométrie descriptive de l'école militaire de Belgique. IIe partie: plans cotés. Avec atlas de 36 planches. Paris 1904. Gauthier-Villars. Frs. 10.
6. Haussner, Robert, Darstellende Geometrie. I. Elemente; Ebenflächige Gebilde. 2., verm. u. verb. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 142.) Leipzig 1904, Göschen geb. M. —80.
7. Schüssler, Rudolf, Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 7.
8. Vonderlinn, J., Schattenkonstruktionen. (Sammlung Göschen Nr. 236.) Leipzig 1904, Göschen. geb. M. —.80.

### Mechanik.

9. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, IV. Bd. (Mechanik). 1 II, 1 Heft. Leipzig 1904, Teubner. M. 4.40.
10. Jaumann, G., Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkt aus dargestellt. Mit 124 Abb. Leipzig, Barth. M. 11; geb. M. 12.
11. Koenigs, G., Introduction à une théorie nouvelle des mécanismes. Paris 1904, Hermann. Frs. 2.50.
12. Whittaker, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. With an introduction to the problem of three bodies. Cambridge 1904, Univ. Press. 12s 6d.

s. auch Nr. 22.

### Physik.

13. Carvallo, E., Leçons d'électricité. Paris 1904, Béranger. Frs. 10.
14. Curie, P., Il radio e le più recenti ricerche sulla radioattività. Milano 1904. L. 1.
15. Ebert, H., Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus u. der Induktion dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. 2., vollkommen neu bearbeitete Aufl. Leipzig, Barth. M. 7; geb. M. 8.
16. Frenzel, Carl, Über die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften. Sechs Vorlesungen. Leipzig u. Wien, Deuticke. M. 3.
17. Gerard, Eric, Leçons sur l'Électricité professées à l'Institut électrotechnique Montefiore annexé à l'Université de Liége. II. Transformateurs. Canalisation et Distribution de l'énergie électrique. Applications de l'électricité à la Télégraphie, à la Téléphonie, à l'Éclairage, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la Traction, à la Métallurgie et à la Chimie industrielle. 7ème édition. Gauthier-Villars. Frs. 12.
18. Gross, Alfr., Electrizität u. Magnetismus. Gemeinverständliche Darstellung der Grundlagen der Elektrotechnik, m. vielen Anleitungen zu Versuchen. Stuttgart, Strecker u. Schröder. geb. in Leinw. M. 3.
19. Heygendorff, W. v., Über das Verteilungs-Gleichgewicht der Ionen. Diss. Leipzig 1904, Schlemminger. M. —75.
20. Jeans. J. H. The dynamical theory of gases. Cambridge 1904, Univ. Press. 15s.

21. Kerntler, Franz, Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes auf Grund allgemein anerkannter Tatsachen u. auf dem Wege einfacher Anschauung. Budapest, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft.
22. Maillet, Edmond, Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Paris, Hermann. Frs. 11.
23. Mazzotto, Domenico, Telegrafia a telefonia senza fili. Milano 1904. L. 3.
24. Poynting, J. H. and Thomson, J. J., A text-book of Physics. vol. 3. Heat. London 1904, Griffin. 15 s.
25. Vaillant, P., et Thovert, J., Physique générale. Paris, 1904, Béranger. Frs. 3.

**Tafeln und Rechenapparate.**

26. Jordan, W., Hilfstafeln f. Tachymetrie. 3. A. Stuttgart 1904. Metzler. M. 8; geb. M. 8.50.
27. Logarithmentafeln, vier- und fünfstellige, nebst einigen physikalischen Konstanten. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. cart. M. —80.
28. Nestler, Albert, Der logarithmische Rechenschieber u. sein Gebrauch, Systeme Mannheim, Rietz, Terry, Nestlers Universal, Nestlers Präzision. Lahr i. B., A. Nestler.
29. Rey-Pailhade, J. de, et Jouffray, A., Éphémérides astronomiques décimales pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1905. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.50.
30. Stampfer, S. Sechsstellige logarithmisch-trignometrische Tafeln, nebst Hilfstafeln, e. Anh. u. e. Anweisung zum Gebrauche der Tafeln. Neu bearb. v. E. Doležal. 20. Aufl. Ausg. f. Praktiker. Wien, Gerolds Sohn. geb. in Leinw. M. 7.

**Verschiedenes.**

31. Astronomischer Kalender f. 1905. Hrsg v. d. k. k. Sternwarte zu Wien. Wien, Gerolds Sohn. M. 2.40.
32. Bürklen, O. Th., Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik. (Sammlung Göschen Nr. 51.) 3., durchgesehene Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. M. —80.
33. Emch, Arnold, An introduction to projective geometry and its applications. An analytical and synthetic treatment. New York, Wiley & Sons.
34. Klein, F., und Riecke, E., Neue Beiträge zur Frage des mathematischen u. physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik in Göttingen, Ostern 1904. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting u. F. Klein. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. Leipzig u. Berlin 1904, Teubner.
35. Picard, Emile, Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.
36. Vater, Richard, Dampf u. Dampfmaschine. („Aus Natur u. Geisteswelt", 63. Bändchen.) Leipzig, Teubner. M. 1; geb. M. 1.25.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Astronomischer Kalender f. 1905, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 31.

Baillaud, B., et Bourget, H., Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Avec une préface de Émile Picard. T. I. (8 novembre 1882—22 juillet 1889.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16.

BAIRE, RENÉ, Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France Rédigées par A. Denjoy. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

BAIRE, R., Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Paris, Vuibert et Nony.

BOREL, ÉMILE, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet. Avec des Notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.50.

BRUNN, HERM., Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. Berlin, Reimer. M. 7.

BUCHHOLZ, H., Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper, II. Tl., s. N. B. 2.

BÜRKLEN, O. TH., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, s. N. B. 32.

DARBOUX, GASTON, Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. Paris 1904, Gauthier-Villars. Frs. 1.50.

EBERT, H., Magnetische Kraftfelder, s. N. B. 15.

EMCH, A., An introduction to projective geometry and its applications, s. N. B. 33.

FÖRSTER, W., Astrometrie, s. N. B. 3.

FRENZEL, C., Über die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, s. N. B. 16.

GERARD, ERIC, Leçons sur l'Électricité, s. N. B. 17.

HAACKE, FR., Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig 1904, Teubner.

HAMMER, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. 3., durchgesehene Aufl. Lahr i. B. 1904, Albert Nestler.

HARZER, PAUL, Die exakten Wissenschaften im alten Japan. Rede zur Feier des Geburtstages des deutschen Kaisers, gehalten an der Christian-Albrechts-Universität am 27. Januar 1905. Kiel, Lipsius & Fischer.

HAUSSNER, R., Darstellende Geometrie, I. 2. Aufl., s. N. B. 6.

JAUMANN, G., Grundlagen der Bewegungslehre, s. N. B. 10.

KERNTLER, FR., Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes, s. N. B. 21.

KLEIN, JOS., Chemie. Anorganischer Teil. (Sammlung Göschen Nr. 37.) 4., verb. Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. M.—.80.

KLEIN u. RIECKE, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts, s. N. B. 34.

LAEMMEL, R., Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, s. N. B. 1.

LIEBMANN, HEINRICH, Nichteuklidische Geometrie. (Sammlung Schubert XLIX.) Leipzig, Göschen. geb. M. 6.50.

Logarithmentafeln, vier- u. fünfstellige, s. N. B. 27.

MAILLET, E., Hydraulique souterraine et fluviale, s. N. B. 22.

MANES, ALFRED, Versicherungswesen. (Teubners Handbücher f. Handel u. Gewerbe.) Leipzig, Teubner. M. 10.

NESTLER, A., Der logarithmische Rechenschieber, s. N. B. 28.

PICARD, ÉMILE, Sur le développement de l'analyse, s. N. B. 35.

SCHÜSSLER, R., Orthogonale Axonometrie, s. N. B. 7.

VATER, R., Dampf und Dampfmaschine, s. N. B. 36.

VONDERLINN, J., Schattenkonstruktionen, s. N. B. 8.

(Erklärung.) Auf Wunsch des Herrn Prof. J. Adamczik in Přibram erklärt die Verlagshandlung F. Deuticke in Wien, daß für nachstehende Figuren der bei ihr erschienenen „Geodäsie von Prof. Dr. N. Herz", Fig. 4, 5, 6, 7, 27, 28, 30, 31, 36, 38, 39, 48, 51, 58, 64, 65, 66, 70, 90, 92, 104, 117, 133, 144, 171, 184, 211, 212, 213, 215 die Klischees der gleichfalls bei ihr erschienenen „Geodäsie von Prof. J. Adamczik" Verwendung gefunden haben.

Hierzu zwei Beilagen von **Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig** und **B. G. Teubner in Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

